CB-648

PROBLEMAS DESCRIPTIVOS CLÁSICOS DE FRACCIONES: EL CASO DE VACIAR Y REPONER[12].

Maria T. Sanz - Bernardo Gómez
m.teresa.sanz@uv.es – bernardo.gomez@uv.es
Universidad de Valencia

Núcleo temático: La Resolución de Problemas en Matemáticas.
Modalidad: CB.
Nivel educativo: Educación Primaria.
Palabras clave: métodos aritméticos, libro de texto, métodos algebraicos, historia de las matemáticas.

Resumen

En el marco del estudio histórico-epistemológico sobre los problemas clásicos descriptivos de fracciones se muestran en este trabajo los métodos de resolución presentes en los libros de texto históricos para el caso de los problemas con todo desconocido y en los que se realiza una acción y tras esta su opuesta. El recorrido de este problema a través de los libros de texto históricos ha hecho emerge métodos de resolución propios de cada época y que en la actualidad han caído en el olvido.

Introducción.

La resolución de problemas ha cobrado especial interés en los últimos tiempos, tanto es así que se ve reflejado explícitamente en el currículo básico de la Educación Primaria española (Real Decreto 126/2014, p. 19386) el cual establece la resolución de problemas como uno de los ejes principales de la actividad matemática.

El método de resolución por excelencia en el sistema escolar actual es el método algebraico cuya descripción realiza Descartes (1701) (Regulæ ad directionem ingenii (Reglas para la dirección del espíritu)) y dónde se explica qué hacer para traducir un problema del lenguaje literal al lenguaje simbólico. Esta prevalencia ha provocado que métodos aritméticos hayan ido desapareciendo y que los discentes carezcan del conocimiento de los métodos tradicionales, como por ejemplo el método inverso o el método de falsa posición, e incluso la confusión por parte de muchos de creer resolver por método algebraico un problema

[12] Este trabajo ha contado con apoyo del Ministerio de Educación de España a través del proyecto EDU2015-69731-R (MINECO / FEDER) y por la Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport a través del proyecto GVPROMETEO2016-143

ISBN 978-84-945722-3-4

cuando en realidad lo que realizan es una resolución aritmética con uso de lenguaje algebraico.

El proceso de resolución de problemas no debe estar basado únicamente en esquemas, algoritmos o rutinas, sino que el resolutor debe ver en cada problema algo más que un ejercicio de aplicación y práctica, es decir que la resolución le debe permitir aumentar su conocimiento matemático (Puig, 2003).

El objetivo general de nuestra investigación es recuperar y poner en conocimiento los diferentes métodos de resolución utilizados a lo largo de la historia a través de un estudio histórico-epistemológico sobre los problemas clásicos descriptivos de fracciones (Gómez, Sanz y Huerta, 2016). Para ello consideramos necesario estudiar las diferentes lecturas analíticas de los mismos, es decir, observar qué relaciones y cómo se establecen estas relaciones entre las cantidades de un problema.

Debido a las limitaciones de tiempo y espacio propias de los congresos, en este documento limitamos el estudio a los métodos de resolución utilizados a lo largo de la historia de un tipo de problema descriptivo de fracciones que nosotros lo hemos bautizado con el nombre de problemas de *Acciones Opuestas*, el siguiente ejemplo sirve para ilustrar sus características superficiales:

> La botella. *Cuando durante la primavera fui de excursión me llevé una botella de vino. Al llegar a una taberna dupliqué el contenido de la botella y me bebí 1 9⁄10 dou en la taberna. Tras visitar cuatro tabernas mi botella quedó vacía. Permíteme que te pregunte: ¿cuánto vino tenía al principio de la excursión?* (Swetz, 2014, p.95).

Características de los problemas de Acciones Opuestas

En relación con los aspectos superficiales (de superficie) de este tipo de problema se observa un contexto en el que están presentes una acción y su opuesta, las cuales, en el caso del ejemplo, viene dadas por los verbos, *llenar y beber*. Otros ejemplos encontrados en los diferentes libros de texto estudiados las acciones opuestas se manifiestan con otros verbos, como por ejemplo: : a) subir y bajar, b) vaciar y reponer, c) ganar y perder, d) dar y quitar, e) pedir y pagar, f) gastar e ingresar o g) ofrecer y devolver.

En cuanto a las características estructurales, se identifica un todo o cantidad total que es desconocido y unas partes que están relacionadas entre sí.–La relación entre las partes se

ISBN 978-84-945722-3-4

realiza a través del complemento aditivo, es decir, tras realizar una primera acción, la segunda acción se relaciona con lo que ha quedado de la primera, a través del complemento aditivo. Esta relación se presenta explícitamente o implícitamente con el sintagma "de lo que queda".

Este tipo de problemas aparecen de modo recurrente en los libros de texto desde tiempo inmemorial. Swetz (2014) cita como versión más antigua de estos problemas el problema de *La botella*, quién lo enmarca dentro de los 247 problemas del *Jiuzhang Suanshu* de la matemática china (Los nueve capítulos del arte matemático, 100 d. C. (Shen, Crossley y Lun, 1999)). En Occidente, aparece por primera vez en el *Liber abaci* de Fibonacci (1202) dónde se introducen los métodos de la matemática islámica. Más adelante, con la introducción de la imprenta, aparece en multitud de libros de aritmética comercial y álgebras primitivas, como por ejemplo, en la aritmética de Silíceo (1514) o en el álgebra sincopada de Aurel (1552).

Versiones de estos problemas están presentes en los textos de la matemática recreativa, como los de Ozanam (1692/1778) o Vinot (1860). También aparecen en los textos de matemáticos de principios del s. XIX, como Vallejo (1841) o Peacock (1842).

Por último, también se encuentran en las colecciones de problemas escolares, como son los textos de Álvarez (1936), Bruño (1940) o Dalmau (1943),

Métodos de Resolución a lo largo de la Historia.

Un método aritmético habitual, felizmente aplicado a este tipo de problemas, es el método inverso, consiste en empezar por el valor o cantidad final y a partir de aquí seguir de atrás hacia delante realizando las operaciones inversas de las que en el enunciado se da cuenta. El siguiente ejemplo da cuenta del método:

> El ladrón. *Un ladrón entró en un palacio donde encontró una caja llena de ducados; tras cogerla intentó escapar; pero fue cogido por un portero del palacio, al que ofreció la mitad de los ducados con tal de que le dejara escapar; pero el portero, en cierta forma compadecido, le devolvió los 80 ducados de lo que el ladrón le había dado y le dejó ir. Poco después es sorprendido por otro portero del palacio al cuál le ofreció también la mitad de los ducados que le quedaban; cuando el portero recibió esta cantidad, fue también generoso y de la suma recibida devolvió al ladrón 50 ducados. Por último, es cogido por un tercer portero del palacio, al cual ofrece la mitad de los ducados que llevaba en el saco, cantidad de*

ISBN 978-84-945722-3-4

la que el portero a su vez, le devolvió 24; al final el ladrón sale del palacio con 200 ducados en el saco. ¿Cuántos ducados había en el saco al principio?

Solución*. De los 200 ducados que hay al final se restan 24, que le devolvió el tercer portero; el resto es 176; esto se multiplica por 2 y tenemos 352; de aquí se restan los 50 que le devolvió el segundo portero y quedan 302; esto se multiplica por 2 y tenemos 604; de aquí se quitan los 80 que le devolvió el primer portero y el resto es 524; esto se multiplica por 2 y tenemos 1048, que es el número de ducados iniciales* (Silíceo, 1514, p. 263)

Métodos algebraicos primitivos para resolver este tipo de problemas, se encuentran ya en el álgebra sincopada de Aurel (1552). Este autor resuelve el problema del *mercader*, en los siguientes términos:

Nota: el signo cósico utilizado por el autor se ha traducido en este trabajo por la letra *x*,

El mercader. *Un mercader va a tres ferias, en la primera gana la mitad de los ducados que tiene y gasta 6 ducados, en la segunda gana la tercia parte de los que trae y gasta cuatros ducados, en la tercera gana la cuarta parte de lo que trae, y gasta dos ducados. A la fin, halla tener 13 ducados más de los que primero sacó de su casa. Demando ¿con cuántos entró en la primera feria?*

Solución. *Pongo que entró con x ducados, gana su* $\frac{1}{2}$ *más que es* $\frac{1}{2}x$ *y tendrá* $1\frac{1}{2}x$*. Gasta 6 ducados. Entra en la segunda feria con* $1\frac{1}{2}x-6$*, en la cual gana su tercia parte que es* $\frac{1}{2}x-2$*, será cabal y ganancia 2x-8 [la suma de lo que trae y gana], de los cuales gasta cuatro ducados. Entra en la tercera feria con 2x-12, en la cual gana su* $\frac{1}{4}$*, que es* $\frac{1}{2}x-3$*, será cabal y ganancia* $2\frac{1}{2}x-15$*, de los cuales gasta dos ducados. Quédanle tornando a su casa* $2\frac{1}{2}x-17$*, serán iguales a x+13 con los que dice que a la postre se halló. Iguala, junta [los números] y quita x de x y quedarán 30 iguales a* $1\frac{1}{2}x$*. Parte y vendrá x a valer 20. Con tantos ducados entró en la primera feria* (Aurel, 1552, fo. 85)

Pero la aparición del álgebra no hace que los métodos aritméticos caigan en desuso, sino que se siguen poniendo en valor. Así lo evidencia el siguiente ejemplo tomado de Ozanam (1692/1778), donde se utiliza el método directo para obtener la solución.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

El somelier infiel**.** *Un somelier infiel, cada vez que va a la cava roba una pinta de un tonel particular que contiene 100 pintas, y la reemplaza por una igual de agua. Después de un tiempo, por ejemplo, 30 días, se descubre su bribonería, y lo cazan. Pero se pregunta cuál es la cantidad de vino que ha cogido, y qué queda en el tonel.* Solución. *Como cada vez tiene el cuidado de rellenar exactamente el tonel de 100 litros, está claro que quita cada vez, al coger 1 litro, 1/100 de lo que hay de vino y 1/100 de lo que hay de agua en el tonel; queda pues cada vez en el tonel los 99/100 del vino que contenía antes de que el somelier cogiera su litro. Por consecuencia, quedaron la 1ª vez los 99/100, de 100 litros, la 2ª vez los 99/100 de 99/100 de 100 litros o los $99^2/100^2$ de 100 litros, la 3ª vez los …, y en fin la 30ª vez quedaron los $99^{30}/100^{30}$ de 100 litros o $99^{30}/100^{19}$ de litro=73 litros 97 centil. En consecuencia, el agua introducida fue 26 lit. 03 centil. En vez de calcular la fracción $99^{30}/100^{19}$ por logaritmos o directamente, lo que sería muy largo, se puede buscar sucesivamente cuanto quedará de agua cada día después de hacha la mezcla.* (Ozanam, 1692/1778, p. 212).

Con la aparición del álgebra simbólica, el método algebraico se consolida en su forma canónica actual. La aplicación de este método al problema que nos ocupa, adquiere el aspecto que queda reflejado en el siguiente ejemplo tomado de Peacock (1842).

El jugador. *Un jugador pierde la mitad de su dinero, y luego gana 6 ch.: después pierde un tercio de lo que le queda, y luego gana 12 ch.; finalmente pierde un cuarto de lo que le queda, y halla que le quedan dos guineas: ¿qué suma tenía al principio?* Solución. *Las unidades, con que el jugador gana y pierde están en chelines, de las que le quedaron 42. Expresemos con x el número de chelines que tenía al principio, y simbolizamos las condiciones que se presentan en el problema. Su primera pérdida es* $\frac{x}{2}$ *, le quedan* $x-\frac{x}{2}$ *, o* $\frac{x}{2}$*, tras lo cual gana 6 ch., que suma a* $\frac{x}{2}$*, lo que da* $\frac{x}{2}+6$*, que es el dinero que posee al final de su primera aventura; a continuación pierde un tercio de* $\frac{x}{2}+6$*, que es* $\frac{x}{6}+2$ *, y que restado de* $\frac{x}{2}+6$*, deja* $\frac{x}{2}+6-\frac{x}{6}-2$ *, o* $\frac{x}{3}+4$*, después de esto gana 12 ch. que suma a* $\frac{x}{3}+4$ *, hacen* $\frac{x}{3}+4+12$ *, o* $\frac{x}{3}+16$*, que es el dinero que posee al final de su segunda aventura, ahora pierde un*

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

cuarto de $\frac{x}{3}+16$, *o* $\frac{x}{12}+4$, *que resta de* $\frac{x}{3}+16$, *deja* $\frac{x}{3}+16-\frac{x}{12}-4$, *o* $\frac{x}{4}+12$ *lo que por las condiciones del problema es igual a 42, consecuentemente:* $\frac{x}{4}+12=42, \frac{x}{4}=30, x=120$ *, que es la cantidad que tenía al principio* (Peacock, 1842, p. 252).

No obstante, en la aritmética escolar se siguen utilizando los métodos aritméticos, este es el caso, por ejemplo, de los textos de Dalmau (1943), quien aplica el método directo en el problema de *La vasija*.

La vasija. *Se tiene una vasija llena de agua de mar, se derraman los 2/9 del contenido, y se hecha agua potable hasta llenarla de nuevo; se decanta la vasija derramando los 4/7 del contenido; vuelve a llenarse de agua potable, y se derraman, de nuevo los 5/6 del líquido contenido. ¿Qué cantidad de agua de mar queda en la vasija?*

Solución. *Al derramarse los 2/9 quedan en la vasija 7/9 del agua de mar. Al derramarse los 4/7, salen de la vasija los 4/7 de 7/9 del agua de mar, esto es 4/7x7/9=28/63; luego quedan en la vasija 7/9-28/63=1/3 de la cantidad primera de agua de mar. Al derramarse los 5/6, salen de la vasija los 5/6 de 1/3, esto es 5/18, y quedando en ella, 1/3-5/18=1/18* (Dalmau, 1943, p. 176).

En cambio, en Álvarez (1936), en su problema *El bebedor*, hace uso del lenguaje algebraico, pero la resolución que plantea no es a través del método algebraico ya que no existe la igualación de dos expresiones de la misma cantidad,

El bebedor. *Una persona llena un vaso de vino puro y bebe ¼. Vuelve a llenarlo de agua y bebe 1/3. Lo llena por segunda vez de agua y bebe ½. ¿Qué vino puro le queda por beber?*

Solución. *Cantidad inicial de vino puro = x, equivale a todo el recipiente*

Al agua la llamaremos y

Primera extracción = 1/4 de x = x/4

Queda = ¾ de x = 3x/4 es vino

Añadimos agua = ¼ de x = x/4 es agua

Segunda extracción = 1/3 de (¾ de x+¼ de x) = 1/4 de x + 1/12 de x = x/4+x/12, son sustancias diferentes x/4 corresponde al vino bebido, x/12 al agua bebida

ISBN 978-84-945722-3-4

Queda de vino = 2/4 de x = 2x/4 es vino

Queda de agua = 1/6 de x = x/6 es agua

Por tanto en el vaso tenemos una cantidad de líquido, 2/3 de x

Añadimos agua = 1/3 de x = x/3

Así tenemos de vino 2/4 de x, tenemos de agua x/2,

Tercera extracción = 1/2 de (2/4 de x + ½ de x) = ¼ de x + ¼ de x = x/4 + x/4, nuevamente son sustancias diferentes x/4 corresponde al vino bebido, x/4 al agua bebida

Queda = 1/4 de x = x/4 de vino

Queda = ¼ de x = x/4 de agua (Álvarez, 1936, p. 60).

Conclusiones y Líneas Futuras

En este trabajo se ha dado cuenta de los métodos de resolución utilizados a lo largo de la historia para resolver un tipo de problema descriptivo de fracciones con todo conocido y partes relacionadas entre sí a través del complemento aditivo, cuyo enunciado emana una característica común, la de realizar una acción y tras esta su opuesta.

Se observa que a pesar de la introducción del álgebra sincopada (s. XVI) y del álgebra simbólica (s. XIX), los métodos de resolución aritméticos (método inverso o directo) están muy presentes en los libros de textos históricos e incluso en la matemática escolar de primera mitad del s. XX.

Actualmente, el método de resolución por antonomasia es el algebraico y parece haber caído en el olvido todo método aritmético. Esta investigación tiene como reto el potenciar la resolución de problemas como una competencia básica, tal y como propone el currículo actual. Así como mantener viva la riqueza de conocimientos a través de los diferentes métodos de resolución que la historia nos muestra.

Finalmente, como línea futura, mostrar, a través de un proceso de enseñanza y el correspondiente análisis de la evolución de aprendizaje, como los problemas descriptivos de fracciones, son fuente de conocimiento por sí mismos y no como ejercicios de aplicación y práctica.

Bibliografía.

ISBN 978-84-945722-3-4

Álvarez, E. (1936). *Problemas elementales de Matemáticas, Física y Química*. Madrid: Instituto Samper.

Aurel, M. (1552) *Libro primero, de arithmetica algebraica.* Valencia: En casa de Ioan de Mey Flandro.

Bruño, G. (1940). *Aritmética Razonada. Curso Superior*. Madrid: Editorial Bruño.

Dalmau, J. (1943). *Soluciones analíticas*. *Nueva edición corregida y aumentada. Libro del maestro*. Gerona: Dalmáu Carles Pla, S. A.

Descartes (1701) http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b8612019j/f8.image.r=.langEN (accedido 15/04/2017)

Fibonacci, L. (2002/1202). *Liber Abacci. In: SIGLER, L.E. Fibonacci's Liber Abaci A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation***.** New York: Springer.

Gómez, B., Sanz, M.., & Huerta, I. (2016). Problemas Descriptivos de Fracciones. Bolema, 30(55), 586.

Shen, K., Crossley, J. N. y Lun, A. (1999). *The Nine Chapters on the Mathematical Art*: *Companion and Commentary*. Oxford, Reino Unido: Oxford University Press.

Ozanam, M. (1692/1844). Récreations Mathématiques & Phisiques. In Recreation in Science and Natural philosophy. Dr. Hutton's translation of Montucla's edition of Ozanam. Revised by Edward Riddle. London. Thomas Tegg. 1844.

Puig, L. (2003) Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa. In: Castro E., Flores, P.; Ortega, T.; Rico, L. y Vallecillos, A. (Eds.). *Investigación en Educación Matemática. VII Simposio de la SEIEM*. Granada. U. de Granada. p. 97-108.

Polya, G., (1945) *How to Solve It.* (Princeton University Press: Princeton, NJ). [Traducción castellana de Julián Zugazagoitia, Cómo plantear y resolver problemas. (Trillas: México, 1965).]

Peacock, G. (1842). *Treatise on Algebra*. Cambridge: University press.

Silíceo, J. M. (1996). *Ars Arithmética*. En J. M. Cobos Bueno, J.M. y E. Sánchez Salor Juan Martínez Silíceo. Ars Arithmética. Madrid: Editora Regional de Extremadura y Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura. (Original, 1514).

ISBN 978-84-945722-3-4

Swetz, F. J. (2014) *Expediciones matemáticas. La aventura de los problemas matemáticos a través de la historia* (José Migual Parra, trad.). Madrid, España: La esfera de los libros.

Vallejo, José M. (1841). *Tratado Elemental de Matemáticas*, escrito de orden de S. M. para uso de los caballeros seminaristas del seminario de nobles de Madrid y demás casas de educación del Reino. Cuarta edición corregida y considerablemente aumentada. Tomo I. Parte primera, que contiene la Aritmética y Álgebra. Madrid. Imp Garrayasaza. (Primera ed. 1813)

Vinot, J. (1860) *Récréations mathématiques*. Paris: Larousse et Boyer.

ISBN 978-84-945722-3-4