



# REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

<http://revista.amiutem.edu.mx>

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores  
del Uso de Tecnología en Educación Matemática.

Volumen IV      Número 1      Fecha: Junio 2016

ISSN: 2395-955X

Directorio:

Rafael Pantoja R.

Director

Eréndira Núñez P.

Lilia López V.

Sección: Selección de artículos

Elena Nesterova

Alicia López B.

Sección: Experiencias Docentes

Christian Morales O.

Sitio WEB

Esnel Pérez H.

Lourdes Guerrero M.

Sección: Geogebra

## INTERPRETACIÓN DEL CONCEPTO DE VARIABLE EN DIFERENTES REPRESENTACIONES CON ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN SUPERIOR

Laura Jannet Chablé Álvarez, Lourdes Guerrero Magaña

Universidad de Guadalajara, México.

[jann\\_laura@hotmail.com](mailto:jann_laura@hotmail.com), [lourdes.guerrero@gmail.com](mailto:lourdes.guerrero@gmail.com)

Para citar este artículo:

Chablé, L. J. y Guerrero, L. (2016). Interpretación del concepto de variable en diferentes representaciones con estudiantes de educación superior. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. IV, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

ISSN: 2395-955X

Revista AMIUTEM, Año 4, No. 1, Enero - Junio 2016, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Calle Gordiano Guzmán #6, Benito Juárez, C.P.49096, Ciudad Guzmán Jalisco, Teléfono: 3411175206. Correo electrónico: <http://www.amiutem.edu.mx/revista>, [revista@amiutem.edu.mx](mailto:revista@amiutem.edu.mx). Editor responsable: M.C. Christian Morales Ontiveros. Reserva derechos exclusivos al No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

# INTERPRETACIÓN DEL CONCEPTO DE VARIABLE EN DIFERENTES REPRESENTACIONES CON ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN SUPERIOR

Laura Jannet Chablé Álvarez, Lourdes Guerrero Magaña

Universidad de Guadalajara, México.

*jann\_laura@hotmail.com, lourdes.guerrero@gmail.com*

**Palabras clave:** Variable, relación, representaciones, GeoGebra, precálculo

## Resumen

La presente investigación pretende detectar cuáles son las dificultades principales que presentan los alumnos de licenciatura al tratar con diferentes formas de representación (simbólica, gráfica, numérica, verbal) (Duval, 1993) de relaciones entre variables. El propósito del trabajo es presentar los primeros resultados de la investigación, los cuales consisten en una prueba piloto que busca hacer una indagación preliminar sobre las diferentes interpretaciones que dan los alumnos al concepto de variable, con el empleo de un cuaderno de trabajo con diferentes actividades, en las que se debe analizar y explorar dinámicamente, el comportamiento de familias de funciones a través de la relación ecuación-gráfica, al hacer variar los parámetros en la expresión simbólica de dichas funciones.

## Introducción

La variación es una de las propiedades fundamentales de los objetos matemáticos (Devlin, 2000; Morales & Díaz, 2003) y al mismo tiempo presenta dificultades importantes para su aprendizaje (Küchemann, 1981; Booth, 1984; Kieran et al., 1996). Muchas investigaciones (Trigueros, Ursini y Lozano, 2000; Juárez, 2011) dan cuenta de la gran dificultad de este concepto tanto por estudiantes de bachillerato como del nivel superior.

Con el estudio de Morales y Díaz (2003) se obtuvo que, al analizar las respuestas dadas por los alumnos, se identificaron seis diferentes maneras de interpretar los símbolos literales, a saber:

- Letra evaluada. A la letra se le asigna un valor numérico;
- Letra no utilizada. La letra es ignorada o su existencia es reconocida pero no se le atribuye ningún significado;
- Letra como objeto. Se considera la letra como una abreviación del nombre de un objeto o como a un objeto en sí;
- Letra como incógnita específica. La letra representa un número particular pero desconocido y los alumnos son capaces de operar directamente sobre ella;
- Letra como número generalizado. Se considera que la letra representa o es capaz de asumir distintos valores;
- Letra como variable. Se considera que la letra representa un rango de valores no especificado y que existe una relación sistemática entre dos conjuntos de valores de este tipo.

En estos resultados, destaca el hecho de que los alumnos tienen diferentes maneras de interpretar las letras usadas para representar las variables, lo que indica que quienes se inician en el estudio del álgebra, consideran que los símbolos literales pueden interpretarse de diferentes formas, y que su significado puede variar con el problema. Esto muestra que la interpretación dada no es siempre la apropiada, y frecuentemente es la fuente de respuestas erróneas.

Otro estudio acerca de las concepciones erróneas sobre el uso de letras, que presentaron algunos estudiantes de nivel superior, reporta que cuando a los alumnos se les presentan relaciones funcionales en forma analítica, tienden a confundir la variable independiente y la variable dependiente (Juárez, 2011, pág.85).

Por otra parte, Ursini (1994) considera que en el álgebra elemental, aparecen esencialmente tres usos de la variable: incógnita específica, número general y en relación funcional. Señala también que un usuario competente del álgebra, es capaz de interpretar la variable de modos distintos, dependiendo del problema en el que aparece. El no reconocer que la variable tiene distintos usos puede representar un obstáculo para aprender álgebra.

Para el aprendizaje del Álgebra escolar y el estudio de la variación, Kaput (1999) propone tres enfoques, de acuerdo con acercamientos generales de Carraher & Schliemann (2007):

- 1) el estudio de estructuras y sistemas abstractos para construir relaciones y hacer cálculos, incluyendo las que surgen en la aritmética y el razonamiento cuantitativo (el álgebra como una generalización de la aritmética).
- 2) el estudio de la variación, de relaciones y funciones.
- 3) un grupo de lenguajes de modelación para expresar y apoyar el razonamiento sobre las situaciones que se quieren modelar.

Estos aspectos fundamentales, determinan procesos de razonamiento que se considera que fluyen hacia cada uno de sus planteamientos, incluyendo entre ellos a la generalización, la expresión de generalizaciones que sistemáticamente se acercan hacia los sistemas de símbolos convencionales, y las acciones guiadas sintácticamente sobre símbolos organizados en dichos sistemas.

Una problemática detectada en el acercamiento al álgebra mediante la modelación, es que las situaciones a modelar, que generalmente se utilizan en este enfoque, en su mayoría pueden ser tratadas utilizando estrategias puramente aritméticas.

Los estudiantes, al contar con estos recursos, no ven la necesidad de utilizar el álgebra para resolver los problemas que se les presentan; sienten que se trata de un requerimiento innecesario impuesto por el profesor. Así mismo, cuando la enseñanza se dirige solamente por el enfoque basado en la estructura, no hay manera de aportar significado a los símbolos y la enseñanza se dirige hacia la ejercitación de procedimientos de manipulación algebraica.

Los estudiantes necesitan tiempo para apropiarse del conocimiento matemático y, aunque la actividad de manipulación simbólica es importante en muchas situaciones del quehacer matemático, no debería consumir la mayor parte del tiempo de los cursos de álgebra, como es tradición. Es importante que los estudiantes logren entender ideas y

conceptos, y desarrollar paulatinamente procesos de generalización y simbolización (Guerrero, Morales, & Nuñez, 2014).

### **Marco Teórico**

La investigación se sustenta en la teoría de representaciones de Duval (1993), así como en investigaciones previas sobre las interpretaciones que los estudiantes asignan al uso de las literales en matemáticas (Morales & Díaz, 2003).

Duval (1993) hace énfasis en que el conocimiento matemático, se puede representar bajo diferentes formas semióticas y sostiene que un objetivo en la enseñanza de las matemáticas, debe ser que los estudiantes desarrollen habilidades para cambiar de un registro a otro, en cualquier representación semiótica. Una escritura, una notación, un símbolo, representa un objeto matemático: un número, una función, un vector,... , lo mismo, los trazos y las figuras representan objetos matemáticos: un segmento, un punto o un círculo. La distinción entre un objeto y su representación es, pues, un punto estratégico para la comprensión de las matemáticas.

Para Duval, las representaciones pueden ser de dos tipos: representaciones mentales y representaciones semióticas.

- Las representaciones mentales cubren al conjunto de imágenes y globalmente, a las concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre lo que les está asociado.
- Las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representaciones, el cual tiene sus propios constreñimientos de significancia y de funcionamiento. Se considera a las representaciones semióticas como un simple medio de exteriorización de las representaciones mentales para fines de comunicación, es decir, para volver visibles o accesibles a otros.

Debido a que se pretendió que los estudiantes trabajaran en forma colaborativa, se tomó en cuenta la metodología ACODESA, propuesta por Hitt (2013), que se basa en el enfoque individual y social en la construcción del conocimiento matemático.

La metodología ACODESA se integra de varias etapas interrelacionadas unas con otras: trabajo individual, trabajo en equipo, debate en el aula, auto-reflexión y la institucionalización; es importante señalar que en las primeras tres etapas, el maestro es un guía y es deber de los estudiantes argumentar y validar sus producciones; en el proceso de institucionalización es donde el maestro resalta la diferentes representaciones y presenta las representaciones institucionales.

### **Metodología**

La metodología a seguir en esta investigación es de carácter descriptivo que, como indica su propia denominación, tiene como objetivo la descripción de las cualidades de un fenómeno. No se trata de probar o de medir en qué grado una cierta cualidad se encuentra en un cierto acontecimiento dado, sino de distinguir y caracterizar tantas cualidades como sea posible.

Dentro de las características principales de esta metodología podemos mencionar que:

- a) Los investigadores participan en la investigación a través de la interacción con los sujetos que estudian, es el instrumento de medida.
- b) Se pueden incorporar hallazgos que no se habían previsto.
- c) Los investigadores deben dejar a un lado sus propios prejuicios y creencias y analizar a los sujetos y/o fenómenos desde la perspectiva de estos últimos.

De acuerdo con los objetivos de cada etapa de la investigación, fue necesaria la elaboración de diversos tipos de materiales:

- Actividades que involucren el concepto de variable (Cuaderno de trabajo).
- El software Geogebra instalado en un centro de cómputo.
- Un Diario de campo.

### **Experimentación**

Como parte inicial de la investigación, se pidió a los alumnos de manera individual que definieran el concepto de variable, incógnita y ecuación, con la finalidad de clasificar sus respuestas con relación al concepto de variable.

En el cuaderno de trabajo se integraron dos actividades; cada una de ellas conformada por una construcción manipulable en Geogebra y una serie de cuestionamientos asociados a dicha construcción. Las construcciones en Geogebra forman parte del conjunto de archivos incorporados en la plataforma del Proyecto Gauss (<http://recursostic.educacion.es/gauss/web/>) del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España, el cual brinda actividades didácticas en línea, como apoyo al aprendizaje de las matemáticas de diferentes niveles educativos en España (Primaria, ESO, Bachillerato).

En las figuras 1 y 2 se muestran dos ejemplos de las situaciones incluidas en el cuaderno de trabajo. La primera (Figura 1) se implementó para que el alumno reflexione sobre el uso de parámetros en las expresiones algebraicas, analizar y explorar dinámicamente el comportamiento de diferentes familias de funciones a través de la relación ecuación-gráfica, al hacer variar los parámetros en la expresión simbólica de dichas funciones.

En la segunda situación (Figura 2), el estudiante debía identificar la pendiente y la ordenada al origen de una recta, cuya ecuación es de la forma  $y = mx + b$ ; el objetivo es que el estudiante muestre su capacidad para hacer una conversión del registro gráfico al registro verbal, de acuerdo con la teoría de representaciones de Duval (1993).

En cada una de las actividades del cuaderno de trabajo se incluyeron instrucciones precisas para dar respuesta a los cuestionamientos pedidos.

En la actividad titulada “Variación de Coeficientes”, el tiempo disponible para contestar fue de 40 minutos y se necesitó de los siguientes materiales: Computadora o tableta con Geogebra instalado, archivo denominado “Actividad\_1.ggb”, y lapicero. En la figura 3 se muestran algunos cuestionamientos incluidos en esta primera actividad.

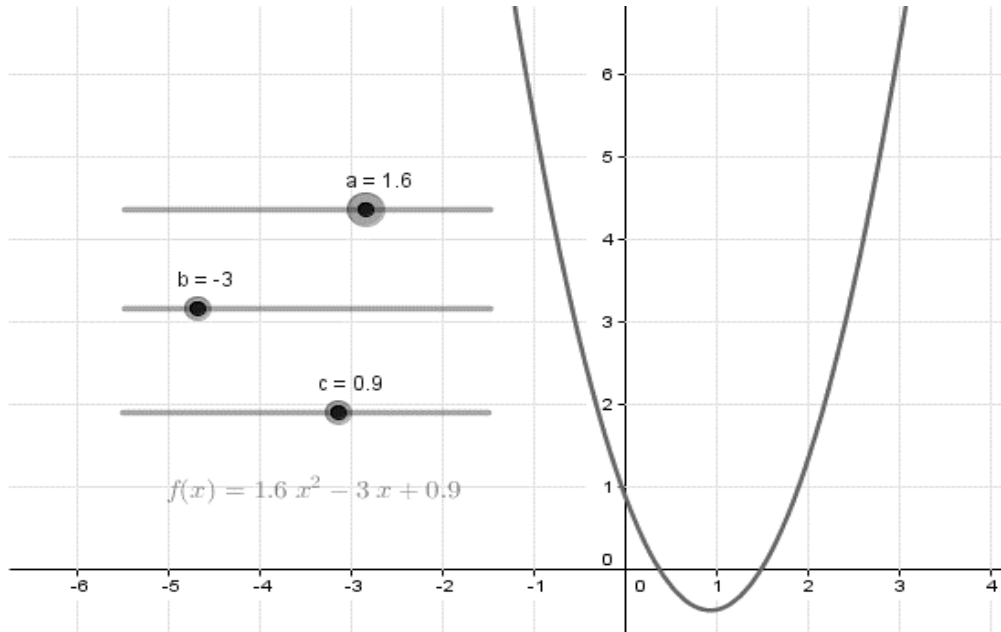


Figura 1. Provocar reflexión sobre el uso de los parámetros

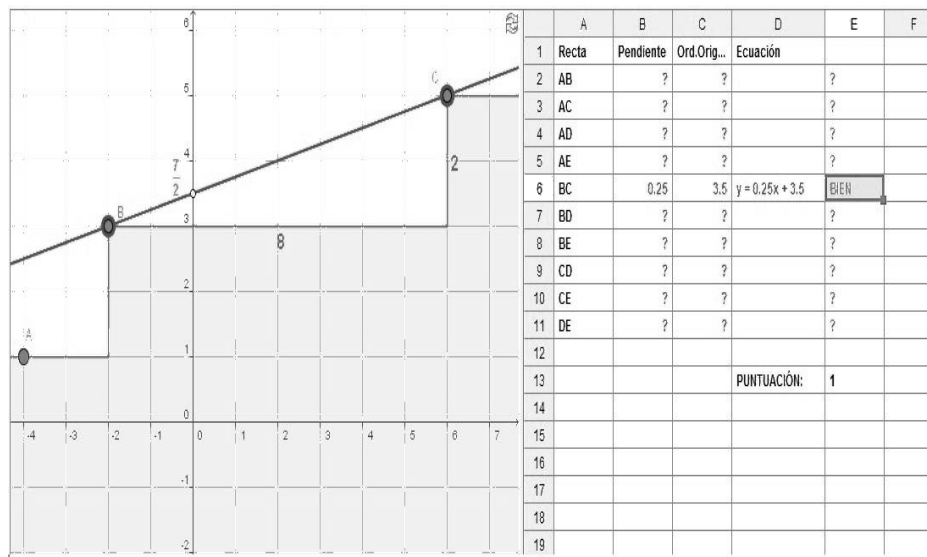


Figura 2. Conversión del registro gráfico al verbal

1. ¿Qué efecto produce en la gráfica, el variar el signo del coeficiente principal (a)?
2. ¿Qué efecto produce en la gráfica, el variar el valor de c?
3. ¿Qué efecto produce en la gráfica, el variar el valor de b?
4. Escriban en la barra de Entrada (casilla inferior de la ventana):  $f(x) = a \cdot (x - b)^2 + c$ . ¿Qué tipo de funciones son éstas?

Figura 3. Algunos de los reactivos que se incluyen en la actividad “Variación de Coeficiente”.

Para la segunda actividad, titulada “Pendiente y ordenada al origen en rectas”, se asignó un tiempo de 30 minutos. Los materiales propuestos fueron: computadora o tableta con Geogebra instalado, archivo denominado “Actividad\_4.ggb” y lapicero. En la figura 4 muestra una tabla que los estudiantes necesitaron llenar al manipular el archivo “Actividad\_4.ggb”.

Recta	Pendiente	Ordenada al origen	Ecuación
AB			
AC			
AD			
AE			
BC			
BD			
BE			
CD			
CE			
DE			

Figura 4: Tabla correspondiente a la actividad “Pendiente y ordenada al origen en rectas”

Sujetos y procedimiento en la Prueba piloto: Se aplicó a 32 estudiantes de entre 18 y 20 años de primer semestre de Ingeniería Civil, quienes cursaban la materia de Precálculo en el Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara. Para dar respuesta al cuaderno de trabajo, se formaron equipos de tres integrantes. Se utilizaron notas de observación (diario de campo) tomadas por un investigador.

### Resultados

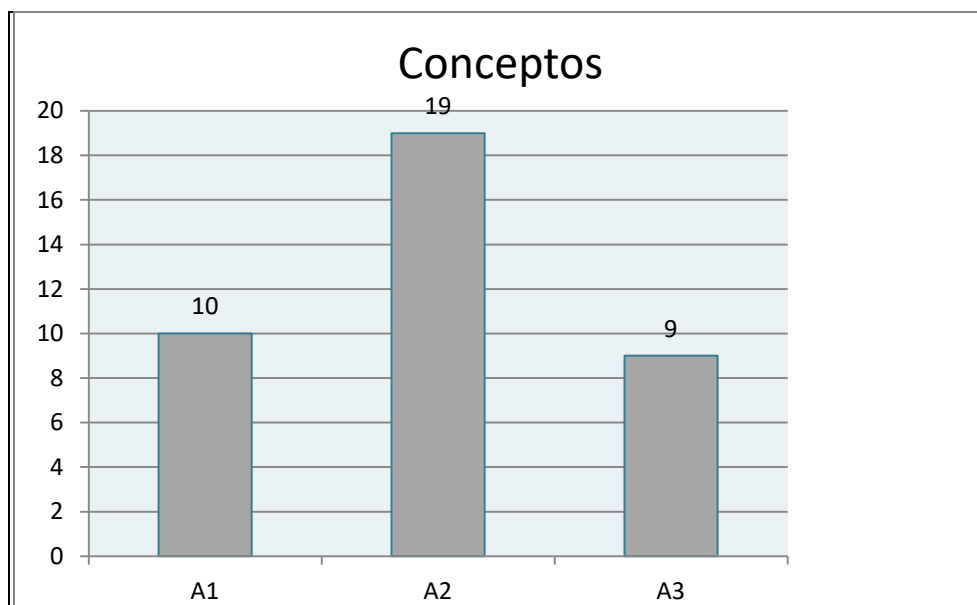
El análisis de los datos proporcionados por los estudiantes, nos llevó a los siguientes resultados. Primeramente en la gráfica 1 se presenta de forma general el registro de respuestas correctas de los estudiantes. Las etiquetas que se muestran en el eje horizontal corresponden a las preguntas:

A1: ¿Qué es una variable?

A2: ¿Qué es una incógnita?

A3: ¿Qué es una ecuación?

Para establecer hasta qué punto los estudiantes han alcanzado las metas educativas, se calificaron las respuestas de cada estudiante en torno a las preguntas anteriores. La gráfica 1 refleja la cantidad de alumnos que acertó a cada cuestión.



Gráfica 1: Registro de respuestas correctas de los estudiantes

Como se observa en la gráfica 1, más de la mitad de los estudiantes (22 de 32) presentaron dificultades en la pregunta A1 (¿Qué es una variable?); describir el concepto de variable resulta difícil interpretar.

Al referirse al concepto de incógnita, los estudiantes tienen una concepción más clara de dicho concepto, pues resulta que la mayoría de los estudiantes lo relaciona con un valor desconocido de una ecuación.

Las respuestas dadas por los estudiantes a estos cuestionamientos fueron clasificadas con el fin de detectar las dificultades e interpretaciones relacionadas con el concepto de variable. Dicha clasificación se muestra en la tabla 1.

Tabla 1: Clasificación de las respuestas de los estudiantes

Clasificación	Respuesta de los estudiantes
Cantidad no constante	Un valor que no es constante en una ecuación.
	Un dato que cambia y no es constante.
Término que varía	Es el valor que puede variar, puede ser cualquier valor la incógnita.
	Es una expresión que puede tomar valor elegido de un conjunto y cuya variación altera.
	Un símbolo o representación que puede cambiar.
	Algo que puede cambiar de valor.
Incógnita	Es un número con nuestra incógnita.
	Una incógnita o valor que depende enteramente de otra.
	Son resultados que pueden cambiar según el valor que tenga la incógnita.



	Es una incógnita representada por algún símbolo (casi siempre letras).
	Es el valor que queremos obtener mediante la resolución de la incógnita.
En una relación	Es el valor de un número que cambia en función en otro.
	El valor de un número que cambia en valor a otro.
Solución en una ecuación	Son posibles soluciones o valores que puede tener una ecuación.
	Es lo que no se tiene valor en una ecuación.
	El elemento que puede cambiar dentro de una ecuación.
	Es un dato en una ecuación que puede representar dos o más tipos de valores.
	Son los valores que pueden variar en una ecuación.
	Es un elemento de una ecuación de la cual se busca conocer su valor numérico.
	Un valor que puede variar respecto a su dependencia en la ecuación.
	Es el valor que cambia en una ecuación.
	Es el dato que cambia en una ecuación.

Con la hoja de trabajo “Variación de Coeficiente”, sirve para extraer información sobre la concepción que los estudiantes tienen acerca de variable y variable como parámetro, al analizar el comportamiento de los deslizadores implicado en cada familia de función.

Las figuras 5 y 6, las imágenes corresponden a una muestra del tipo de respuestas que dan los estudiantes de dos equipos:

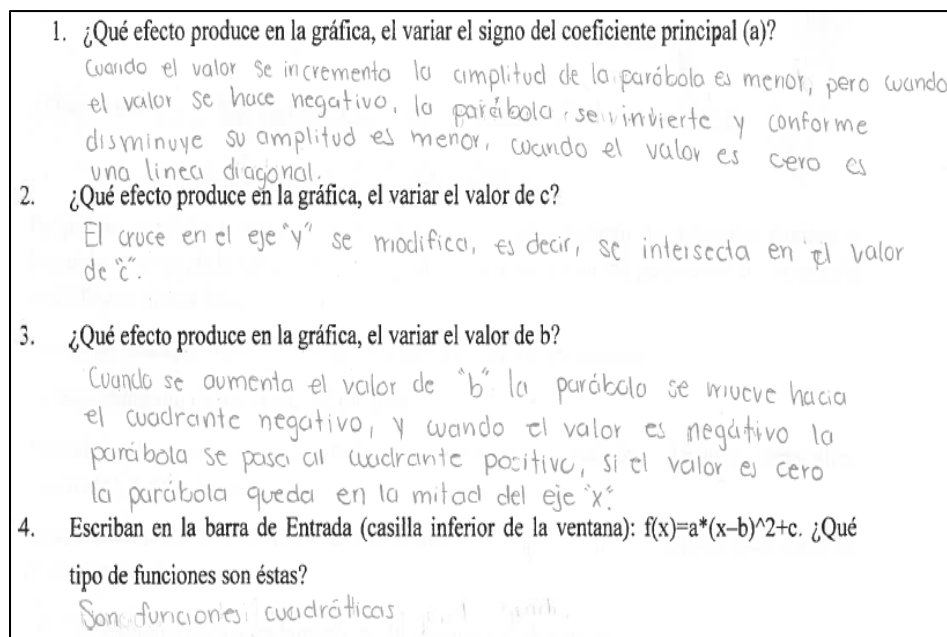


Figura 5. Respuesta de los reactivos de la hoja de trabajo “Variación de Coeficiente”

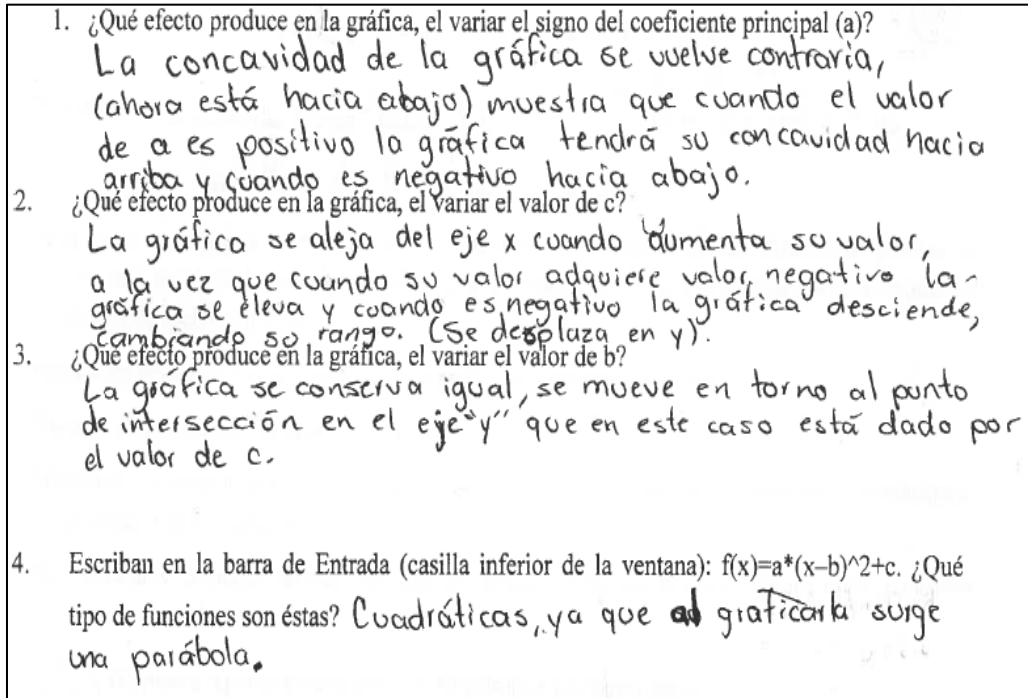


Figura 6. Respuesta de otro equipo al manipular el archivo "Actividad\_1.ggb"

Los resultados obtenidos al explorar la representación gráfica del comportamiento del conjunto de funciones, además de manipular los deslizadores del archivo "Actividad\_1.ggb" se reduce a que más de 50% de los estudiantes concluye:

*"al manipular el deslizador "a" el sentido de la parábola se invierte"*

*"el deslizador "b" cambia de posición, cambia de cuadrante positivo a negativo"*

*"para el deslizador "c" la parábola se expande o reduce"*

La dificultad de reconocer la relación de " $a, b$  y  $c$ " en la familia de funciones provocó confusión en los alumnos, ellos afirmaron que dichas letras siempre se escribe con un número y que se llama coeficiente (un número que acompaña a la " $x$ "). De los doce equipos solo tres lograron identificar la función de cada deslizador.

Al implementar la hoja de trabajo "Pendiente y ordenada al origen en rectas" con el objetivo de generar una reflexión sobre la importancia del uso de variable ligado al uso de variable como parámetro. Los integrantes de los equipos se mostraron motivados al llenar la tabla que se les pidió en la hoja de trabajo; ellos trabajaron con el archivo denominado "Actividad\_4.ggb", que consistió en la manipulación de rectas, que les permitían encontrar el valor de " $b$ " y de " $m$ ", para posteriormente escribir diez ecuaciones de cada recta y que la interacción con la computadora fuera más entretenido.

La siguiente imagen (figura 7) muestra la respuesta de un equipo en el llenado de la tabla.

Recta	Pendiente	Ordenada al origen	Ecuación
AB	1	5	$y = x + 5$
AC	0.4	2.6	$y = 0.4x + 2.6$
AD	-0.5	-1	$y = -0.5x - 1$
AE	-1	-3	$y = -x - 3$
BC	0.25	3.5	$y = 0.25x + 3.5$
BD	-1	1	$y = -x + 1$
BE	-2	-1	$y = -2x - 1$
CD	4	-19	$y = 4x - 19$
CE	2.5	-10	$y = 2.5x - 10$
DE	-1	-7	$y = x - 7$

Figura 7. Resultado de un equipo de la hoja de trabajo “Pendiente y ordenada al origen”

### Conclusiones

Uno de los resultados generales, muestra una tendencia generalizada de los estudiantes al interpretar a la variable como una incógnita. Así mismo, varios estudiantes se refieren a la variable como una letra, que muestra una confusión entre el concepto y su representación en el sentido de Duval (1993).

Para las hojas de trabajo y con la implementación del Geogebra, los alumnos mostraron motivación al contestar la hoja de trabajo. Sin embargo, aún persiste el bloque del uso de variable como parámetro, la implementación de letras como “*a, b, c, m, x*” significa una barrera para ser interpretado como variable, pero se rescata que la interacción con la tecnología, es una herramienta que ayuda a mejorar las representaciones semióticas de los estudiantes.

En comparación con otras investigaciones se concluye que los alumnos de nivel superior presentan dificultades en la interpretación del concepto de variable, similares al de estudiantes de bachillerato.

### Referencias Bibliográficas

- Booth, L. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. Windsor, UK: NFER-Nelson.
- Devlin, K. (2000). *The Language of Mathematics. Making the Invisible Visible*. NY: W.H. Freeman and Company,
- Duval R. (1993). Registros de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives* Vol. 5, pp. 37-65. Traducción: Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En: Hitt, F. (Editor) *Investigaciones en Matemática Educativa II*. Ed. Iberoamérica. México.
- Guerrero, M., Morales, O. & Nuñez, P. (2014). Una vía de acceso a la variación mediante el número generalizado con el software expresser. *AMIUTEM*, pp. 21-34.

- Hitt, F. (2013). *Aprendizaje de las matemáticas en ambientes de colaboración y resolución de problemas y de situaciones problemas*. Quebec, Canadá: UQAM, Département de Mathématiques.
- Juárez, J. A. (2011). Dificultades en la interpretación del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria: un análisis mediante el modelo 3UV. *Revista Números*, Vol.76. Marzo de 2011, pp 83-103.
- Kaput, J. (1999). Teaching and Learning a New Algebra. In E. Fennema, y T.A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding*, pp. 133-155, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kieran, C; Boileau, A. & Garancon, M. (1996). Introducing Algebra by means of a Technology-Supported, Functional Approach. En: N. Bednarz, *et. al.* (Eds.) *Approaches to Algebra*, pp. 257-293. The Netherlands: Kluwer Academic Publisher.
- Küchemann, D. (1981). Algebra. En K.M. Hart (Ed.). *Children's Understanding of Mathematics*, pp. 102-119. London: John Murray.
- Morales, L., & Díaz, J. (2003). Concepto de Variable: Dificultades de su uso a nivel universitario. *Memorias de la XVII Semana de Investigación y Docencia en Matemáticas*. UNISON. Obtenido de <http://semana.mat.uson.mx/MemoriasXVII>
- Trigueros, M., Ursini, S. & Lozano, D. (2000). La conceptualización de la variable en la enseñanza media. *Educación matemática*. Vol. 12, No. 2, pp. 27-48.