

## EL USO DE SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN EN LA FORMACIÓN INICIAL DE MAESTROS DE PRIMARIA

Carmen G. Aguayo-Arriagada – Pablo Flores Martínez – Antonio Moreno Verdejo  
[carmenaguayo@correo.ugr.es](mailto:carmenaguayo@correo.ugr.es) – [pflores@ugr.es](mailto:pflores@ugr.es) – [amverdejo@ugr.es](mailto:amverdejo@ugr.es)  
CONICYT, Chile; Universidad de Granada, España

Núcleo temático: Formación del profesorado en matemática

Modalidad: CB

Nivel educativo: Educación básica primaria

Palabras clave: Formación inicial, sistemas de representación, división, análisis de contenido

### Resumen

*Con el objeto de indagar en el desarrollo del conocimiento de futuros maestros de primaria, en esta comunicación presentamos el análisis de las producciones que se realizaron en el curso “Diseño y desarrollo del currículo de Matemáticas en la Educación primaria”, de tercer año del grado de Educación Primaria de la Universidad de Granada. Nos enfocamos en ver los diferentes sistemas de representación que fueron planteados al hacer el análisis de contenido del tema matemático, división. Para luego analizar la coherencia de este con la Unidad Didáctica realizada al final del curso, como también con lo planteado en los libros de textos. Esta triangulación (análisis de contenido – unidad didáctica – libros de textos) nos interesa, porque nos ayuda a entender cómo los futuros maestros ponen en juego, en su planificación lo adquirido durante la instrucción. Entre las conclusiones, queremos destacar el énfasis de los futuros maestros, al investigar sobre los diferentes sistemas de representación, en el análisis de contenido siendo este más completo que lo presentado en los libros de textos.*

### Introducción

La formación de profesores de matemática es una línea de investigación en Educación Matemáticas, que profundiza, como uno de sus intereses en cómo aprenden a ser profesores. En esta comunicación nos centramos en comprender cómo aprenden didáctica de las matemáticas los futuros maestros de primaria.

Para dar respuesta tenemos que arrancar de examinar los programas de formación. Diferentes investigaciones (Blanco, 2002; Rico, Gómez y Cañadas, 2011) han revisado cómo se ha modificado el currículo en la formación inicial para maestros de primaria, específicamente para las matemáticas. También diferentes grupos de investigación han propuesto modelos para formar a futuros maestros de primaria en didáctica de las matemáticas. En este trabajo

tomaremos como referente al grupo de investigación “Didáctica de la matemática. Pensamiento numérico” (PNA), de la Universidad de Granada, que en los últimos años ha trabajado un modelo de formación en el grado de primaria, basado en el Análisis Didáctico, pretendiendo un desarrollo funcional del conocimiento del contenido matemático escolar y del conocimiento didáctico de las matemáticas escolares (Rico, 2015).

En Rico, Lupiáñez y Molina (2013) se señala que el Análisis Didáctico es una herramienta que facilita profundizar en: 1) el significado del contenido matemático escolar específico (análisis de contenido), 2) el conocimiento de aspectos cognitivos de los alumnos (análisis cognitivo), 3) la planificación de unidades didácticas (análisis de instrucción) y, 4) finalmente su evaluación (análisis evaluativo).

En este trabajo nos situamos en el programa de formación inicial del Grado de Primaria de la Universidad de Granada, en la asignatura “Diseño y desarrollo del currículo de matemática en la Educación Primaria”, que se imparte en el tercer año, y que utiliza el Análisis Didáctico. Particularizamos al análisis de contenido, específicamente al organizador "sistemas de representación", referido al contenido matemático división, durante la planificación de su unidad didáctica (análisis de instrucción).

La elección de estos tópicos tienen estrecha relación. La división es una de las cuatro operaciones básicas que se introducen en primaria, y diferentes investigaciones (Castro, 2008) reconocen la dificultad de su proceso de enseñanza y aprendizaje, por lo que es importante y necesario trabajar con diferentes sistemas de representación para aportar una mayor comprensión del concepto y de su procedimiento (Rico, 2009).

Los libros de textos son uno de los materiales que más influyen en la enseñanza de las matemáticas en Primaria, y desde luego, los revisan los futuros maestros para el desarrollo de sus producciones durante su formación. En un trabajo realizado anteriormente (Aguayo-Arriagada, Piñeiro y Flores, en prensa), analizamos cómo se recogen los sistemas de representación sobre la división en los libros de texto.

Enmarcado dentro de este escenario nos planteamos analizar la coherencia que existe entre el análisis de contenido que realizan los estudiantes, su unidad didáctica y los libros de textos, ya que esta triangulación aporta información relevante que nos ayuda a comprender cómo los futuros maestros ponen en juego el conocimiento adquirido en la instrucción, con lo que estaremos entendiendo mejor su aprendizaje.

## Referentes Teóricos

Dentro de las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas, un tema de interés ha sido la formación inicial de los maestros de primaria. Las investigaciones en esta línea apuntan, por una parte al conocimiento y competencias que deben tener los futuros maestros de primaria (Rico, 2015), y a cómo van aprendiendo este conocimiento en la formación inicial. Centrados en esto último debemos situar el programa de formación para maestros de primaria. Rico, Gómez y Cañadas (2011) hacen una revisión de los programas en España entre los años 1991 y 2010, concluyendo que es necesario dar más énfasis en la formación inicial sobre didáctica de la matemática y sobre matemáticas escolares.

Diferentes autores han realizado propuestas de formación, Socas (2011) propone tres sistemas de actividades básicas: Organizar el contenido matemático para enseñarlo, analizar e interpretar las producciones matemáticas de los alumnos y saber gestionar el contenido matemático en el aula. Por su parte Llinares (2004) y su grupo de investigación de la Universidad de Alicante, proponen entornos de aprendizaje basados en las evidencias de la práctica de clase de Primaria, para que los futuros maestros aprendan a ver, interpretar, escuchar, y diseñar (Llinares, 2004). En la Universidad de Granada, el grupo de investigación Pensamiento Numérico (en el que se enmarca este trabajo), usan el Análisis Didáctico (AD) para que los futuros maestros comprendan los conceptos matemáticos, y se familiaricen con resultados de investigaciones en Didáctica de la Matemática, para profundizar sobre la enseñanza y aprendizaje de dichos contenidos y puedan diseñar unidades didácticas para ello (Flores, 2013).

Esta visión funcional de la formación inicial de futuros maestros en Educación Matemática, se lleva a cabo con el AD, herramienta que deriva de los trabajos de Rico (1997a, 1997b), a partir de organizadores del currículo. Aunque el AD contempla el análisis de contenido, cognitivo, de instrucción y evaluativo, en este trabajo nos centramos en el análisis de contenido de la división, que contempla la profundización en su estructura conceptual, en su fenomenología y en los sistemas de representación. Hemos focalizado la atención sobre este último, ya que relacionamos la dificultad del proceso de enseñanza y aprendizaje de la división, con la idea de que una enseñanza basada en la comprensión tiene que utilizar y relacionar diferentes sistemas de representación.

Lupiáñez (2016) destaca cuatro sistemas de representación de un contenido aritmético: simbólico, verbal, gráfico y físico.

El sistema de representación simbólico se refiere a los sistemas estructurados de grafismos que se usan para expresar los números y sus operaciones. El sistema de representación verbal explicita los términos y la sintaxis con que expresamos verbalmente números, operaciones, relaciones y prioridades. El sistema de representación gráfico aparece al representar la cantidad y relaciones mediante imágenes gráficas, como los números en la recta numérica, patrones y configuraciones puntuales en dos y tres dimensiones, u organizaciones visuales, como las tablas numéricas. El sistema de representación físico se plasma, en la aritmética, en recursos y materiales manipulativos que representan cantidades y permiten realizar acciones. El ábaco, las Regletas o los Bloques Multibase permiten representar y operar con números naturales, mostrando sus relaciones estructurales (op.cit. 127-128).

### **Metodología y Resultados**

Este trabajo analiza el curso desarrollado el año académico 2015–2016, en el que los estudiantes trabajaron en grupos de cuatro personas, 6 de ellos trabajaron con la división, aunque cada grupo tenía un nivel educativo, entre 2º y 5º de Primaria, que según el currículo es donde se desarrolla dicho contenido matemático.

Se analizaron los sistemas de representación aparecidos en dos trabajos: 1) En el listado que aparecen en el análisis de contenido y 2) En la unidad didáctica, los sistemas que aparecían en las tareas matemáticas escolares diseñadas para las diferentes sesiones de clase.

En la tabla 1 mostramos el resumen de los sistemas de representación que planteaban los futuros maestros en el análisis de contenido.

*Tabla 1.*

Sistemas de representación en análisis de contenido

Grupos	Análisis de contenido
G1	Físico (Material Multibase MMB)
	Gráfico
	Simbólico
G2	Simbólico – verbal
	Gráfico
G3	Gráfico (discreto o de conjunto, lineal, de área)
	Físico (ábaco, regletas Cuissenaire, MMB)
G4	Gráfico (modelos lineales, configuraciones, puntual, modelo funcional)
	Simbólico (verbal, modelo numérico, algoritmo)

	Gráfico (discreto o conjunto, lineal, área)
G5	Simbólico
	Físico (multibase)
	Físico
G6	Gráfico (modelos lineales, cardinales, medida)
	Simbólico (verbal, numéricos, razón aritmética, funcionales)

Podemos observar que 4 de los 6 grupos hacen mención al sistema de representación físico, de los cuales 3 de ellos especifican material educativo que sirve para trabajar el concepto de división. El sistema de representación gráfico está presente en la totalidad de los grupos, pero 4 de ellos especifican diferentes modelos, coincidiendo el lineal, de área y discreto. En cuanto al sistema de representación simbólico 5 de los 6 grupos lo exponen, 2 grupos detallan modelos. La mitad de los grupos hace mención al sistema de representación verbal. Apreciamos que la mayoría de los grupos presenta gran riqueza de sistemas de representación dentro del análisis de contenido.

En la figura 1 mostramos un ejemplo del grupo 5, aludiendo al sistema de representación gráfico:

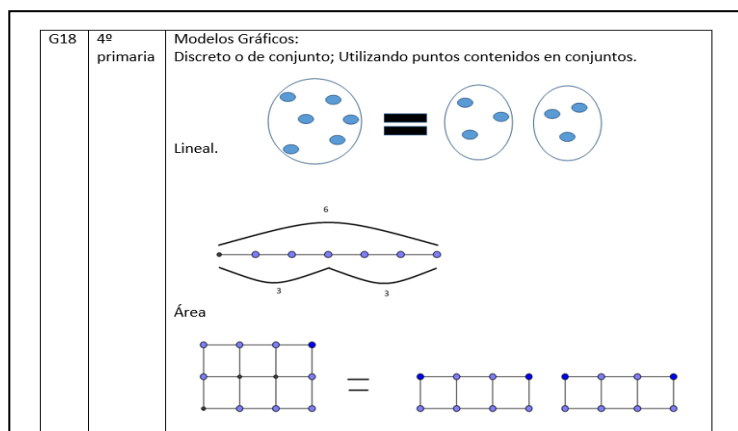


Figura 1. Sistema de representación gráfico, grupo 5

En las unidades didácticas revisamos todas las sesiones. Los grupos planificaron entre 6 y 8 sesiones con diferentes actividades, en la tabla 2 mostramos un resumen de los sistemas de representación que se trabajan en la resolución de las tareas planteadas.

Tabla 2.

Sistemas de representación en las unidades didácticas

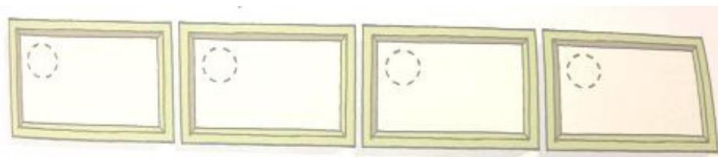
Grupos	Sistemas de representación
G1	Físico: canicas, garbanzos, pajitas, frutas, material multibase Gráfico: fichas de trabajo

G2	Físico: Cubos Multilink, regletas, MMB Gráfico: fichas de trabajo
G3	Físico: Caja Mackinder, MMB, material manipulativo Gráfico: fichas de trabajo Simbólico: fichas de trabajo
G4	Físico: material concreto, ábaco, Regletas Gráfico: fichas de trabajo Simbólico: fichas de trabajo
G5	Físico: ábaco Gráfico: fichas de trabajo Simbólico: fichas de trabajo
G6	Físico: MMB Gráfico: fichas de trabajo Simbólico: fichas de trabajo (método ABN)

La totalidad de los grupos propone trabajar con el sistema de representación físico, sobre todo en las primeras sesiones. Llama la atención que los grupos 5 y 6 solamente utilizan un tipo de material concreto, lo que atribuimos a que le dan más importancia al sistema de representación simbólico, por corresponder a cursos avanzados de Primaria (4° y 5°), en los que se da más énfasis al algoritmo de la división. Los 6 grupos trabajan con el sistema de representación gráfico. Las fichas de trabajo (que todos los grupos proponen), presentan problemas y pide a los alumnos representar gráficamente, o bien se les da una representación para que ellos trabajen con estas. La figura 2 presenta un ejemplo del grupo 2.

3. Dibuja el reparto en partes iguales y completa.

Reparte 20 pelotas en 4 cajas.



En cada caja hay \_\_\_\_ pelotas.

Figura 2. Sistema de representación gráfico, grupo 2

El sistema de representación simbólico lo utilizan en sus planificaciones 4 de los 6 grupos, a través de fichas de trabajo, en las cuales se enfatiza el algoritmo de la división, teniendo mayor presencia en los grupos 5 y 6, por ser los niveles educativos donde ya está afianzada la operación. Destaquemos que el grupo 6 propone el método ABN, para realizar la división.

En cambio los grupos 1 y 2 no trabajan con este sistema de representación, por corresponderles el nivel (2º de primaria) en el que se introduce el concepto de división. A pesar de que en el análisis de contenido 3 grupos aluden al sistema de representación verbal, en la unidad didáctica no lo trabaja ningún grupo.

La tercera revisión que hicimos fue a los libros de textos, de la editorial SM proyecto Savia de Andalucía, en cada uno de los niveles de los grupos (2º, 3º, 4º y 5º de Primaria). La tabla 3 muestra los sistemas de representación que aparecen en cada uno.

*Tabla 3.*

Sistemas de representación en libros de textos

Nivel educativo	Sistemas de representación
2º	Gráfico, físico, simbólico
3º	Unidad 5: Gráfico, físico, simbólico Unidad 6: Simbólico, gráfico, físico
4º	Simbólico, gráfico
5º	Simbólico

Los libros de textos de los dos primeros niveles trabajan con los tres sistemas de representación, pero hay mayor presencia del gráfico, dejando el uso de material concreto (sistema de representación físico) como un taller, y no aparece de manera constante durante toda la unidad. En 3º de Primaria, que es donde se introduce el algoritmo de la división, su unidad 6 comienza con el sistema de representación simbólico, y se repite en los dos niveles educativos posteriores. Es decir, cuando se empieza a trabajar con el algoritmo los libros de textos enfatizan dicho sistema de representación. Así también podemos observar que se van dejando de lado los sistemas de representación gráfico y físico en cuanto se avanza se nivel.

### **Conclusiones**

Al analizar los elementos descritos (Análisis de Contenido, Unidad Didáctica y libros de textos), llegamos a las siguientes consideraciones finales:

Destacar el nivel de profundización y riqueza de representaciones que los futuros maestros desarrollan en el Análisis de Contenido (AC), lo que muestra una preocupación por adquirir nuevos conocimientos, a través de la revisión de diferentes fuentes de información. Al comparar el AC con la Unidades Didácticas (UD) planificadas, vemos que en las UD el uso de sistemas de representación es más pobre o tradicional que lo planteado en el AC.

Apreciamos que los futuros maestros muestran un mayor abanico de conocimientos que el reflejado en su planificación, lo que les permitirá enfrentar situaciones en su labor docente. Nos percatamos que existe relación entre la UD y los libros de textos escolares, mostrando que es evidente la influencia de estos en la planificación de los futuros maestros. Es similar la secuencia en el uso de sistemas de representación en los distintos niveles educativos. Es de destacar el avance de los dos primeros grupos, que, a pesar que el texto de 2º de Primaria enfatiza el sistema de representación gráfico, proponen trabajar con el sistema de representación físico, situación que se repite en el resto de los grupos en las primeras sesiones, lo que nos hace apreciar el esfuerzo por parte de los futuros maestros por mejorar y aportar en el proceso de enseñanza y aprendizaje del contenido matemático de la división. Como menciona Flores (2016), las decisiones sobre selección de textos, su organización y sus contenidos, con intención de mejorar el proceso de enseñanza, es una tarea compleja, pero en vista de los resultados de este trabajo y haciendo la triangulación (Análisis de Contenido, Unidad Didáctica y Libros de Texto), consideramos que el proceso que llevan a cabo estos futuros maestros muestra una conexión entre los conocimientos adquiridos en su formación y lo reflejan en la planificación de UD. Este trabajo da algunas ideas sobre cómo aprenden conocimiento profesional (Rico, 2015) los maestros de Primaria, mostrando que es un proceso complejo y que necesariamente tiene que haber relación entre los componentes del conocimiento del contenido matemático escolar y el conocimiento didáctico de las matemáticas escolares, apuntando a su funcionalidad.

### **Referencias bibliográficas**

- Aguayo-Arriagada, C. G., Piñeiro, J. L. y Flores, P. (en prensa). *La introducción a la división en educación primaria. Un análisis comparativo*. En Actas del XVI Congreso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Jerez de la Frontera, España: SAEM THALES.
- Blanco, L. (2002). Educación matemática y formación inicial del profesorado de Primaria, Secundaria y Bachillerato. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 43, 173-179.
- Castro, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII*. (pp. 113-140). Badajoz, España: SEIEM.
- Flores, P. (2013). *¿Por qué multiplicar en cruz? Formación inicial de profesores de Primaria, en el área de Matemáticas*. En SEMUR (Ed.), *Actas VII CIBEM*. Montevideo: Autor. Recuperado de: [http://www.cibem.org/extensos/47\\_1375090358\\_flores\\_multiplicar\\_en\\_cruz.pdf](http://www.cibem.org/extensos/47_1375090358_flores_multiplicar_en_cruz.pdf)



- Flores, P. (2016). Textos para el currículo de matemáticas. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 119-136). Madrid, España: Pirámide.
- Lupiáñez, J. L. (2016). Sistemas de representación. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria*, (pp. 119-136). Madrid, España: Pirámide.
- Llinares, S. (2004). La generación y uso de instrumentos para la práctica de enseñar matemáticas en la Educación Primaria. *UNO*, 36, 93-115.
- Rico, L. (1997a). *Educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona, España: Horsori.
- Rico, L. (1997b). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid, España: Síntesis.
- Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, 4(1), 1-14.
- Rico, L. (2015). Matemáticas escolares y conocimiento didáctico. En P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria*, (pp. 21-40). Madrid, España: Pirámide.
- Rico, L., Gómez, P. y Cañadas, M. C. (2014). Formación inicial en educación matemática de los maestros de primaria en España, 1991-2010. *Revista de Educación*, 363, 35-59.
- Socas, M. M. (2011). Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas en Educación Primaria. Buenas prácticas. *Educatio siglo XXI*, 29(2), 199-224.
- Rico, L, Lupiáñez, J. L. y Molina, M. (Eds.) (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. Granada, España: Comares.