CB-799

PENSAMENTO MATEMÁTICO ELEMENTAR *VERSUS* PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO: UMA ANÁLISE DE ESBOÇOS GRÁFICOS DE FUNÇÕES EM CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Karly Alvarenga Barbosa - Carolina Ferreira
karlyalvarenga@gmail.com – carolinaferrera13@gmail.com
Universidade Federal de Goiás - Brasil

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.
Modalidade: Comunicación Breve
Nível educativo: Terciario o Bachillerato (16 a 18 años)
Palavras-chave: Gráficos, Pensamento Matemático, Cálculo Diferencial e Integral

Resumo

Este trabalho indica alguns tipos de Pensamento Matemático Elementar (PME) e alguns Avançados (PMA) emergidos da análise de 180 avaliações de Cálculo Diferencial e Integral que estão relacionados aos esboços gráficos de funções. As respostas dos estudantes foram categorizadas e colocadas em tipos painéis para serem analisadas em conjunto. Utilizamos principalmente as ideias de PME e PMA apresentas por Harel e Swoder (2005). Como resultados observamos que os indivíduos que somente marcam pontos para traçarem gráficos apresentam estar desenvolvendo um PME e tudo indica que os que esboçam empregando as ideias de limite, continuidade e derivada estão utilizando um PMA. São discutidos ao final alguns tipos de atividades didáticas que podem ajudar os estudantes a melhorarem seus tipos de pensamentos matemáticos.

Introdução

O objetivo principal desse trabalho é indicar alguns tipos de Pensamento Matemático Elementar (PME) e Avançado (PMA) que os estudantes de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) apresentaram, em relação aos esboços gráficos de funções, em suas avaliações, realizadas ao longo do segundo semestre de 2016 em uma universidade pública brasileira. Para completar apresentamos também um método de organização de dados que nos propiciou visualizações holísticas e interrelações das respostas.

Se discutimos e identificamos alguns processos do pensamento matemático (PM) podemos ajudar os nossos alunos a avançar nas construções deles e assim é possível que eles tenham mais sucesso em matemática, por meio de ações didáticas direcionadas e específicas para

ISBN 978-84-945722-3-4

esse fim. Esperamos com isso auxiliar os professores a introduzir explicitamente tais ações em suas aulas.

Para Dreyfus (1991) o trabalho matemático usa muitos processos em uma curta sucessão, se não simultaneamente, e os deixa interagir de forma eficiente. Nosso objetivo, como docentes, pode ser também ajudar os estudantes a aproximarem seus pensamentos matemáticos o mais próximo possível ao da prática do especialista em matemática. Compreender os processos da matemática avançada e sua interação é um pré-requisito necessário para atingirmos esse objetivo.

Aporte teórico

Depois de algumas reflexões e trocas ideias com dois colegas, doutores em Geometria Diferencial, concluímos que os gráficos, de funções, no nosso caso, estão situados em uma área interdisciplinar dentro da própria matemática: aritmética, álgebra e geometria. Aritmética porque trata de entendimento de conjuntos numéricos e de suas operações, de ordenação dos números, de pares ordenados e as relações que os compõe. Álgebra porque envolve, não só, mas principalmente, as variáveis, suas dependências e independências, a ideia de generalização, de previsão de comportamento e, portanto, interpretações de padrões, representações e relações entre grandezas (que aliás, podemos até considerá-las no contexto aritmético). Abarca as manipulações operacionais e o próprio conceito de função em si. Geometria porque estão relacionados com a visualização, com o desenho, com a percepção da forma e do espaço, da proporcionalidade e, de medida.

Um indivíduo possivelmente está no processo de PME em relação aos traçados gráficos quando: normalmente só analisa os gráficos de forma ponto a ponto; muitas das vezes tem em mente somente as parábolas e as retas como possibilidades gráficas; não consegue unir variadas representações em um único sistema de coordenadas para compor o gráfico de uma função definida por partes; não consegue analisar as tangências, quando for o caso; não faz uso das ideias de limites, sejam arbitrariamente grandes ou arbitrariamente pequenos; não emprega graficamente as ideias de descontinuidades; traça corretamente as coordenadas, no caso retangulares; que une os pontos calculados preocupando ou não com a forma gráfica correta; não emprega proporcionalidade e ideias de distâncias nos eixos coordenados; traça

ISBN 978-84-945722-3-4

o gráfico de forma correta ou não, mas não é capaz de interpretar o seu esboço; não concatena a expressão funcional algébrica com a gráfica; não tem o hábito de checar o seu gráfico, dentre outras características. A palavra possivelmente foi usada porque o pensamento matemático pode variar de estudante para estudante e somente uma entrevista pode indicar com mais segurança o tipo de desenvolvimento. Na verdade, as características elencadas anteriormente em relação ao desenvolvimento do PME, podem ou não serem todas identificadas, ou somente uma ou algumas delas, em um mesmo indivíduo. Elas não querem dizer que o indivíduo comete só erros, mas sim também podem indicar que seu raciocínio ainda está incompleto ou imaturo em relação à um ente matemático.

Tanto o PMA quanto o Elementar pode ser interpretado segundo várias concepções, contudo nesse trabalho utilizaremos a apresentada por Harel e Sowder (2005) onde um PMA se estabelece quando a capacidade de superação de pelo menos um dos três obstáculos epistemológicos se estabelece (1- traços da própria história da matemática; 2- não é uma concepção ausente, ou uma falta de conhecimento; em vez disso, é um pedaço de conhecimento ou uma concepção que produz respostas que são válidas dentro de um contexto específico, mas gera respostas inválidas fora dele; 3- resiste tanto a contradições ocasionais quanto ao estabelecimento de novo conhecimento. A posse de um novo conhecimento não é suficiente para que o contraditório precedente desapareça). O nível de aquisição de uma forma de pensar por um indivíduo é determinado pela extensão para a qual o indivíduo superou esse(s) obstáculo(s). É importante frisar que o primeiro obstáculo é problemático, bem mais complexo de se estabelecer e de superar.

Para completar nossas ideias sobre PMA trazemos as de Tall (1995) que o valida como indo além do pensamento algorítmico, mecânico, visual-espacial, o qual pode ser qualificado como PME, e passa a verbal-dedutivo. Envolve a atribuição de significados a um objeto matemático, além da possibilidade de concebê-los em diferentes contextos de maneira pertinente, adequada a cada um deles. Relaciona-se da mesma forma à leitura simbólica, conexa à linguagem matemática, a não somente ao entendimento das demonstrações, mas à elaboração delas de maneira coerente e lógica e à compreensão da matemática como um tipo de sistema dedutivo.

ISBN 978-84-945722-3-4

Para Harel e Sowder (2005) é claro que algumas maneiras de pensar são falhas (por exemplo, confiar unicamente em dados empíricos, observações para justificar argumentos matemáticos, como na inferência comum que os alunos fazem: “Como $2(a+b)=2a+2b$ é válido então, $(a+b)^2=a^2+b^2$ também deve ser válido” embora outras inferências sejam boas- por exemplo, procurar soluções elegantes para problemas; generalizar ideias matemáticas). Mas, em que sentido a palavra “avançado” no "Pensamento Matemático Avançado implica "eficaz", "eficiente" ou "elegante"? É o pensamento matemático não avançado necessariamente falta ou falha? "Avançado" Implica que há também um "elementar". Se assim for, em que sentido é o "Pensamento Matemático" Elementar? Para o mesmo autor é extremamente difícil caracterizar essas propriedades, mesmo compartilhando uma compreensão intuitiva de seu significado, e é ainda mais difícil construir uma taxonomia que diferencia as propriedades do pensamento matemático. No entanto, é de suma importância caracterizar as qualidades do PM para transladá-lo então de objetivos cognitivos essenciais, isto é, objetivos que caracterizam um conteúdo matemático elementar para o subsequente sucesso da aprendizagem de um conteúdo matemático avançado. Mas qual é o conjunto completo desses modos de pensar? É uma definição de uma mera lista, ou tem uma estrutura subjacente e é guiado por um pequeno número princípios? Uma investigação sobre o pensamento matemático pode e deve responder a estas questões críticas.

Caracterizamos alguns PMEs e PMAs, mas podem surgir outras identificações até mesmo por meio de uma entrevista e essa é uma etapa que complementa uma investigação a respeito de como o sujeito pensa matematicamente.

Metodologia de Pesquisa

Nossa investigação é de cunho qualitativo com suporte numérico. É fruto da análise de 180 avaliações aplicadas no segundo semestre de 2016, em duas turmas (A e B) de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) da Universidade Federal de Goiás - Brasil, com 83 estudantes ao todo.

No início do semestre, foi aplicado um teste em uma dessas turmas para analisar os conhecimentos de matemática básica e ele foi o disparador para o refinamento de nosso

ISBN 978-84-945722-3-4

objeto de estudo, isto é, a análise de esboços gráficos, com o intuito de classificar os tipos de pensamentos matemáticos: elementar ou avançado.

Um primeiro teste aplicado em agosto de 2016 na turma B, continha 8 questões, envolvendo operações com frações, potenciação, radiciação, produtos notáveis, equações, inequações, área, perímetro e representação de pontos no plano cartesiano. 46 alunos participaram, e as questões foram classificadas em Aritmética, Geometria e Álgebra. Esse foi nosso primeiro contato com os registros matemáticos dos participantes.

Ao analisarmos as questões relacionadas à Geometria, notamos grande dificuldade pelos alunos, 70% deles não soube respondê-las. Aconteceram resultados parecidos (dificuldades em responder questões que envolviam geometria) em todas as provas, o que nos levou a terem um olhar mais atento a área de Geometria, em especial aos esboços gráficos. Vale observar que no início de nosso trabalho consideramos os gráficos como um ente puramente geométrico.

Os dados foram tabulados em painéis, segundo categorias específicas (erros mais comuns e diferentes, acertos mais interessantes, acertos e erros de interpretação, de linguagem, quantidade de erros e acertos de cada questão, quantidade de notas acima e abaixo de 5,7, e outras caracterizações) com o intuito de visualizá-los e analisá-los em conjunto. Ao todo foram 6 painéis que colocados juntos ou de dois a dois nos deu um retrato dos tipos de resoluções. (Fig. 1)

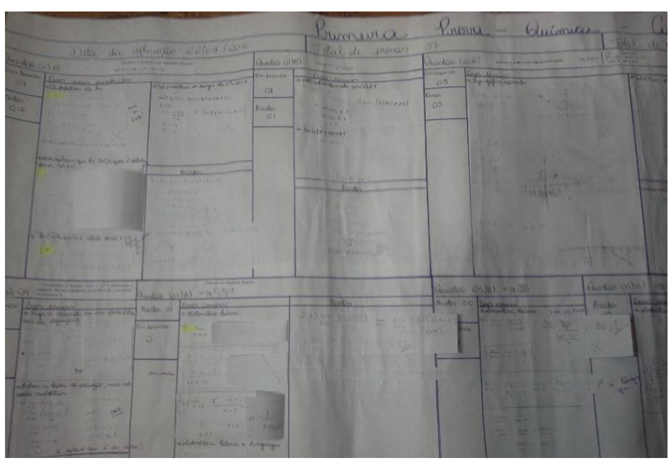

Figura 11: Um dos painéis com os tipos de resoluções de uma avaliação de CDI
Fonte: As autoras

ISBN 978-84-945722-3-4

Notamos ainda, ao examinar todas as notas, que as abaixo de 5,7 estavam em maior quantidade, em torno de 75% e isso pode indicar que o PME prevaleceu entre esses indivíduos, pois ainda não construíram pensamentos avançados que atendessem às necessidades matemáticas do nível de demanda de CDI.

Alguns Resultados

Ao analisarmos questões que envolviam ainda esboços gráficos, percebemos que a maioria dos alunos não apresentava um PMA, como por exemplo: ao traçar alguns gráficos, utilizavam só a atribuição de pontos e muitas vezes esboçavam parábolas para representar funções polinomiais de grau diferente a 2. Nesse contexto eles já conhecem os conteúdos de limites, continuidade e derivada, porém vários não conseguiam empregá-los para representar graficamente as funções.

A importância do gráfico não está somente no esboço, mas também nos elementos abarcados, e invisíveis para alguns alunos, de forma aritmética e algébrica também. O trabalho vem para detectar essas falhas de PM, que, em alguns casos, já deveriam ser Avançados desde o fim do Ensino Médio, mas que ainda são Elementares.

Neste trabalho apresentamos duas questões de diferentes avaliações para a análise dos tipos de pensamentos:

1- Esboce o gráfico da função:

$$f(x)=\begin{cases} -x, se\ x\leq 0 \\ x^2-2x,\ se\ 0<x<2. \\ -x+2,\ se\ x\geq 2 \end{cases}$$

Como podemos verificar na Fig. 2, o aluno separa cada parte do gráfico, como se fossem funções distintas, tentando esboçá-las em sistemas de coordenadas distintos. Também errou o esboço no intervalo $0<x<2$, devido à substituição de pontos na expressão que compõe $f(x)$, x^2-2x, e em seguida os marcam no plano cartesiano para uni-los e compor o esboço gráfico. Ele apresenta um Pensamento Matemático Elementar, o qual ainda pode se transformar em um PMA, desde que entenda que a função $f(x)$ é a união das três relações e ainda que utilize as ideias de mínimo da parábola dentre outros conceitos. Nem sempre o fato de somente atribuir pontos e compor os pares ordenados completa o traçado correto do gráfico.

ISBN 978-84-945722-3-4

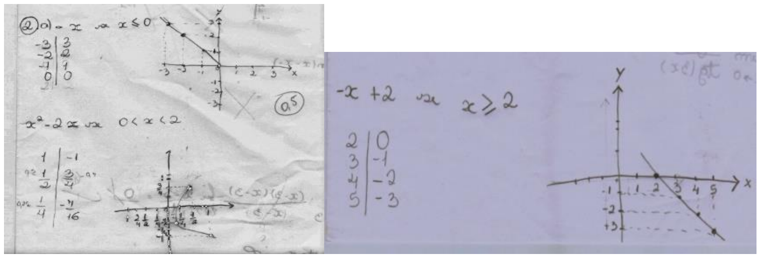

Figura 12: Registro escrito do aluno A1, referente à questão 2(a) da primeira prova da turma A. Indica que o aluno apresenta um PME.
Fonte: Protocolo do estudante

O sujeito da pesquisa, cujo protocolo é apresentado na Fig. 3, apresenta um PMA, pois foi capaz de concatenar as três expressões, inclusive calcular e esboçar o mínimo local da função $f(x)$. Observemos que ele não somente calculou alguns pares ordenados, mas completou suas ideias com outras de traçados de retas.

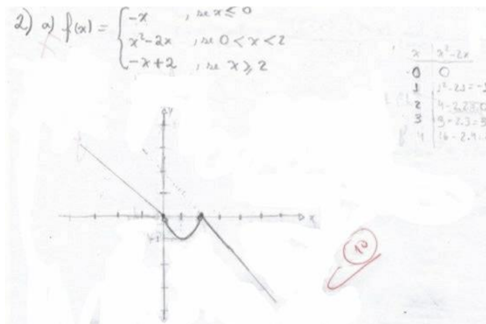

Figura 3: Registro escrito de um dos alunos, referente à questão 2(a) da primeira prova da turma A. Indica que o estudante apresenta um PMA. Fonte: Protocolo do estudante

2- *Dada a função* $f(x) = x^4 - 3x^3$ *, encontre o seu domínio, pontos de máximo e mínimo locais, de inflexão, região de crescimento e decrescimento, estude a sua concavidade e faça um esboço do seu gráfico, calculando para isso os limites necessários.*

A Fig 4 exibe um protocolo em que o estudante foi capaz de calcular corretamente região de crescimento e decrescimento, pontos de inflexões, limites arbitrariamente grandes e pontos críticos, porém não conseguiu concatenar todas essas informações para traçar o gráfico corretamente. Neste caso, ele indica ter um PME e estar próximo de desenvolver um PMA. Ele apresenta ter noções das aplicações de limite e derivada, consegue fazer os cálculos, mas ainda está preso à atribuição de pontos para o esboço. Tudo indica que indivíduo ainda não conseguiu superar os obstáculos epistemológicos indicados por Harel e Sowder (2005).

ISBN 978-84-945722-3-4

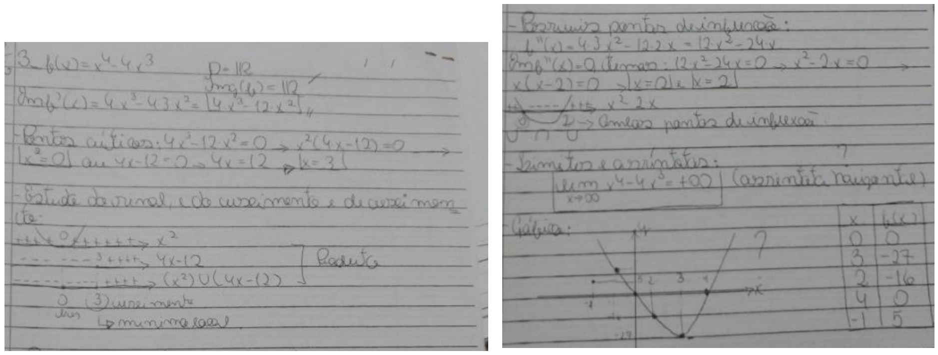

Figura 4: Registro escrito de um dos alunos, referente à questão 3 da terceira prova da turma B. Indica que o estudante apresenta um PME.
Fonte: Dados da pesquisa/Protocolo do estudante.

No protocolo da Fig. 5 temos um exemplo de um estudante que, da mesma forma que o outro, têm as ideias de limite e derivada, calcula os pontos críticos, regiões de crescimento e decrescimento e consegue concatená-los para o esboço correto. Logo, ele apresenta um PMA, pois supera os obstáculos epistemológicos 2 e 3 indicados por Harel e Sowder (2005). É possível dizer ainda que ele transladou então de propósitos cognitivos essenciais para o subsequente sucesso da aprendizagem de um conteúdo matemático avançado. Ele superou o mecanicismo e a forma algorítmica de agir, e foi capaz de utilizá-los coerentemente para esboçar o gráfico de $f(x)$.

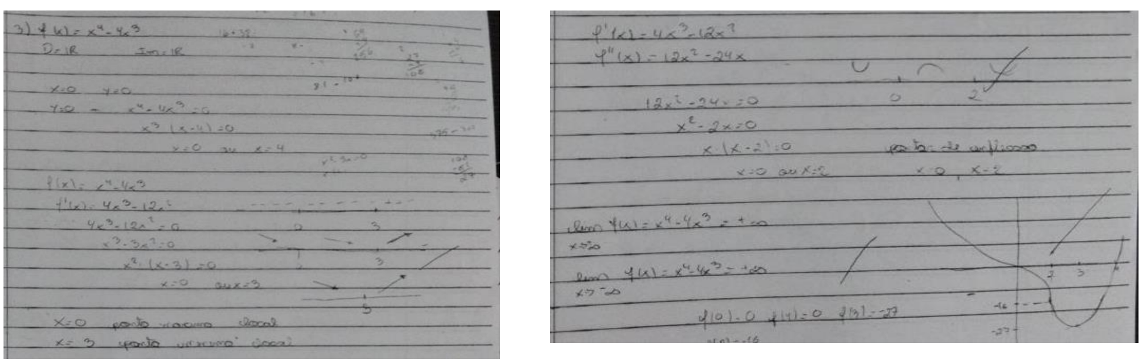

Figura 5: Registro escrito de um dos alunos, referente à questão 3 da terceira avaliação da turma B. O estudante apresenta um PMA.
Fonte: Dados da pesquisa/Protocolo de estudante

Dreyfus (2002) afirma que este tipo de pensamento consiste na interação entre vários processos, como os processos de representar, visualizar, generalizar, entre outros. Para o autor, não existe uma diferença nítida entre os processos envolvidos no PME e no PMA. Há assuntos da matemática elementar que podem ser tratados de forma avançada, assim como há pensamento elementar sobre temas avançados. O que distingue estes dois tipos de

ISBN 978-84-945722-3-4

pensamentos é a complexidade como são tratados, e gerenciados, tais processos presentes em cada um deles

Conclusões

Propor ações didáticas que saem do padrão do uso da letra f para função, x e y para variáveis, que iniciem com as interpretações gráfica que envolvam limites, de forma intuitiva, por exemplo interpretar expressões como: $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{b-1}$, $\sqrt{k+0{,}5}$, $\frac{1}{a^2}$, dentre outras que envolvam logaritmos, trigonometria, exponenciais, frações racionais e irracionais e analisá-las quando as variáveis se aproximam de descontinuidades, pode ajudar o estudante, em especial, do ensino médio, a desenvolver o PME e posteriormente o PMA, enfrentado etapas de registros escritos, de linguagem e uma análise verbal-dedutiva de entes matemáticos. Pode ajudar inclusive a superar os obstáculos 2 e 3, postos anteriormente.

Referências bibliográficas

Dreyfus, T. (2002). Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, D. **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer, p. 25-41.

Harel G. & Sowder L. (2005) Advanced Mathematical-Thinking at Any Age: Its Nature and Its Development. **Mathematical Thinking and Learning**, *7*(1), 27–50.

Tall D. (1995) Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In: MEIRA, L.; CARRAHER, D. (Ed.). **Proceedings of 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education**. Recife: UFPE, 1995. v. 1, p. 61-75.

ISBN 978-84-945722-3-4