CB-736

APRENDIZAGEM DA DEFINIÇÃO FORMAL DE LIMITE DE FUNÇÕES: ANÁLISE DA APLICAÇÃO DE UMA TAREFA EXPLORATÓRIA COM O GEOGEBRA.

Vilmar Fonseca – Ana Henriques
vilmar.fonseca@ifrj.edu.br – achenriques@ie.ulisboa.pt
Instituto Federal do Rio de Janeiro, Brasil – Universidade de Lisboa, Portugal.

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidade y niveles educativos.
Modalidade: CB
Nível educativo: 5. Formación y actualización docente

Palavras chave: Tarefas exploratórias, Geogebra, Definição formal de limite de funções.

Resumo
Nesta comunicação apresentamos os resultados de um estudo que visa compreender como os estudantes iniciantes de um curso de formação inicial de professores de Matemática, no Brasil, interpretam o limite de uma função num ponto, quando representado simbolicamente por sua definição formal ou geometricamente recorrendo a registos que envolvem a simbologia contida nesta definição. Discutimos, em particular, as aprendizagens destes estudantes que decorrem da realização de uma tarefa exploratória com recurso ao Geogebra, no decurso de uma experiência de ensino marcada por uma prática de ensino exploratório. Os dados, recolhidos através de gravação áudio e vídeo das aulas e das produções escritas dos estudantes na resolução da tarefa, evidenciam que, a partir da sua definição formal, eles reconheceram o conceito de limite e atribuíram-lhe diferentes significados. Além disso, a exploração do Geogebra facilitou o reconhecimento do limite, da existência de uma relação matemática entre δ e ε*, e do entendimento da relação implicativa das vizinhanças.*

Introdução

A investigação sobre o ensino e a aprendizagem do conceito de limite de funções tem mostrado as muitas dificuldades dos estudantes na aprendizagem da sua definição formal, constatadas, inclusive, na formação inicial de professores de matemática, onde se espera que os estudantes apresentem maior familiaridade com os conceitos matemáticos (Domingos, 2003). A compreensão deste conceito de limite é fundamental para que os estudantes avancem, no seu percurso escolar, para uma matemática mais formal e rigorosa (Cottrill et al, 1996) mas a prática comum de sala de aula, centrada na exposição de conteúdos pelo professor, tem ajudado a manter este quadro de dificuldades (Tall, Smith & Piez, 2008). Há,

ISBN 978-84-945722-3-4

por isso, necessidade de encontrar soluções didáticas que possibilitem aos estudantes ultrapassarem estas dificuldades e a alcançarem aprendizagem significativas.

O ensino do conceito de limite de funções, utilizando tarefas exploratórias com recurso a *software* educacional, como o Geogebra, tem proporcionado resultados muito positivos em relação às aprendizagens dos futuros professores sobre este conceito (Fonseca & Henriques, 2016; Messias, 2013). Assumindo este contexto como favorável, neste estudo procuramos compreender como os estudantes de um curso de formação inicial de professores de Matemática, no Brasil, interpretam o limite quando representado simbolicamente pela sua definição formal e geometricamente com registos baseados na simbologia desta definição, a partir de tarefas exploratórias com Geogebra.

O ensino e a aprendizagem da definição formal de limite.

A definição formal de limite é uma base fundamental para várias demonstrações no Cálculo e a sua riqueza no que respeita à notação simbólica pode contribuir para os estudantes desenvolverem a capacidade de pensar abstratamente e construir significados adequados sobre este conceito (Tall, Smith & Piez, 2008). Os significados que os estudantes atribuem a um conceito refletem os aspectos mobilizados da sua conceção sobre ele e, por isso, revelam as suas aprendizagens do conceito (Domingos, 2003). Neste sentido, um aluno que ao apresentar a definição formal do limite explica corretamente as simbologias $|x-x_0|<\delta$ e $|L-f(x)|<\varepsilon$ em termos das vizinhanças $V_\delta(x_0)$ e $V_\varepsilon(L)$, da correspondência implicativa entre elas $\left(x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)\right)$ e das ordens dos quantificadores δ e ε, concluindo que o limite é o resultado desta implicação (significado), segundo Domingos (2003), evidencia possuir uma conceção adequada da definição formal, necessária à compreensão do conceito de limite.

No entanto, a literatura tem evidenciado que os estudantes revelam muitas dificuldades na aprendizagem desta definição formal, nomeadamente: a incompreensão do uso dos quantificadores ε e δ ou da sua ordem na definição e do quantificador ε como um número diferente de zero, mas menor que qualquer número real positivo (Cottrill et al, 1996); e o não reconhecimento geométrico de $|L-f(x)|<\varepsilon$, uma vez que L é um valor fixo e $f(x)$ é uma grandeza variável (Tall, Smith & Piez, 2008). Para Cottrill et al (1996), estas dificuldades podem emergir da forma como estas formalizações são ensinadas aos alunos e

ISBN 978-84-945722-3-4

sugere que este ensino deve relacionar as noções informais do limite com a simbologia da sua definição formal. Isto significa, por exemplo, trabalhar a quantificação das aproximações $x \to x_0$ e $f(x) \to L$, em termos das vizinhanças $V_\delta(x_0)$ e $V_\varepsilon(L)$ representadas através de intervalos e desigualdades, bem como o significado dessas simbologias e do seu papel na expressão da definição formal. Também Tall, Smith & Piez (2008) sugerem que o ensino do conceito de limite deve considerar, entre outras abordagens, a construção de intuições adequadas, por meio da exploração de diversas representações que encaminhem os estudantes a futuras formalizações, recorrendo ao uso de tecnologia. Para os autores, o uso de representações numéricas, simbólicas e gráficas, articuladas com o uso de software educacional contribui para envolver os estudantes nas tarefas propostas e promover um sentido mais completo dos conceitos envolvidos, facilitando o entendimento de simbologias.

Ensino exploratório com recurso ao Geogebra

O ensino exploratório constitui uma prática de ensino com ênfase na realização de tarefas exploratórias, as quais visam promover, nos estudantes, a descoberta e a construção do conhecimento, cabendo ao professor apoiá-los e desafiá-los no processo de exploração, de forma que alcancem as aprendizagens proposta (Canavarro, 2011). Segundo a autora, este tipo de ensino permite aos estudantes mobilizarem conhecimentos prévios, realizarem inferências, formularem conjeturas testá-las, no intuito de buscar as aprendizagens pretendidas, possibilitando um processo simultâneo de ensino e aprendizagem, tanto individual (aluno) quanto coletivo (alunos e professor).

Ademais, o uso planeado e integrado de software educativo, como o Geogebra, no ensino exploratório do conceito de limite contribui positivamente para as aprendizagens dos alunos. De facto, e no que respeita aos conceitos de função e seu limite, os resultados dos estudos de Fonseca & Henriques (2016) e Messias (2013) mostram que o uso do Geogebra: i) auxiliou na dedução e demonstração de propriedades matemáticas de funções e limite de uma função; ii) facilitou a compreensão das noções intuitivas do limite por meio das aproximações $x \to x_0$ e $f(x) \to L$; e iii) auxiliou na criação de estratégias de resolução e justificação das tarefas.

Metodologia

ISBN 978-84-945722-3-4

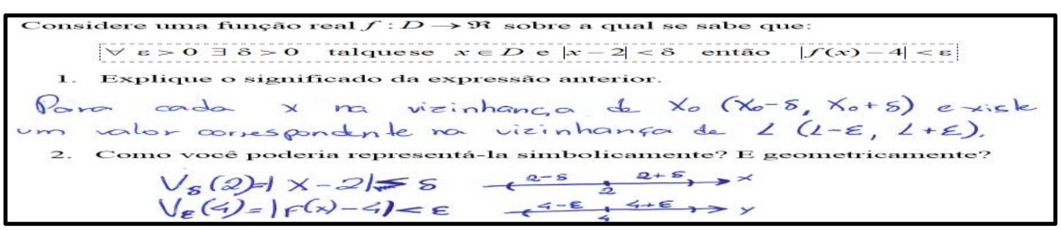
Este estudo segue uma abordagem qualitativa e interpretativa (Coutinho, 2011) e teve por base uma experiência de ensino exploratório com recurso ao Geogebra, que visava promover a aprendizagem do conceito de limite de uma função. Foi realizado no 1º semestre do ano letivo de 2016, com 19 estudantes de um curso de formação inicial de professores de matemática, no Brasil, identificados neste texto por nomes fictícios. O investigador, primeiro autor desta comunicação, assumiu o papel de professor da turma.

A tarefa que será foco de análise nesta comunicação (Anexo 1), envolvia a aprendizagem da definição formal de limite no ponto, e foi aplicada na 5ª aula da referida experiência de ensino. Nas aulas anteriores à sua aplicação, foram trabalhados com os estudantes: ***i***) as noções intuitivas do limite por meio de aproximações, ***ii***) o cálculo do limite por procedimentos algébricos e ***iii***) a significação das simbologias e do papel dos quantificadores δ e ε, da definição formal, desafiando-os a apresentar a definição de um limite por meio dessas simbologias. Sua aplicação ocorreu numa aula de 3h, dividida em quatro momentos: a apresentação da tarefa, sua realização de forma autónoma pelos estudantes (8 pares e 1 trio), a discussão coletiva das suas resoluções e a sistematização das aprendizagens pelo professor.

A recolha de dados incluiu a gravação áudio e vídeo da aula e as produções escritas dos estudantes na resolução da tarefa. A análise dos dados centrou-se nos significados do limite de uma função (Cottril et al, 1996; Domingos, 2003), que se constituem como objetivos de aprendizagem (Anexo 2), revelados pelos alunos quando o conceito está definido formalmente e geometricamente.

Resultados

Na primeira questão da tarefa, apenas o par Gil e Fátima não demonstrou ter reconhecido o limite, a partir de sua definição formal (Figura 1).


Considere uma função real $f: D \to \Re$ sobre a qual se sabe que:

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ talquese $x \in D$ e $|x-2| < \delta$ então $|f(x)-4| < \varepsilon$

1. Explique o significado da expressão anterior.

Para cada x na vizinhança de X_0 $(X_0-\delta, X_0+\delta)$ existe um valor correspondente na vizinhança de L $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

2. Como você poderia representá-la simbolicamente? E geometricamente?

$V_\delta(2) = |x-2| \leq \delta$

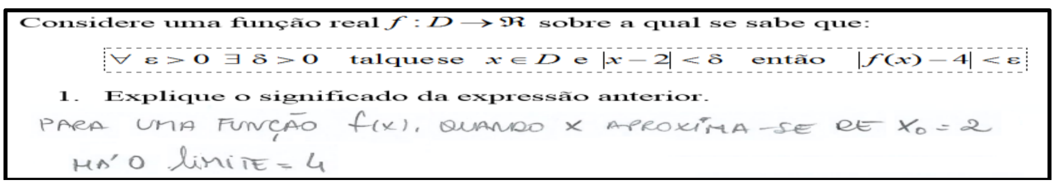
$V_\varepsilon(4) = |f(x)-4| < \varepsilon$

Figura 1: Resposta do par Gil e Fátima às questão 1 e 2 da tarefa.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

O registo da resposta à questão 1, evidencia que este par possuía uma noção do significado das simbologias $|x-2|<\delta$ e $|f(x)-4|<\varepsilon$, e da correspondência $x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$. No entanto, a falta de indicação dos valores de x_0 e L e da correspondência entre as vizinhanças $V_\delta(x_0)$ e $V_\varepsilon(L)$, através da relação entre seus raios, δ e ε, (questão 1) e de registos incorretos das representações simbólica e geométrica do limite (questão 2), revelam dificuldades no reconhecimento do limite.

Os demais oito grupos mostraram reconhecer o limite. Destes, três grupos apresentaram um significado do limite como resultado da aproximação ao objeto $(x \to x_0 \Rightarrow f(x) \to L)$, conforme é exemplificado pela resposta de Maria e Miriam (figura 2). O excerto da resposta apresentada por este par "*quando* x *aproxima-se de* $x_0 = 2$" revela uma conceção do limite como resultado de um processo de aproximação.



Considere uma função real $f: D \to \Re$ sobre a qual se sabe que:

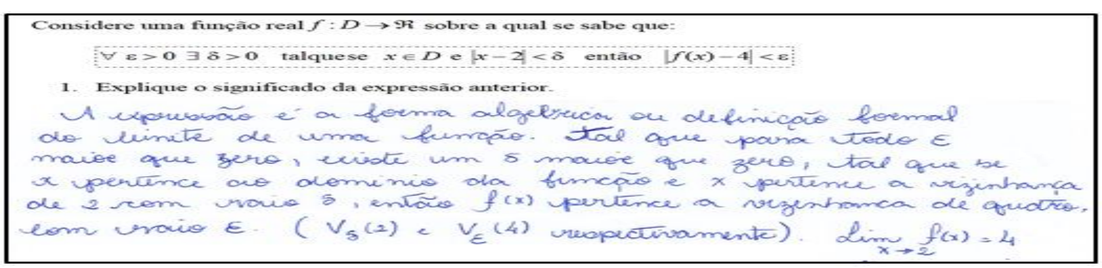
$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ talquese $x \in D$ e $|x-2| < \delta$ então $|f(x)-4| < \varepsilon$

1. Explique o significado da expressão anterior.

PARA UMA FUNÇÃO f(x), QUANDO x APROXIMA-SE DE $x_0 = 2$ HÁ O limite = 4

Figura 2: Resposta do par Maria e Miriam à questão 1 da tarefa.

Três grupos atribuíram significado ao limite, como resultado da correspondência implicativa baseada na noção de vizinhança $(x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L))$, como mostra a resposta de Miguel e Talita (figura 3). Este par reconheceu que a expressão apresentada era a definição formal do limite, apresentando uma explicação correta das simbologias $|x-2|<\delta$ e $|f(x)-4|<\varepsilon$, baseada na noção de vizinhança $(V_\delta(2)$ e $V_\varepsilon(4))$ relacionadas entre si, recorrendo a simbologia $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$ para justificar sua conclusão.



Considere uma função real $f: D \to \Re$ sobre a qual se sabe que:

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ talquese $x \in D$ e $|x-2| < \delta$ então $|f(x)-4| < \varepsilon$

1. Explique o significado da expressão anterior.

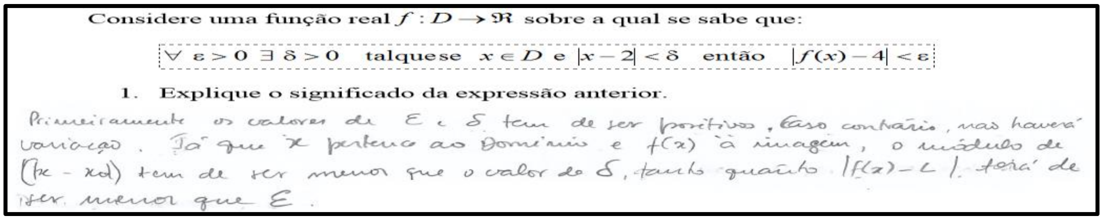
A expressão é a forma algébrica ou definição formal do limite de uma função. Tal que para todo ε maior que zero, existe um δ maior que zero, tal que se x pertence ao domínio da função e x pertence a vizinhança de 2 com raio δ, então f(x) pertence a vizinhança de quatro, com raio ε. ($V_\delta(2)$ e $V_\varepsilon(4)$ respectivamente). $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$

Figura 3: Resposta do par Miguel e Talita à questão 1 da tarefa.

Os outros dois grupos de estudantes apresentaram dificuldades em explicar o significado das simbologias da definição formal, mesmo tendo mostrado reconhecer nela o

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

limite. Tal como na resposta de Vitor e Eliseu (figura 4), eles apresentaram explicações indicativas de memorização, incompletas e até incoerentes, de algumas dessas simbologias.


Considere uma função real $f: D \to \Re$ sobre a qual se sabe que:

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ talquese $x \in D$ e $|x-2| < \delta$ então $|f(x)-4| < \varepsilon$

1. Explique o significado da expressão anterior.

Primeiramente os valores de ε e δ tem de ser positivos, caso contrário, não haverá variação. Já que x pertence ao Domínio e $f(x)$ à imagem, o módulo de $(x - x_0)$ tem de ser menor que o valor de δ, tanto quanto $|f(x) - L|$ terá de ser menor que ε.

Figura 4: Resposta do par Vitor e Eliseu à questão 1 da tarefa.

Os excertos “*os valores de* ε e δ *tem de ser positivos. Caso contrário não haverá variação”*, que revela uma explicação confusa da simbologia $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$, e “*o módulo de* $x - x_0$ *tem de ser menor que o valor de* δ *tanto quanto* $|f(x) - L|$ *terá de ser menor que* ε”, que sem associá-las com as vizinhanças $(V_\delta(2)$ e $V_\varepsilon(4))$, evidencia uma descrição verbal da leitura das simbologias $|x - x_0| < \delta$ e $\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$, permite-nos inferir ss dificuldades destes estudantes em interpretar as simbologias.

Sobre o reconhecimento do limite através da sua representação geométrica, cujos registos assentam-se nas simbologias contidas na definição formal, as respostas dos alunos às questões 1 a 3 da Parte II da tarefa, com recurso à *applet* do Geogebra, revelam que todos os grupos conseguiram alcançá-lo.

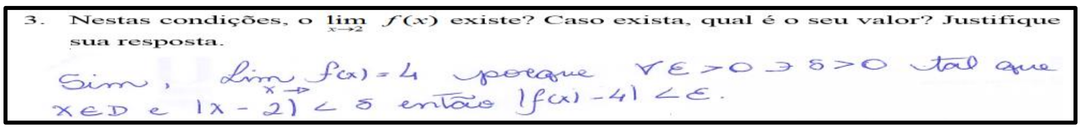
Quatro grupos apresentaram um significado do limite como resultado da aproximação ao objeto. Na resposta apresentada por Miriam e Fátima, “*Sim,* $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$. *Quando* x *<u>tende a</u> 2,* $f(x)$ *<u>tende a 4</u>*”, o termo “*tende a*” é usado para indicar as aproximações $x \to x_0 = 2$ e $f(x) \to L = 4$. Além disso, há evidências de que a visualização dinâmica dos comportamentos de $x \to 2$ e $f(x) \to 4$, produzidas por explorações na applet, tenha contribuído para o reforço da conceção do limite, como valor obtido mediante a aproximação de $f(x) \to 4$ à medida que $x \to 2$, como é possível confirmar num diálogo mantido por este par e o professor, na resolução da tarefa.

Miriam: Pronto! Arrastei o x. Ele está dentro da vizinhança de 2.
Prof.: E a imagem dele (x)?
Miriam: Também fica dentro da vizinhança, de 4. (Visualiza $f(x) \in V_\varepsilon(4)$ na applet)
Prof.: Isso vai acontecer para cada valor x nessa vizinhança (indicando na applet a vizinhança de $x_0 = 2$)?

ISBN 978-84-945722-3-4

Fátima: Sim. Ah! As imagens estão ali dentro (indicando na applet a $V_\varepsilon(4)$)
Miriam: Isso que eu queria falar, as <u>imagens se aproximam de 4</u>. Ok.

Três grupos de alunos apresentaram um significado do limite como igualdade dos limites laterais, como é possível verificar na resposta do par Claudio e Pedro: "*Sim, 4. Como os limites bilaterais são iguais, logo,* $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ *existe*". Por fim, dois grupos de estudantes apresentaram um significado do limite como resultado da correspondência $x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$, exemplificado pela resposta do par Miguel e Talita (figura 5), que recorre à escrita correta da definição formal do limite, para justificar sua existência.


3. Nestas condições, o $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existe? Caso exista, qual é o seu valor? Justifique sua resposta.

Sim, $\lim\limits_{x\to} f(x) = 4$ porque $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tal que $x \in D$ e $|x - 2| < \delta$ então $|f(x) - 4| < \varepsilon$.

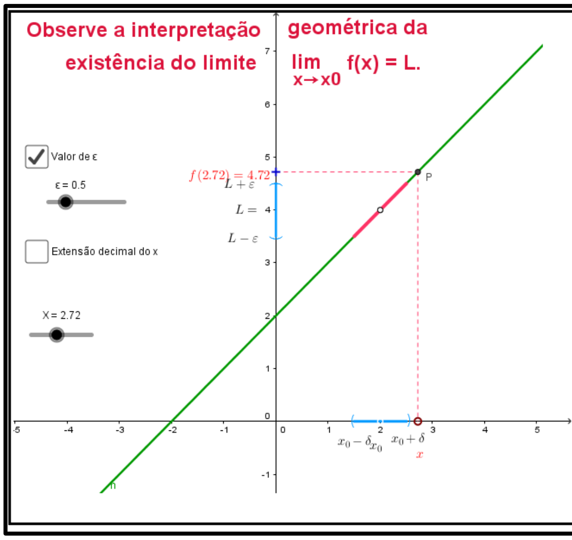
Figura 5: Resposta do par Miguel e Talita à questão 3 da tarefa.

A resposta deste par parece indicar a reescrita da expressão do enunciado da questão 1. No entanto, um diálogo entre estes estudantes na resolução da tarefa, indica que, as aprendizagens por eles alcançadas da definição formal e a recordação de algumas orientações do professor na tarefa anterior, contribuíram para esta escrita.

Miguel: Acho que a justificativa da 3 é: por que o limite quando x tende a x_0 pela esquerda é igual ao limite quando x tende a x_0 pela direita. Entendeu?
Talita: Entendi. É por que ele (professor) falou que agora quer esse tipo de justificativa (apresentando a escrita da definição formal do limite). Na aula passada eu respondi um negócio de se aproxima …. Ele não quer mais. Ele quer que agente explique assim, desta forma algébrica. Existe limite pois … (lê a sua resposta). Vamos escrever?

O diálogo entre Miguel e Talita (figura 6), evidencia que a exploração do Geogebra, ajudou-os no reconhecimento do limite e na compreensão da relação matemática entre ε *e* δ e da correspondência implicativa $x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



Miguel: Vamos ver primeiro o que acontece quando está fora (modifica no aplet).

Talita: Coloca agora bem próximo, 2,01.

Miguel: Vamos modificar o valor de ε para ver se agente entende alguma coisa? (após analisar a applet). A medida que x se aproxima de 2 $f(x)$ se aproxima do limite 4.

Talita: Sim, quanto mais diminuir o valor de ε, a medida que x se aproxima de 2 os valores de $f(x)$ se aproximam do valor do limite (indicando na apllet). Agente pode afirmar também que eles são diretamente proporcionais. Se eu diminuo um (ε) o outro (δ) também diminui.

Miguel: Pode ser. Acho que ele quer que agente diga que existe uma proporção (referindo-se ao item da tarefa).

Talita: Isso mesmo! Que agente entenda. Ele quer vê se agente entendeu. Nessas condições existe o limite? (lendo a pergunta). Para mim sim, 4.

Miguel: O que você entende agora se ele (professor) perguntar para você explicar.

Talita: Aqui está querendo dizer que, tipo assim, eu vou chegar a uma certa aproximação, vou aproximar tanto – o valor de δ e o valor de ε são tão pequenos mais tão pequenos – que vai existir imagem $f(x)$ no ponto 2. Aqui $(V_\varepsilon(4))$ o intervalo é aberto. Eu não tenho que ter imagem! Mas vai se aproximar tanto que vai ter limite neste ponto. Entendeu?

Figura 6: Diálogo do par Miguel e Talita no momento da resolução da tarefa.

Neste diálogo, Miguel sugere a Talita que realize explorações na applet para buscar um esclarecimento sobre o comportamento da função. Através das explorações que realizou, Miguel conclui a existência do limite e seu valor. O mesmo acontece com Talita que, após realizar algumas explorações na applet, reconhece o limite como resultado do processo de aproximação das imagens $f(x)$ e consegue perceber que existe uma relação, de proporcionalidade, entre ε *e* δ. Ela explica que esta relação, faz com que as vizinhanças $(V_\delta(2)$ e $V_\varepsilon(4))$ estejam relacionadas entre si, e que, à medida que seus raios (ε e δ) se tornam tão pequenos, é possível garantir a existência do limite.

No momento da discussão coletiva, o professor esclareceu que a função apresentada na tarefa possuía ε e δ proporcionais. Todavia, nos casos em que não há uma relação de proporcionalidade, ε e δ precisam estar relacionados matematicamente a fim de que ocorra o limite, seja mediante uma relação algébrica ou não.

A concluir.

Os resultados indicam que, em geral, os estudantes reconheceram o limite da função, representado simbolicamente por sua definição formal e geometricamente com registos baseados nas simbologias desta definição, e atribuíram-lhe diferentes significados, nomeadamente, o limite como resultado da aproximação ao objeto, como igualdade dos limites laterais e como resultado da implicação $(x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L))$.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

As principais dificuldades constatadas, semelhantes às encontradas nos trabalhos de Domingos (2003) e Cottrill et al (1996), foram a incompreensão de simbologia na definição formal e da correspondência $x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$. É possível inferir que estas dificuldades contribuíram para que alguns grupos recorressem a argumentos baseados em aproximações ao invés de baseá-los nas ideias de vizinhanças, para justificar a existência do limite. No que respeita às contribuições do Geogebra para reconhecimento do limite, há evidências de ter: (i) facilitado o reconhecimento da relação matemática entre δ e ε, e da conceção do limite como resultado do processo de aproximação ao objeto; e (ii) ajudado na interpretação da relação implicativa $x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$. Além disso, as interações entre os estudantes, apoiada na exploração da *applet* do Geogebra, parece ter conduzido às aprendizagens já descritas, bem como ao desenvolvimento da sua capacidade de argumentação/justificação.

Os resultados sugerem que a exploração de tarefas com o Geogebra, num contexto de ensino exploratório, contribui para que os estudantes desenvolvam aprendizagens e construam significados de limite conducentes à sua formalização.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil. Os autores agradecem ao Instituto Federal do Rio de Janeiro pelas contribuições para a realização desta pesquisa.

Referências

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, *115*, 11–17.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingerdorf, K., Thomas, K. e Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*(2), 167-192.

Coutinho, C. (2011). *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas: Teoria e Prática*. Coimbra: Almedina.

Domingos, A. (2003). *Compreensão de conceitos matemáticos avançados – A matemática no início do Superior* (Tese de Doutoramento,Universidade Nova de Lisboa, Portugal).

Fonseca, V., & Henriques, A. (2016). A aprendizagem do conceito de limite de funções com recurso a tarefas exploratórias e ao Geogebra. In A. P. Canavarro, A. Borralho, J. Brocardo & L. Santos, (Eds.), *Atas do Encontro em Investigação em Educação Matemática* (pp. 303-318). Évora: SPIEM.

ISBN 978-84-945722-3-4

Messias, M. (2013). *Um estudo exploratório sobre a imagem conceitual de estudantes universitários acerca do conceito de limite de função* (Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Pará, Brasil).

Tall, D., Smith, D., & Piez, C. (2008). Technology and Calculus. In M. K. Heid & G. M. Blume (Eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics* (Vol. I, pp. 207-258). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Anexo 1 - Tarefa

Parte I

Considere uma função real $f : D \to \Re$ sobre a qual se sabe que:

$$\boxed{\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 \quad \text{talque se} \quad x \in D \text{ e } |x-2| < \delta \quad \text{então} \quad |f(x)-4| < \varepsilon}$$

1. Explique o significado da expressão anterior.
2. Como você poderia representá-la simbolicamente? E geometricamente?

Parte II

Abra o arquivo “Deform”. Nesta cena está apresentado o gráfico da função f. Clique na caixinha “valor de ε” para exibir o seletor ε que corresponde aos valores de um número real positivo arbitrário, próximo de zero. Clique sobre ele e arraste-o para a direita e esquerda, aumentando e diminuindo-o.

Observe no cenário que, para cada valor de ε dado existe um número real correspondente δ, positivo e próximo de zero, de modo que o intervalo[5] $(2-\delta, 2+\delta)$ está relacionado com o intervalo[6] $(4-\varepsilon, 4+\varepsilon)$ pela função f. Além disso, diminuindo ou aumentando o valor de ε, o valor de δ também diminui ou aumenta, respectivamente. Experimente realizar algumas dessas modificações para ε. A seguir responda as questões 1), 2) e 3).

1. Faça x se aproximar de $x_0 = 2$, isto é, x pertencer ao intervalo $(2-\delta, 2+\delta)$. (em símbolos $V_\delta(2)$). O que acontece com os valores das imagens $f(x)$ quando os valores de $x \in V_\delta(2)$?

2. Experimente modificar o valor de ε, diminuindo-o. Para cada modificação de ε faça $x \in V_\delta(2)$. A medida que o valor de ε fica cada vez mais próximo de zero e os valores de $x \in V_\delta(2)$, o que acontece com as imagens $y = f(x)$?

---

[5] O intervalo $(2-\delta, 2+\delta)$ é chamada de vizinhança de $x_0 = 2$ (em símbolos $V_\delta(x_0)$).

[6] O intervalo $(4-\varepsilon, 4+\varepsilon)$ é chamada de vizinhança de $L = 4$, (em símbolos $V_\varepsilon(L)$).

ISBN 978-84-945722-3-4

3. Nestas condições, o $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe? Caso exista, qual é o seu valor? Justifique sua resposta.

4. Caso exista, este limite é alcançado (atingido) pela função f ? Justifique.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Anexo 2

Tabela 1. Quadro de análise dos objetivos de aprendizagem da definição formal de limite de funções num ponto (Cottrill et al, 1996; Domingos, 2003)

SIGNIFICADOS DE LIMITE	DESCRIÇÃO
Resultado da aproximação ao objeto	O limite como valor obtido mediante um processo de aproximação das imagens $f(x)$ ao limite, à medida que valores de abscissa x se aproximam de x_0, seja através de argumentos elucidativos e adequados, ou por meio de simbologias, como por exemplo $(x \to x_0 \Rightarrow f(x) \to L)$.
Resultado da correspondência implicativa, assente nas ideias de vizinhança	O limite como consequência de uma correspondência implicativa $(x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L))$, quaisquer que sejam os quantificadores ε e δ considerados. Seja através de argumentos elucidativos e adequados, ou por meio de simbologias.
Resultado da igualdade dos limites laterais	O limite como resultado da igualdade dos limites laterais em x_0, seja através de argumentos elucidativos e adequados, ou por meio de simbologias, como por exemplo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4