CB-722

TRAYECTORIAS HIPOTÉTICAS DE APRENDIZAJE PARA ENFRENTAR PROBLEMAS DE VARIACIÓN

Armando Hernández Solís – Rubén Elizondo Ramírez
armandhs@gmail.com – elizondocch@gmail.com
CINVESTAV-IPN, México – CINVESTAV-IPN, México

Modalidad: CB
Nivel educativo: Bachillerato
Núcleo temático: I. Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.
Palabras clave: Triángulo isósceles de área máxima, resolución de problemas, trayectorias hipotéticas de aprendizaje, tecnologías digitales.

Resumen

En este trabajo exponemos las actividades que desarrollamos con estudiantes de bachillerato enfrentados a un problema de variación; particularmente, el problema consiste en determinar las dimensiones de un triángulo isósceles de área máxima, manteniendo fijo su perímetro. Al inicio, los estudiantes exploran físicamente, usando un alambre de longitud fija, distintas dimensiones de triángulos comprobando que sus áreas varían. Luego, mostramos una simulación de la desigualdad del triángulo y hacemos otro acercamiento a la solución usando una hoja de cálculo. Después, guiamos la construcción dinámica del problema en GeoGebra y, finalmente, el planteamiento algebraico es llevado a cabo. Cada exploración permite tener distintas aproximaciones de la solución del problema. El objetivo de las actividades no es solamente que los estudiantes resuelvan el problema, sino también que den significado a los conceptos relacionados con su resolución a partir del uso de distintas representaciones. Para cada una de las representaciones propuestas, se diseña una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) lo cual, aunado a la resolución de problemas, forman parte de los elementos conceptuales de este trabajo.

Introducción

En este trabajo mostramos una serie de actividades relacionadas con el siguiente problema: *Dado un segmento de 12 unidades de longitud, ¿cuáles son las dimensiones del triángulo isósceles de perímetro 12 cuya área es máxima?* Para abordarlo, proponemos cinco secuencias de actividades, basadas en una interpretación libre del constructo “Trayectoria Hipotética de Aprendizaje” (THA) de Simon (1995).

En la primera THA, la exploración física, se pide a los participantes que, con un alambre de 12 unidades de longitud, construyan diez triángulos isósceles con diferentes dimensiones, registrando en una tabla las medidas de su base, altura y área. Con estos datos se plantean

ISBN 978-84-945722-3-4

diversas preguntas, entre ellas: ¿Es posible construir triángulos isósceles para cualquier medida de los lados? ¿Bajo qué condiciones, respecto de los lados, puede construirse? Esta última pregunta conduce a la segunda THA cuyo objetivo es entender la desigualdad del triángulo, apoyada con una simulación diseñada en GeoGebra. La tercera THA se enfoca en abordar el problema usando una representación tabular con una hoja de cálculo. En la cuarta THA se presenta una construcción dinámica, creada también en GeoGebra. La quinta THA está relacionada con la solución algebraica del problema.

Entre los objetivos de presentar distintos enfoques (el físico, con geometría dinámica, con hoja de cálculo y el algebraico) destacan los siguientes: abordar el problema a partir de distintas representaciones y, con ello, establecer condiciones y relaciones particulares del problema; además, generar, comprobar y/o refutar conjeturas; asimismo, complementar y reforzar los conceptos y significados matemáticos emergentes; y, por supuesto, resolver el problema. De esta forma, nos planteamos la siguiente pregunta: ¿Cómo se promueve la construcción de significados matemáticos al enfrentar un problema a través de diferentes representaciones?

Antecedentes

La propuesta que presentamos en este trabajo corresponde a una secuela de THA similares que hemos venido trabajando en distintos espacios, tanto con estudiantes como profesores. Originalmente, implementamos una serie de THA similar para resolver el problema en términos de un triángulo rectángulo de perímetro fijo de 12 unidades. Con el trabajo aquí presentado, pretendemos dar seguimiento a la ruta que hemos planteado para enfrentar algunos problemas de variación. Así mismo, otros antecedentes de este trabajo consisten en diversos reportes como los de Santos-Trigo (2012) y Santos-Trigo & Reyes-Rodríguez (2016) quienes proponen varios problemas que se resuelven de distintas maneras, incluyendo siempre la tecnología digital, usando diferentes representaciones. Además, Santos-Trigo & Moreno-Armella (2013) proponen un marco conceptual basado en la resolución de problemas y la tecnología digital. Esta tecnología brinda la oportunidad de presentar diferentes soluciones a las realizadas en lápiz y papel, estableciendo diversas conexiones y nuevos significados.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Elementos conceptuales

La propuesta de Simon (1995) para la enseñanza busca marcos que permiten reconstruir la pedagogía matemática, la cual involucra actividades de estudiantes y profesores. Dentro de las actividades que debe hacer el profesor está la de planeación y dentro de esta actividad se considera lo que se conoce como una *trayectoria hipotética de aprendizaje*. El término se usa para indicar el camino por el cual el aprendizaje puede conseguirse. Simon utiliza el término *hipotético* porque es un supuesto que el estudiante aprenderá de esa forma, lo cual solo se sabrá al aplicarla. Si no se aprendió, habrá que modificarla de modo que, nuevamente, toma el carácter de hipotética. Así, se estará en el ciclo de aprendizaje hasta que se obtenga una aplicación satisfactoria de ella.

Ahora bien, un modelo de aprendizaje que está estrechamente relacionado con este trabajo es el de *resolución de problemas*. La propuesta de Polya (1945) es una reflexión sobre su propia práctica y experiencia. Escribe acerca del proceso que se involucra en la resolución de problemas, en el cual una de sus metas es apoyar a los estudiantes de ciencias e ingeniería cuando se enfrentan a un problema matemático. Además, Polya discute el papel y la importancia del uso de los métodos heurísticos en la resolución de problemas. Posteriormente, Schoenfeld (1985) implementa un programa de investigación basado en las ideas de Polya con un objetivo importante: caracterizar lo que significa pensar matemáticamente y documentar cómo los estudiantes llegan a ser exitosos en la resolución de problemas. Como resultado, Schoenfeld propone un marco para explicar el comportamiento de los estudiantes en actividades de resolución de problemas. El objetivo no es solamente dar una respuesta o solución, sino identificar y contrastar diversas maneras de representar, explorar, resolver y extender el problema, logrando aplicar diversos conocimientos matemáticos y favoreciendo el entendimiento de conceptos y procesos involucrados. Así, más que centrar la discusión sobre lo que sería un problema, lo que interesa es que la actividad sea considerada por los estudiantes como un punto de inicio para identificar diversas relaciones matemáticas. La resolución de problemas es considerada por varios países un modelo importante para el estudio de matemáticas (Santos-Trigo, 2007; Santos-Trigo & Moreno, 2013).

El papel de las tecnologías digitales en la educación se puede analizar desde la *mediación instrumental*. Una de las características de los humanos es la construcción de herramientas,

ISBN 978-84-945722-3-4

las cuales, en principio, son amplificadoras de una actividad intencionada, ya sea física o cognitiva. Moreno-Armella & Sriraman (2005) distinguen una herramienta material de una simbólica. Por un lado, la herramienta material afecta la actividad humana (esta actividad es mediada por la herramienta). Por otro lado, la herramienta simbólica afecta el conocimiento, la cognición del individuo, de modo que la herramienta no sólo es amplificadora, sino reorganizadora de las ideas. Además para Moreno-Armella & Hegedus (2009), la herramienta no sólo es el objeto físico en sí mismo, sino es la encarnación de un propósito.

Las tecnologías digitales se han convertido en herramientas mediadoras para aprender, para educar, proporcionando nuevas formas de representación de un objeto matemático**,** representaciones digitales, que conllevan nuevas relaciones entre las representaciones ya existentes. Las representaciones digitales producen una sensación de existencia material y estas representaciones son *ejecutables*.

Sobre las THA diseñadas y la población participante

Con la intención de no ser repetitivos y describir nuevamente las THA implementadas, recordamos que estas fueron referidas en la Introducción de este trabajo. Sin embargo, es importante mencionar que dos cuestionarios más fueron aplicados, uno previo a la aplicación de las THA y otro posterior, con el fin de que los estudiantes abordaran abiertamente el problema y de recabar sus impresiones finales. La aplicación de las actividades se llevó a cabo en un aula de cómputo durante tres sesiones de dos horas cada una, guiadas por nosotros, en dos grupos de primer año de un bachillerato en la Ciudad de México. Los estudiantes formaron equipos de trabajo libremente de dos y tres integrantes, y sus edades eran de 15 y 16 años. La información de la etapa experimental fue recopilada en las hojas de trabajo de los estudiantes, de la cual describiremos algunos fragmentos en la siguiente sección.

Descripción de la información recopilada

Inicialmente pedimos a los estudiantes que intentaran resolver el problema abiertamente, teniendo a su alcance diversas herramientas como los alambres, GeoGebra y una hoja de cálculo. Entre las primeras aproximaciones que consiguieron los estudiantes destacamos la siguiente (Ver la Figura 1):

ISBN 978-84-945722-3-4

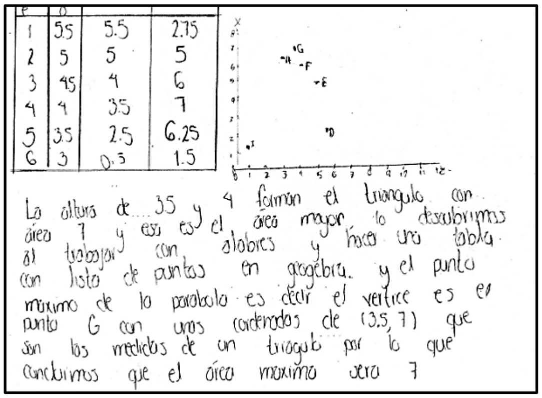

Figura 1. Una primera aproximación.

Base	Altura	Área
1	5.5	2.75
2	5	5
3	4.5	6.75
4	3.5	7
5	2.5	6.25
6	0.5	1.5
1.5	5.3	3.95
2.5	4.75	5.9
3.5	4	7
4.5	3.25	7.3

Figura 2. Las medidas en la tabla.

Los integrantes de este equipo narran que usaron los alambres y registraron sus medidas en la hoja de cálculo de GeoGebra para producir una lista de puntos. Sin embargo, refieren que estos puntos pertenecen a una parábola cuyo vértice, el punto de coordenadas $(3.5, 7)$, proporcionan las medidas del área máxima. A pesar de que dichos puntos no corresponden a una parábola, este equipo consigue una buena aproximación al inicio de las actividades.

Después del primer intento, comenzamos a guiar a los estudiantes con la primera THA en la cual formaron manualmente distintos triángulos isósceles y registraron sus medidas en una tabla. En la Figura 2 se muestra la tabla de uno de los equipos. A partir de la tabla se obtuvieron las primeras conjeturas sobre la solución del problema. Luego, recopilamos las medidas de todos los equipos para formar una “nube de puntos” en GeoGebra (Figura 3).

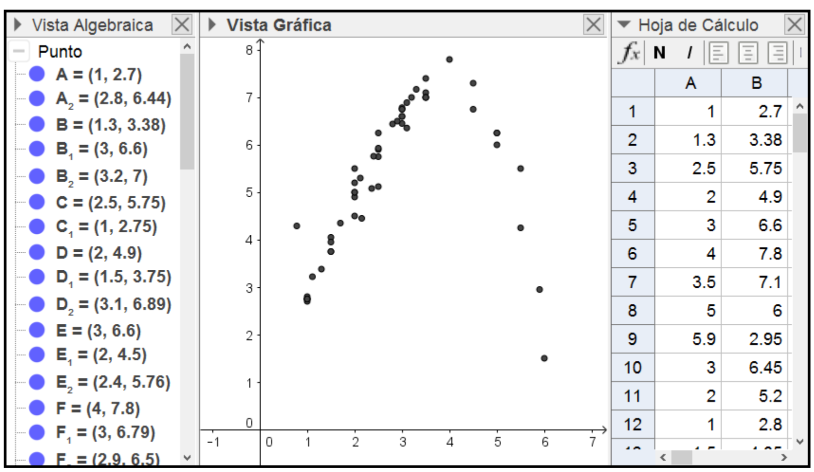

Figura 3. La nube de puntos.

Las primeras conjeturas generadas por los participantes iban reforzándose. Además, una observación importante que hicieron los estudiantes a partir del trabajo manual consistió en

ISBN 978-84-945722-3-4

darse cuenta de que no siempre era posible formar triángulos para medidas arbitrarias. Para reforzar esta observación, aplicamos la segunda THA en la que mostramos una simulación diseñada en GeoGebra, la cual condujo a los participantes a enunciar la desigualdad del triángulo. Cabe mencionar que esta simulación fue diseñada no solo para triángulos isósceles, sino para cualquier triángulo de perímetro 12.

Lado igual	Base	El otro lado igual	Altura	Perímetro	Área	Incremento
3.000000	6.000000	3.000000	0.000000	12.0000	0.000000000000	0.25
3.250000	5.500000	3.250000	1.732051	12.0000	4.763139720814	
3.500000	5.000000	3.500000	2.449490	12.0000	6.123724356958	
3.750000	4.500000	3.750000	3.000000	12.0000	6.750000000000	
4.000000	4.000000	4.000000	3.464102	12.0000	6.928203230276	
4.250000	3.500000	4.250000	3.872983	12.0000	6.777720855863	
4.500000	3.000000	4.500000	4.242641	12.0000	6.363961030679	
4.750000	2.500000	4.750000	4.582576	12.0000	5.728219618695	
5.000000	2.000000	5.000000	4.898979	12.0000	4.898979485566	
5.250000	1.500000	5.250000	5.196152	12.0000	3.897114317030	
5.500000	1.000000	5.500000	5.477226	12.0000	2.738612787526	

Figura 4. La hoja de cálculo.

En la tercera THA implementada los estudiantes vieron la hoja de cálculo proyectada en el aula de cómputo (Figura 4). Esta hoja de cálculo permite modificar el valor de los lados iguales del triángulo ubicado en la casilla señalada como “Incremento”. Al modificar este valor, se despliegan en automático los demás valores (base, altura, perímetro y área) indicándose con un color distinto el área máxima. Así, los estudiantes podían tener otro acercamiento a la solución y confirmar o refutar sus conjeturas previas. Prueba de ello es la siguiente respuesta dada por un equipo (Figura 5):

Todos los lados deben medir 4cm, la altura mediría
3.464102 cm y el área máxima sería de:6.9282032

Figura 5. Observaciones sobre la exploración del problema con la hoja de cálculo.

La cuarta THA consistió en que los estudiantes siguieran una serie de pasos para obtener la construcción dinámica en GeoGebra y parte de la función área modelada a partir de esta construcción (Figura 6). Al desplazar el punto móvil E sobre el segmento de 12 unidades, el triángulo isósceles varía y el punto P sobre la gráfica de la función área muestra el valor del área en términos de uno de los lados iguales del triángulo.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

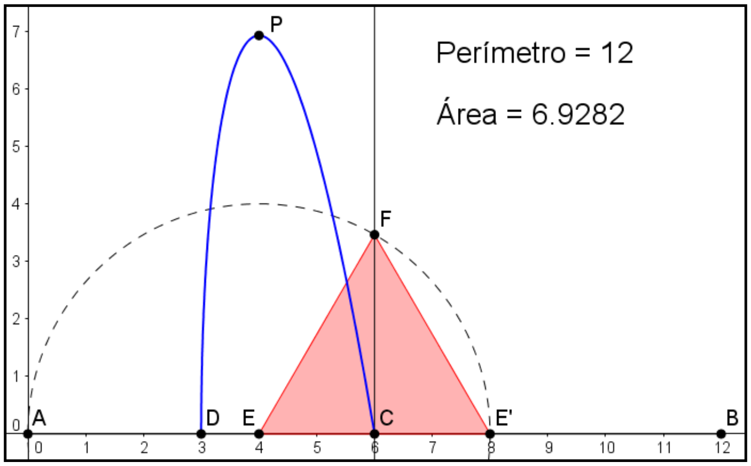

Figura 6. La construcción dinámica y la función área.

Cuando el punto móvil E yace sobre la coordenada $(4,0)$, se tiene el triángulo de lados $4, 4, 4$, y el punto P se ubica en la parte más alta sobre la gráfica de la función área. Con ello, los estudiantes reforzaron la conjetura de que el triángulo equilátero es el triángulo isósceles de área máxima. Con la intención de mostrar un ejemplo, mostramos la siguiente evidencia (Figura 7).

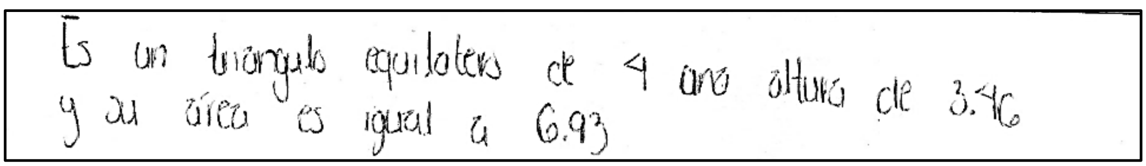

Figura 7. La conjetura se refuerza.

Una vez más, insistimos, las conjeturas se reforzaban y comenzaban a obtenerse conclusiones sólidas sobre la solución del problema. En la quinta THA mostramos a los estudiantes el desarrollo algebraico del problema obteniendo las soluciones exactas del problema, y les pedimos que produjeran algunos comentarios al respecto.

En el último cuestionario aplicado, los estudiantes dieron algunas de sus impresiones finales, entre ellas: identifican que un triángulo isósceles puede llegar a ser un triángulo equilátero, destacan la importancia de usar distintas representaciones para abordar el problema y muestran un agrado general por las actividades realizadas (Figura 8).

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

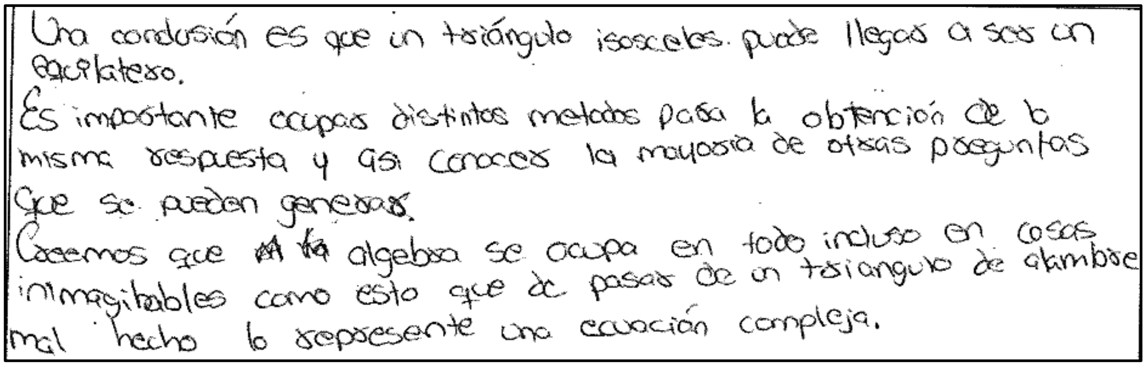
Una conclusión es que un triángulo isosceles puede llegar a ser un equilatero.
Es importante ocupar distintos metodos para la obtención de la misma respuesta y asi conocer la mayoria de otras preguntas que se pueden generar.
Creemos que ~~el la~~ algebra se ocupa en todo incluso en cosas inimaginables como esto que de pasar de un triangulo de alambre mal hecho lo represente una ecuación compleja.

Figura 8. Conclusiones de los estudiantes sobre las actividades realizadas.

Comentarios finales

Cada una de las representaciones juega un papel fundamental en el desarrollo y entendimiento de las actividades propuestas. La exploración física permite *manipular* el problema y, como los mismos estudiantes son quienes calculan las medidas, creemos que la manipulación física cobra un significado invaluable al facilitar el resto de las actividades que podrían parecer más abstractas; dicho de otro modo, pensamos que la manipulación conduce a que el problema sea más tangible. De manera similar, el realismo que GeoGebra le otorga a la construcción dinámica permite que esta representación no sea tan lejana para los estudiantes. Las representaciones dinámicas en GeoGebra y la hoja de cálculo en Excel son representaciones ejecutables y brindan a los estudiantes una respuesta inmediata que permite validar o refutar sus conjeturas. A pesar de las virtudes que conceden las representaciones digitales, pensamos que el desarrollo algebraico no debe dejarse de lado lo cual nos permite afirmar que *al establecer relaciones y conexiones entre las distintas representaciones, se promueve la construcción de significados matemáticos*.

Finalmente, nos parece importante mencionar que el diseño de las THA no siguió el mismo orden que se dio al implementarlas. El diseño de la hoja de cálculo es un ejemplo pues, para su elaboración, nos basamos en el desarrollo algebraico del problema. Sin embargo, consideramos que no es necesario que los estudiantes comprendan el diseño de la hoja de cálculo, o de cualquiera otra de las herramientas diseñadas, sino que entiendan su uso y que les sean útiles para abordar y resolver problemas. De este modo, reiteramos que una tarea cotidiana de los profesores de matemáticas debe ser el diseño de actividades, su implementación y, de ser el caso, su refinamiento.

ISBN 978-84-945722-3-4

Referencias bibliográficas

Moreno-Armella, L. and Sriraman, B. (2005). Structural stability and dynamic geometry: Some ideas on situated proofs. *International Reviews on Mathematical Education*, **37**(3), 130-139.

Moreno-Armella, L. and Hegedus, S. (2009). Co-action with digital technologies. *ZDM Mathematics Education*, (41), 505-519.

Polya, G. (1945). How to solve it. Princeton University Press, New York.

Santos-Trigo, M. (2007). *Resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos.* Trillas, México.

Santos-Trigo, M. (2012). *El estudio de fenómenos de variación y el empleo de herramientas digitales.* Libro electrónico disponible en iTunes.

Santos-Trigo, M. and Moreno-Armella, L. (2013). Sobre la construcción de un marco conceptual en la resolución de problemas que incorpore el uso de herramientas computacionales. In Rojano, M.T. (Coord.). *Las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas.* Trillas, Mexico.

Santos-Trigo, M. and Reyes-Rodríguez, A. (2016). The use of digital technology in finding multiple paths to solve and extend an equilateral triangle task. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. **47**(1), 58-81.

Shoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic, New York.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, **26**(2), 114-145.

ISBN 978-84-945722-3-4