CB-714

PROCEDIMIENTOS QUE AYUDAN A SOCIALIZAR EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO EN EL MARCO DE UN PROYECTO DE ENSEÑANZA PARA DOCENTES DE LA ESO.

Ibarra, L. , Baspiñeiro S., Méndez, G.., Formeliano B., Paz, P.
ibarralidia@yahoo.com.ar– smbaspi@gmail.com – blafor@hotmail.com
nildagramendez@yahoo.com.ar – paolapaz32@gmail.com-
Universidad Nacional de Salta- Consejo de Investigaciòn (CIUNSA). Argentina
Modalidad: C B
Nivel Educativo: Formación y actualización docente
Núcleo temático: La Investigación en Educación Matemática
Palabras Claves: Tareas, procedimientos, aritmética, validación.
Resumen

El presente trabajo sintetiza tres etapas, la exploratoria trabajada en el año 2015, en la cual docentes de matemática de nivel medio cursaron los módulos de geometría, aritmética, álgebra y evaluación en el marco de un postítulo de actualización, una segunda etapa en el año 2016 de sistematización de la producción de los docentes centrado en la aritmética, donde algunos de los problemas emergentes sirvieron de herramienta para iniciar la tercera etapa en el presente año. Esta última etapa se centra en la enseñanza de la aritmética e intenta describir y comprender el trabajo de los docentes que permitirá a los estudiantes *"Argumentar sobre la validez de un procedimiento o el resultado de un cálculo usando relaciones entre los números naturales y las propiedades de las operaciones",* propósito enunciado en el eje Números y Operaciones para 5° año de la escuela primaria.
Los resultados permitirían fortalecer la articulación aritmética – algebra entre los dos últimos años de la escuela primaria y los dos primeros años de la escuela secundaria.

Introducción

A partir de l**a sanción de la Ley Nacional** de Educación, vigente desde 2007 en Argentina, se propone otras formas de enseñanza de la aritmética, es decir diferente tratamiento curricular de los contenidos aritméticos, los cuales aparecen en el EJE: NÚMERO y OPERACIONES en el nivel primario y secundario, en dónde se explicita que los procedimientos se justifiquen, apelando a definiciones, propiedades y teoremas.
Para dar respuesta a las demandas surgidas a partir de esas formas de abordar los contenidos y en el marco del Proyecto del Consejo Investigación de Universidad Nacional de Salta (CIUNSa), se diseñaron talleres para profesores de Educación Primaria y Secundaria. En la primera etapa, durante los años 2011-2012, en la segunda 2012-2014, se trabajó con docentes en el marco de la Reunión de Educación de la Pampa (REPEM) y en la tercera 2015-2016,

ISBN 978-84-945722-3-4

se desarrolló un Postítulo, dictado en la UNSa, Argentina; objeto del presente trabajo. Desde estas investigaciones con una mirada en perspectiva, se observan fenómenos que se producen en los procesos de transposición didáctica de los contenidos correspondientes al estudio del currículo de Matemática en el Nivel Primario y Secundario de la escolaridad en Salta, Argentina, es por ello, se pretende ***conocer para incidir sobre las prácticas áulicas***.

Marco teórico

El hecho de que se enseñe matemáticas en la escuela responde a una necesidad a la vez individual y social: cada uno de nosotros debe saber un poco de matemática para poder resolver, o cuando menos reconocer, los problemas con los que se encuentra mientras convive con los demás (Chevallard, Bosch y Gascón,1997, pp. 46). Esto hace referencia al currículo, proyecto que proporciona informaciones concretas sobre qué enseñar, cuándo enseñar, cómo enseñar y qué, cómo y cuándo evaluar, por lo que se hace más complejo decidir los "objetivos" de que enseñar. Cuando se elaboran los currículos escolares, aparece el problema de la temporalización o distribución de los contenidos a lo largo del tiempo. El conocimiento que los docentes tienen de los programas de lo que ellos enseñan está bastante influenciado por las interpretaciones en que se basa los autores de los manuales, la única referencia de los docentes para preparar sus clases, está la mayor parte del tiempo, en los manuales escolares. (Annie Berté, 2000, pp. 209)

En ese sentido para las tareas escolares, que es otro nivel de transposición, Chevallard (2007) introduce un nuevo dispositivo didáctico denominado recorrido de estudio e investigación (REI) para el estudio de la modelización matemática. Es importante que en dicho estudio aparezca una cuestión como generadora de otras cuestiones derivadas. Por ejemplo las "tareas relativas problemas de división" pueden generar la "la tarea de determinar cuál es la información disponible y cuál la que hay que averiguar". Dichas tareas se logran con técnicas diferentes de acuerdo al recurso a usar y éstas a su vez se articulan y relacionan entre sí y, como consecuencia, se establecen diferencias en el discurso tecnológico a pesar de ser la misma tarea. Los elementos teóricos que acompañan a las explicaciones son los de la Aritmética Elemental.

El estudio de las tareas y las técnicas que surgen orientan sobre la secuenciación y complejización de las situaciones para analizar el currículum y los libros de textos en una institución determinada. Este estudio de las tareas, técnicas, tecnologías y teorías y las

ISBN 978-84-945722-3-4

relaciones entre ellas generan praxeologías alrededor de las operaciones elementales de suma, resta, multiplicación y división.

Las operaciones aritméticas se identifican como actividades de modelización; en consecuencia son: parte de un campo de problemas aritméticos; maneras de hacer o técnicas que permiten explorar propiedades; un medio que permitirán al alumno establecer relaciones y teorías asociadas; un instrumento o herramienta para solucionar los problemas. Respeto al campo de problemas aritméticos**,** el presente trabajo está focalizado en la división de los números naturales para el último año de la escuela primaria y números enteros para el primer año de la escuela secundaria, donde se integran operaciones elementales como la suma, resta y multiplicación. Los conceptos de número y el sistema de numeración posicional permiten distinguir la dualidad entre los mismos "como objeto y como herramienta".

La enseñanza de la aritmética.

Las diferentes propuestas de trabajo, en el Postítulo, dictado en la UNSa se centraron en la resolución de problemas, favoreciendo la evolución de los procedimientos, los medios de representación y de comunicación de cada situación problemática, de manera que sea posible estudiar; las justificaciones que realizan los docentes, al resolver actividades aritméticas; los temas de aritmética que cree que son relevantes en la enseñanza de la ESO en cada curso y los que presentan mayor dificultad para ser enseñados.

En ese sentido en caso de disponer de una situación didáctica adaptada al estudio de la cuestión matemática para gestionarla adecuadamente en la sala de clase, entra en juego la pericia del profesor, esto es, el grado en que éste domina las técnicas, tecnologías y teorías para poner en marcha la situación. Chevallard-Bosch-Gascón, 1997 (p.194). Sin embargo, se comprueba la falta de justificaciones, lo que permite plantear la siguiente hipótesis:

H: Del estudio comparativo de los procedimientos utilizados por los profesores y de los modelos locales, en el marco de resolución de problemas aritméticos, emerge la ausencia de justificaciones, lo que impide la integración entre teoría y práctica.

A partir de esta hipótesis, se requiere delimitar y analizar diferentes tipos de organizaciones matemáticas.

La ***Organización Matemática a Enseñar (OM a enseñar)*** respecto de los contenidos aritméticos es la organización matemática que institucionalmente se decide que deba ser

ISBN 978-84-945722-3-4

enseñada; queda delimitada a través de los diseños curriculares y los libros de texto seleccionados en la institución respecto a la aritmética.

Bosch y Gascón (2001) proponen que para el estudio tanto de las *organizaciones matemáticas* como de las *organizaciones didácticas* en una Institución determinada, es necesario describir previamente una organización matemática (o didáctica) que sirva de referencia, el cual da herramientas de análisis para las organizaciones matemáticas (o didácticas) antes mencionadas. Esta Organización Matemática de Referencia abarca las nociones que aparecen en los diseños curriculares explicitados al inicio del presente apartado que permite dar cuenta de determinados fenómenos didácticos de la OM a enseñar, como son las restricciones institucionales, materializada a través de la hipótesis enunciada.

Organización Matemática de Referencia (OMR)

El objetivo del trabajo es presentar los procedimientos de resolución; que presentaron los docentes; referidos al algoritmo de la división en los enteros para responder a cuestiones como:

a) ¿Qué procedimientos es posible explicitar?

b) ¿Qué propiedades matemáticas se utilizan en el algoritmo de la división?

Procedimientos, para el algoritmo de la división en Z, del problema presentado a los docentes: "*Encontrar, con diferentes procedimientos, el cociente entre 6182 y 15 sabiendo que el resto es 2"*. Problema reformulado del libro de Irma Sainz y Cecilia Parra (2011)

Procedimiento 1 (Algoritmo de la división): Sea a y b enteros b>0. Entonces

i) Existen a y b tales que **: a=b q + r** con **0≤ r < b**

ii) Si a=b q + r con 0≤ r < b y a=b q' + r' con 0≤ r' < b entonces q=q' y r = r'.

q y r se denominan respectivamente cociente y resto de la división de **a** por **b.** La parte i) asegura la existencia de cociente **q** y el resto **r** y la parte ii) da la unicidad de **q** y **r**.

Para el problema 1, Si 6182 = 15 q + 2, con 0≤ r < 15. El 6182 se expresa en función de los múltiplo de 15: 6182= 6000 + 180+2 = 15. 400 + 15. 12+2 = 412.15+2

ISBN 978-84-945722-3-4

Procedimiento 2: Resta sucesivas, en este procedimiento es importante el proceso de construcción del sentido de la operación división, puede aparecer cálculos de aproximación utilizando diferentes números, identificando cada elemento de la división (dividendo, divisor, cociente y resto). Ejemplos: Si a= b q+ r con 0≤ r < b Si a=6182 , b= 15 y r= 2. Entonces a 6182 resto los múltiplo de 15 y para este caso el que se aproxima es 1500 y obtengo por restas sucesivas el 182 y a este número resto un múltiplo de 15 que se aproxime a 182 que es 180 y obtengo el resto 2.

6182-1500=4682, 4682 – 1500=3182, 3182 – 1500= 1682 , 1682-1500=182

182 – 15.12 = 182 – 180 = 2

Procedimiento 3: Una primera estimación del resultado puede ser el número de cifras del cociente. Y en este proceso de exploración pueden usarse propiedades de la multiplicación.

La resolución por multiplicación podría adquirir una organización similar que no son las únicas posibles, a través del siguiente algoritmo:

```
 6182   | 15
-1500     100
 4682
-1500     100
 3182
-1500     100
 1682
-1500     100
  182
 -180     12
    2     412
```

```
 6182   | 15
-1500   | 100+100+100+100+12
 4682
-1500          412
 3182
-1500
 1682
-1500
  182
 -180
    2
```

Procedimiento 4: A partir de los múltiplo de 15 se aproxima hasta llegar al 6182. Otra posibilidad es utilizar los múltiplos de 10.

En los diferentes procedimientos cobran sentido las operaciones de donde emergen propiedades que son formalizadas de diferentes maneras.

<u>Instrumento de Análisis y Metodología</u>

En el primer momento se realizó un diagnóstico individual, a los 24 docentes asistentes, para *Analizar la importancia de la relación entre aritmética y álgebra en la ESO*, de esta manera caracterizar la situación actual en las instituciones escolares de Nivel Secundario.

ISBN 978-84-945722-3-4

En el segundo momento se realizó un trabajo grupal de resolución de problemas para *Analizar los procedimientos de resolución de los problemas aritméticos con los marcos teóricos de referencia.* Los grupos debían explicitar los procedimientos; justificarlos e indicar los saberes previos y emergentes, para ser socializados en forma escrita y oral con los demás grupos. El Problema propuesto era: ***"****Encontrar, con diferentes procedimientos, el cociente entre 6182 y 15 sabiendo que el resto es 2"*

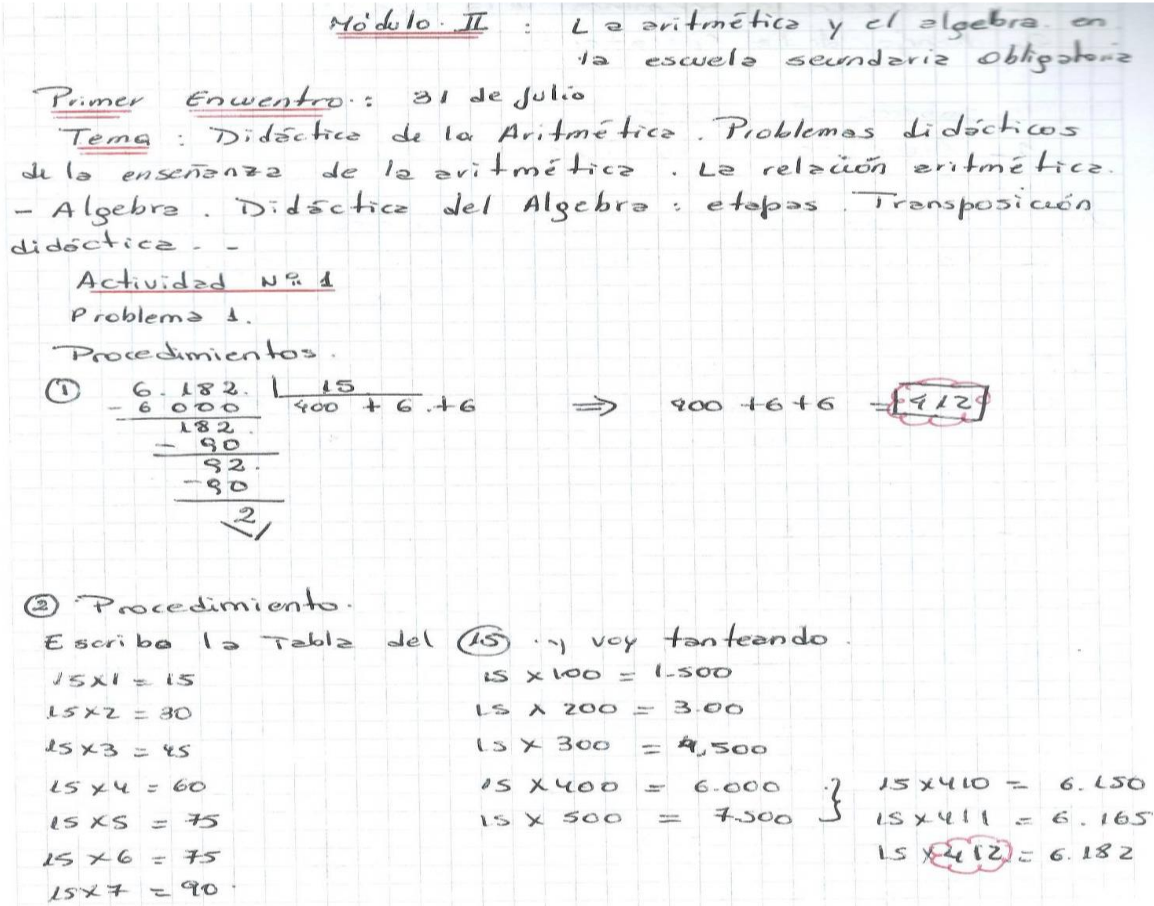
Respuestas, procedimientos y propuestas de los docentes

Se analizará los procedimientos del **Problema 1** de dos grupos.

Grupo 1: En el procedimiento 1 usan el algoritmo de la división. Aproximan el cociente a cuatro centenas obtienen resto mayor que 15; luego acercan con seis unidades hasta obtener resto dos. Mediante un símbolo escriben que el cociente es 400+6+6 = 412. En el procedimiento 2 escriben la tabla del 15 ensayando sin explicitar por qué lo hacen, hasta llegar al resultado.

En ambos procedimientos resaltan el resultado sin relacionar ambos procedimientos.

ISBN 978-84-945722-3-4



Módulo II : La aritmética y el algebra en la escuela secundaria obligatoria

Primer Encuentro: 31 de julio

Tema : Didáctica de la Aritmética. Problemas didácticos de la enseñanza de la aritmética. La relación aritmética - Algebra. Didáctica del Algebra : etapas. Transposición didáctica. -

Actividad Nº 1

Problema 1.

Procedimientos.

① 6.182 | 15
- 6 000 | 400 + 6 + 6 ⇒ 400 + 6 + 6 = 412
182
- 90
92
- 90
2

② Procedimiento.
Escribo la Tabla del 15 y voy tanteando.

15x1 = 15
15x2 = 30
15x3 = 45
15x4 = 60
15x5 = 75
15x6 = 75
15x7 = 90

15 x 100 = 1.500
15 x 200 = 3.00
15 x 300 = 4.500
15 x 400 = 6.000
15 x 500 = 7.500

15 x 410 = 6.150
15 x 411 = 6.165
15 x 412 = 6.182

Grupo 2: A partir de las condiciones de existencia, se plantea la resolución de una ecuación con una incógnita que es el valor de **q.** En el procedimiento 2 buscan los múltiplos de 15. Luego por restas sucesivas expresan que 6182 – 1500 = 4682 y allí el divisor esta 100 veces, escriben de la misma manera cuatro restas. Luego restan 150 y finalmente por 20. Escriben resto 2 y cociente la cantidad de veces que el sustraendo fue restado. s similar al descripto en el análisis anterior. En ambos casos no se explica por qué el problema está resuelto. (Procedimiento realizado por los docentes figura como Anexo 1)

<u>Comparación de las organizaciones locales con los procedimientos propuestos de los docentes</u>

Grupo 1: En el procedimiento 1 usan directamente el algoritmo de la división sin distinguir las condiciones de existencia que aparece en el Procedimiento de la **OMR.** En la implicación se utiliza como antecedente el algoritmo de la división y como consecuente el cociente que obtiene, no se establecen relaciones entre los elementos que intervienen en el algoritmo de la

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

división. En el procedimiento 2: La resolución de la división adquiere una organización de multiplicación.

Grupo 2: En el procedimiento 1: En las condiciones de existencia y unicidad de la definición de división, q y r se denominan respectivamente cociente y resto de la división de **a** por **b.** La parte i) asegura la existencia de cociente **q** y el resto **r** y la parte ii) da la unicidad de **q** y **r**, los docentes trabajan sólo con la condición de existencia. El grupo escribe las condiciones de existencia, con un error en la condición del resto, $\mathbf{a=b\ q + r}$ con $\mathbf{0 \leq r < b}$. Se plantea la resolución de una ecuación con una incógnita que es el valor de **q,** que no es identificado con las condiciones de existencia de la operación división. Esto produce un desplazamiento del sentido de la división por el de la ecuación. En el procedimiento 2 se trabaja con múltiplos y restas sucesivas, no se explica por qué el problema está resuelto. Los procedimientos están representados por operaciones sin justificación. La representación de la operación división en la recta real no es propuesta como procedimiento de resolución, lo cual permitiría comprender las relaciones sobre los números del problema y para construir otras nuevas.

<u>Conclusiones</u>

Se ha seleccionado la operación división porque involucra las operaciones de suma, resta y multiplicación y dar sentido a la construcción de ese conocimiento. Según Brousseau (1987) existen dos componentes de comprensión: “comprender” es ser capaz de reconocer las ocasiones de utilizar el conocimiento e invertirlo en nuevos dominios. Y la otra que el alumno puede comprender puede “razonar” sobre su saber, analizarlo y combinarlo con otro.

En el problema 1 las autoras proponen como actividad “Averiguar el resto” y para verificar utiliza la relación $\mathbf{a=b\ q + r}$**.** Algunos docentes explicitan la condición de existencia de la definición de división pero al resolver no establecen relaciones entre algoritmos y definiciones y / o propiedades. Esto nos lleva afirmar que el aprendizaje de los algoritmos elimina la búsqueda de la comprensión de la operación División. Esta afirmación se comprueba cuando los docentes proceden como los alumnos en el sentido de que resuelven realizando operaciones de suma resta, multiplicación y división. Multiplican por la unidad seguida de cero. Realizan la descomposición de los números del dividendo y divisor. Buscan los múltiplos del divisor hasta aproximar al dividendo sin establecer las relaciones existentes

ISBN 978-84-945722-3-4

entre las operaciones y sus propiedades para producir nuevo conocimiento. La unicidad no es mencionada en ningún de los procedimientos propuestos por los docentes.

Los docentes consideran qué los temas de aritmética relevantes en la enseñanza de la ESO dentro del programa de contenidos en cada curso, están en las tareas relacionadas con las operaciones combinadas en el conjunto de números enteros y racionales. Seleccionan esos temas por que los consideran necesarios para trabajar contenidos que se abordarán en álgebra y funciones. En cuanto la los temas de aritmética que presentan mayor dificultad para ser enseñados expresan que son las propiedades de las operaciones.

Nos queda estudiar el análisis de la ***Organización Matemática a Enseñar (OM a enseñar)*** respecto de los contenidos aritméticos propuesta en los diseños curriculares y libros de texto que son seleccionados en la institución escuela; y también analizar si existe correspondencia entre los contenidos propuestos en los libros de textos y los que aparecen en los diseños curriculares jurisdiccionales.

Referencias bibliográficas

Berté Annie (2000). *Matemática de EGB 3 al Polimodal.* Buenos Aires: A-Z.

Brousseau, G. (1987). *"Representations et didactique du sens de la división"*en Didactique et Acquisitions des connaissances scientifiques, París, Actes du Colloque de Sévres.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la eseñanza y el aprendizaje.* Barcelona: Horsori.

Itzcovich, H. (2008). *La Matemática escolar: Las prácticas de enseñanza en el aula.* Buenos Aires. Editorial AIQUE.

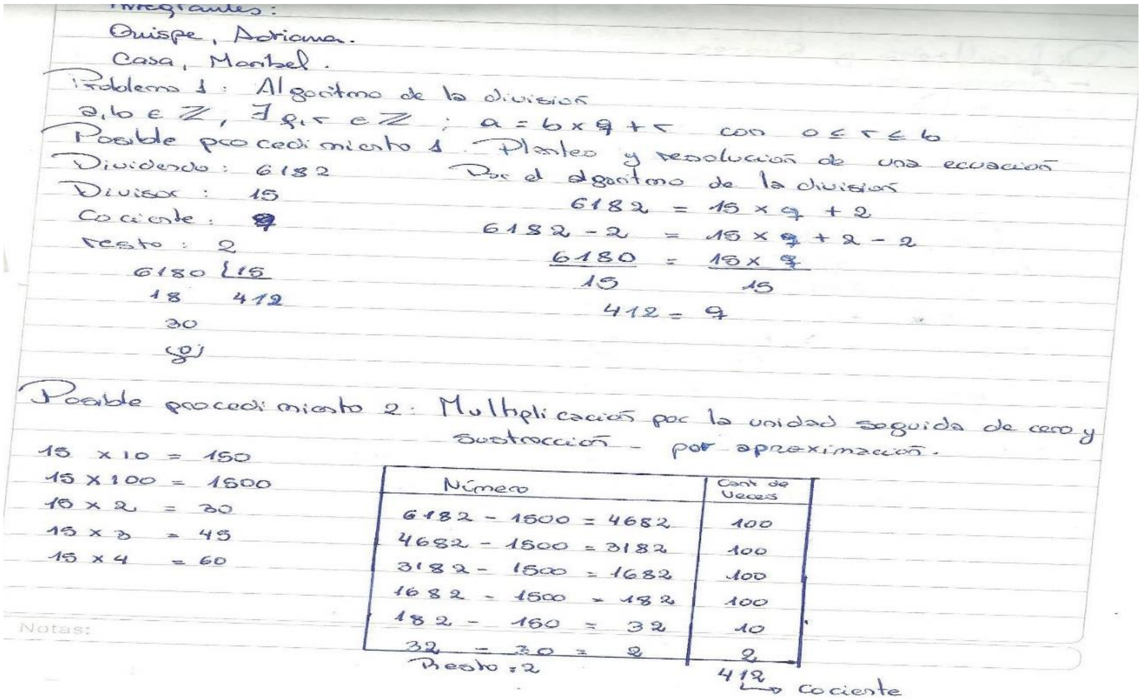
Sainz I. y Parra C. (2011). *Hacer matemática en 6°.* Buenos Aires. Editorial Estrada.

Anexo 1

Grupo 2: A partir de las condiciones de existencia, se plantea la resolución de una ecuación con una incógnita que es el valor de **q.** En el procedimiento 2 buscan los múltiplos de 15. Luego por restas sucesivas expresan que 6182 – 1500 = 4682 y allí el divisor esta 100 veces, escriben de la misma manera cuatro restas. Luego restan 150 y finalmente por 20. Escriben resto 2 y cociente la cantidad de veces que el sustraendo fue restado. s similar al descripto en el análisis anterior.

En ambos casos no se explica por qué el problema está resuelto.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



Integrantes:
Quispe, Adriana.
Casa, Maribel.
Problema 1: Algoritmo de la división
$a, b \in \mathbb{Z}, \exists\, q, r \in \mathbb{Z}$; $a = b \times q + r$ con $0 \leq r \leq b$
Posible procedimiento 1. Planteo y resolución de una ecuación

Dividendo: 6182
Divisor: 15
Cociente: q
resto: 2

$6180 \underline{|15}$
18   412
30
(0)

Por el algoritmo de la división

$6182 = 15 \times q + 2$

$6182 - 2 = 15 \times q + 2 - 2$

$\frac{6180}{15} = \frac{15 \times q}{15}$

$412 = q$

Posible procedimiento 2: Multiplicación por la unidad seguida de cero y sustracción - por aproximación.

$15 \times 10 = 150$
$15 \times 100 = 1500$
$15 \times 2 = 30$
$15 \times 3 = 45$
$15 \times 4 = 60$

Número	Cant de Veces
6182 - 1500 = 4682	100
4682 - 1500 = 3182	100
3182 - 1500 = 1682	100
1682 - 1500 = 182	100
182 - 150 = 32	10
32 - 30 = 2	2

Resto: 2
412 → Cociente

Notas: