CB-721

¿CÓMO RESUELVEN PROBLEMAS DE REPARTOS PROPORCIONALES ALUMNOS SIN EXPERIENCIA PREVIA?

Sergio Martínez-Juste[1] – José María Muñoz-Escolano[1] – Antonio M. Oller-Marcén[2]
sergiomj@unizar.es – jmescola@unizar.es – oller@unizar.es
[1]Universidad de Zaragoza – [2]Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza (España)

Núcleo temático: VII. Investigación en Educación Matemática.
Modalidad: CB
Nivel educativo: Secundaria
Palabras clave: razonamiento proporcional, repartos, resolución de problemas

Resumen

La proporcionalidad es uno de los tópicos matemáticos más importantes en la formación del alumnado de Secundaria. De las muchas situaciones que pueden modelizarse mediante la proporcionalidad, los "repartos proporcionales" constituyen una de las más tradicionales. En estas situaciones debe repartirse la cantidad de una magnitud entre una serie de participantes proporcionalmente a una serie de cantidades de otra magnitud asociada a los participantes. Estos problemas aparecen en libros de texto de todas las épocas. Además, la última reforma educativa española vuelve a introducirlos explícitamente en el currículo en los primeros cursos de Secundaria. En este trabajo estudiamos las respuestas dadas por alumnos que se enfrentan por primera vez a este tipo de problemas sin haber recibido instrucción previa. En concreto, estudiaremos el tipo de reparto realizado y las técnicas utilizadas en su resolución cuando responden a dos problemas abordables mediante un reparto proporcional, uno directo y otro inverso. Pese a la relativa variabilidad en las técnicas del reparto, uno de los problemas se acepta de forma natural como un reparto (directamente) proporcional, mientras que un bajo número de alumnos realiza de forma espontánea un reparto inversamente proporcional.

Introducción y objetivos

Dependiendo del contexto concreto en que se presente, existen múltiples formas de resolver el problema genérico de repartir una cierta cantidad entre un número determinado de personas (Antequera & Espinel, 2011; Peled & Bassan-Cincinatus, 2005; Sánchez, 2013). En este trabajo prestaremos especial atención a los llamados repartos directa e inversamente proporcionales.

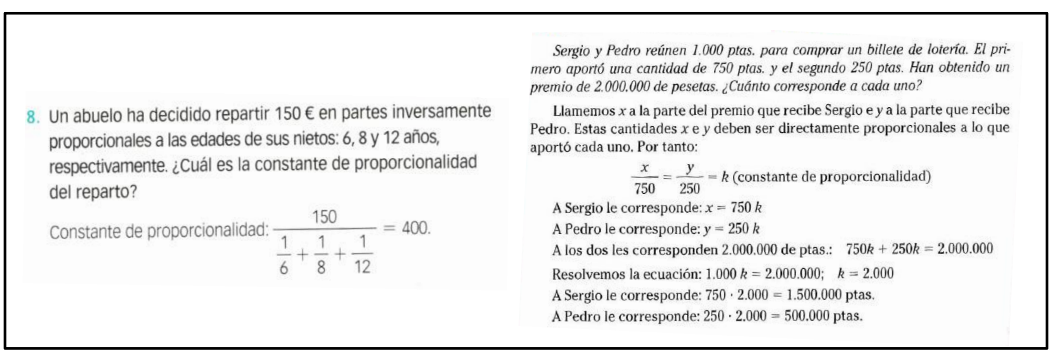
Un reparto directamente proporcional se puede definir, en términos generales, del siguiente modo: Dada una cantidad K y dado un conjunto de pesos $w_1, w_2,\ldots, w_p$ se trata de encontrar una serie de valores $k_1, k_2,\ldots, k_p$ de forma que $k_1+\ldots+k_p = K$ y $k_i/k_j = w_i/w_j$ para todos i, j.

ISBN 978-84-945722-3-4

Por otro lado, un reparto inversamente proporcional se puede definir de la siguiente forma: Dada una cantidad K y dado un conjunto de pesos w_1, w_2,…, w_p se trata de encontrar una serie de valores k_1, k_2,…, k_p de forma que $k_1 + \ldots + k_p = K$ y $k_i / k_j = w_j / w_i$ para todos i, j.

Existen diversos motivos por los cuales está justificado prestar atención a este tipo de problemas. Además del interés intrínsecamente matemático de este tipo de problemas, existen razones relacionadas con cuestiones históricas o curriculares y con la práctica educativa habitual.

Desde un punto de vista histórico, estos problemas ya aparecen en algunos de los textos de contenido matemático que se conservan. Por ejemplo, el problema nº 68 del *Papiro de Rhind* (datado hacia el siglo XVII a.n.e.) dice lo siguiente: “Supongamos que un escriba te dice: cuatro capataces, cuyas cuadrillas consisten en 12, 8, 6 y 4 hombres respectivamente, han ganado 100 gran hekat cuádruples de grano. ¿Cuánto grano debe recibir cada capataz?” (Chace, 1979, p. 104). En una situación como la descrita, resulta natural la idea de un reparto directamente proporcional. De hecho ese es el modo en que se resuelve el problema. Por otro lado, en el *Jiuzhang Suanshu*, libro chino del siglo III, encontramos problemas como el siguiente (problema 8 del capítulo 3): “Ahora, considera cinco oficiales de distintos rangos: Dafu, Bugeng, Zanniao, Shangzao and Gongshi. Entre todos deben pagar un total de 100 monedas. El pago debe repartirse de acuerdo a sus rangos, de modo que el más alto paga menos y el más bajo paga más. Di, ¿cuánto debe pagar cada uno de ellos?” (Kangshen, Crossley & Lun, 1999, p. 166). En este caso, las condiciones del problema fijan la necesidad de un cierto reparto inverso (a mayor rango, menor pago). Aunque la aplicación de un reparto inversamente proporcional puede no resultar del todo evidente, ese fue el procedimiento seguido por el autor del texto a la hora de resolver el problema.


8. Un abuelo ha decidido repartir 150 € en partes inversamente proporcionales a las edades de sus nietos: 6, 8 y 12 años, respectivamente. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad del reparto?

Constante de proporcionalidad: $\dfrac{150}{\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}} = 400.$

Sergio y Pedro reúnen 1.000 ptas. para comprar un billete de lotería. El primero aportó una cantidad de 750 ptas. y el segundo 250 ptas. Han obtenido un premio de 2.000.000 de pesetas. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

Llamemos x a la parte del premio que recibe Sergio e y a la parte que recibe Pedro. Estas cantidades x e y deben ser directamente proporcionales a lo que aportó cada uno. Por tanto:

$$\frac{x}{750} = \frac{y}{250} = k \text{ (constante de proporcionalidad)}$$

A Sergio le corresponde: $x = 750\,k$

A Pedro le corresponde: $y = 250\,k$

A los dos les corresponden 2.000.000 de ptas.: $750k + 250k = 2.000.000$

Resolvemos la ecuación: $1.000\,k = 2.000.000$; $k = 2.000$

A Sergio le corresponde: $750 \cdot 2.000 = 1.500.000$ ptas.

A Pedro le corresponde: $250 \cdot 2.000 = 500.000$ ptas.

Figura 1. A la izquierda, problema de reparto inversamente proporcional (Almodóvar et al., 2016). A la derecha, problema de reparto directamente proporcional (Almodóvar et al., 1999).

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Desde el punto de vista curricular, la ley educativa vigente actualmente en España afirma que los estudiantes de entre 13 y 14 años deberán ser competentes en “resolución de problemas en los que intervenga la proporcionalidad directa o inversa o variaciones porcentuales. Repartos directa e inversamente proporcionales” (L.O.M.C.E., 2013).

Por otro lado, como indica Schubring (1987, p.41), la práctica educativa a veces está más influenciada por los libros de texto utilizados para la enseñanza que por las leyes o los currículos oficiales. En este sentido, un rápido análisis de libros de texto nos permite encontrar ejemplos como los mostrados en la Figura 1.

El objetivo principal de este trabajo consiste en analizar las respuestas dadas por estudiantes sin experiencia ni instrucción previa a dos problemas de repartos proporcionales. De estos problemas, uno puede ser considerado como un reparto directamente proporcional y el otro como un reparto inversamente proporcional. Este objetivo principal puede descomponerse en dos objetivos específicos:

1. Analizar los diferentes modelos de reparto utilizados por los estudiantes y comparar la influencia del tipo de proporcionalidad (directa o inversa) sobre el modelo empleado.
2. Describir las técnicas utilizadas por los estudiantes cuando deciden aplicar modelos proporcionales.

Marco teórico

La importancia del razonamiento proporcional ha sido puesta de manifiesto por múltiples autores. Por ejemplo, Lesh, Post and Berh (1988, p. 2) afirman que “el razonamiento proporcional es un concepto central […] es la piedra angular de la aritmética escolar”.

Los conceptos principales relacionados con la proporcionalidad son las razones (entre sistemas o dentro de un sistema) y las tasas de cambio. Adicionalmente, se pueden considerar problemas de tipo parte-parte o de tipo parte-todo. (Lamon, 2012; Noelting, 1980). A la hora de resolver problemas relacionados con la proporcionalidad, existen multiples estrategias. Lamon (2012) habla de unitización, construcción, razón unitaria o factor de cambio. El uso por parte de los alumnos de una estrategia determinada ante un determinado problema, así como la dificultad del mismo, puede depender de diversos factores. Uno de ellos es la estructura numérica del problema (Steinthorsdottir, 2006).

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Los problemas de repartos, especialmente aquellos que se presentan en un contexto social, no tienen un único modelo bajo el que pueden ser resueltos (Peled & Bassan-Cincinatus, 2005). Además de los repartos equitativos y proporcionales, pueden aparecer otros tipos de modelos de reparto (Peled & Balacheff, 2011; Antequera & Espinel, 2011). El modelo utilizado depende fuertemente tanto del contexto del problema como de las posibles reglas y restricciones introducidas por el profesor.

Si nos centramos en los modelos de reparto proporcional, se pueden distinguir distintas técnicas de resolución que pueden clasificarse teniendo en cuenta si se considera el problema como de tipo parte-parte o de tipo parte-todo y teniendo en cuenta los métodos utilizados para resolver los problemas de valor perdido que aparecen.

Silvestre y Ponte (2012, p. 74) afirman que "en su planificación, los docentes deben tener en consideración el conocimiento informal previo de sus alumnos". Así pues, para decidir las técnicas y estrategias más adecuadas para introducir en el aula estos contenidos, parece interesante analizar las respuestas dadas por alumnos que no han recibido ningún tipo de instrucción previa en ese tipo de tareas (Fernández, 2009; Martínez-Juste, Muñoz-Escolano & Oller-Marcén, 2015). Más aún, en el caso de los repartos, es interesante estudiar la influencia del contexto del problema sobre la elección entre un reparto proporcional o uno equitativo.

Método y muestra

El estudio se llevó a cabo con un total de 20 estudiantes de 2º de E.S.O., con edades comprendidas entre los 13 y 14 años. Los alumnos trabajaron en parejas durante los 50 minutos de una sesión de clase normal. Los participantes carecían de cualquier tipo de experiencia previa con este tipo de problemas y no recibieron ningún tipo de instrucción previa por parte del investigador, excepto la petición de que explicaran lo más detalladamente posible el proceso de resolución de los problemas.

El cuestionario propuesto a los alumnos constaba de dos problemas. En ambos los estudiantes debían repartir determinada cantidad de dinero entre varias personas teniendo en cuenta una cierta situación inicial. En el primero de ellos (correspondiente a un reparto directamente proporcional) el reparto final debe, en cierto modo, reflejar la situación inicial. En el segundo (correspondiente a un reparto inversamente proporcional) el reparto final debe compensar la situación inicial.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Los problemas propuestos fueron los siguientes:

<u>Primer problema</u>: Alba, Bea y Carmen compraron un billete de la lotería de Navidad entre las tres. Alba puso 4 €, Bea 6 € y Carmen 10 €. El billete resultó premiado con 3000 €. ¿Cómo debería repartirse el premio?

<u>Segundo problema</u>: Una abuela tiene 60.000 € que quiere repartir entre sus dos únicos nietos. Uno de ellos tiene un sueldo de 1.000 € al mes, mientras que el otro gana 3.000 €. La abuela ha decidido que el reparto debe hacerse de forma que se compense la diferencia de sueldos de sus nietos. ¿Cómo debería repartir su dinero?

Resultados

En primer lugar, señalamos que todas las parejas proporcionaron una solución a, al menos, uno de los dos problemas propuestos. Sólo una pareja dejó sin resolver el primer problema y dos parejas no proporcionaron una solución completa al segundo de ellos.

En cuanto al modelo de reparto utilizado para la resolución de los problemas, es interesante señalar que no se dio ningún caso de reparto equitativo en ninguno de los dos problemas propuestos. Más concretamente, las nueve parejas que resolvieron el primer problema lo hicieron aplicando correctamente un modelo de reparto directamente proporcional. En el caso del segundo problema, el modelo de reparto inversamente proporcional fue utilizado únicamente por dos parejas. El resto utilizaron un modelo de reparto no proporcional que compensaba la situación inicial de forma aditiva (ver Figura 2).

Entre las parejas que optaron por aplicar modelos proporcionales en el Problema 1 se han identificado tres métodos de resolución distintos:

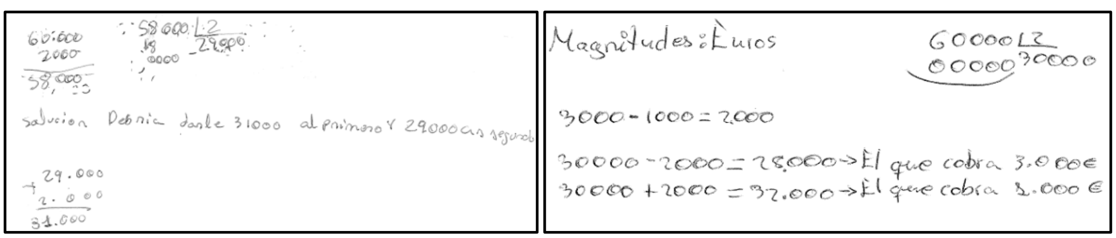


Figura 2. Modelos de reparto no proporcionales que compensan aditivamente la situación inicial.

- Estrategia de unitización. Utilizada por tres parejas. Consiste en calcular el premio que corresponde a cada 2 € invertidos en el billete de lotería (Figura 3).

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

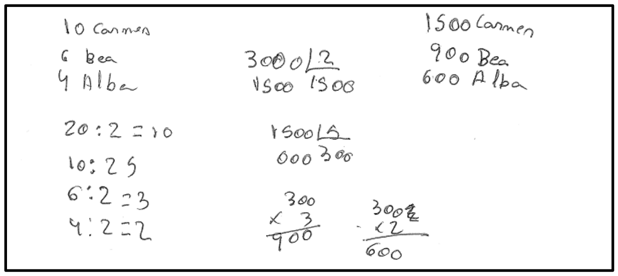


Figura 3. Estrategia de unitización.

- Uso de razones razón parte-todo dentro de cada sistema. Utilizada por dos parejas. Consiste en calcular la parte de billete que ha comprado cada amiga para, posteriormente, calcular esa misma parte del premio total (Figura 4).

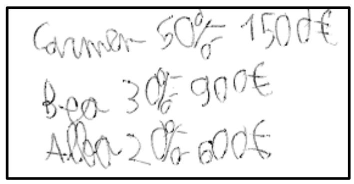


Figura 4. Razones parte-todo dentro de cada sistema.

- Uso de razones entre sistemas. Utilizada por cuatro parejas. Consiste en calcular el premio que corresponde a cada euro invertido en el billete de lotería (Figura 5).

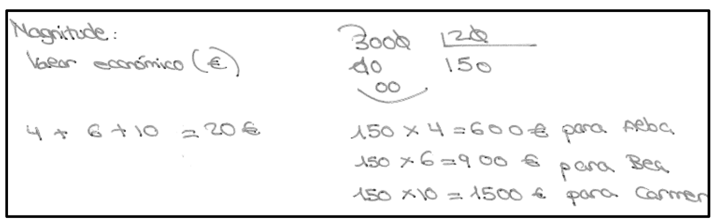


Figura 5. Razones entre sistemas.

En el Problema 2, por su parte, sólo se encontró un método de resolución entre aquellas parejas que utilizaron un modelo inversamente proporcional (Figura 6).

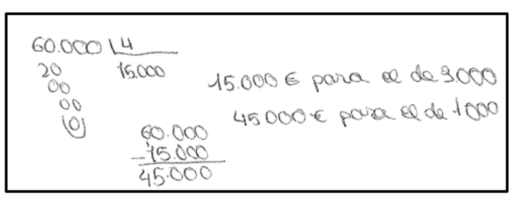


Figura 6. Reparto inversamente proporcional en el Problema 2.

Discusión

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

En primer lugar, es destacable que, pese a no haber recibido ningún tipo de instrucción formal en este tipo de problemas, casi todos los estudiantes participantes han sido capaces de desarrollar algún tipo de estrategia para resolver los problemas propuestos.

A diferencia de lo que sucede en algunos trabajos previos, no hemos encontrado ejemplos de repartos equitativos en el Problema 1. Esto puede deberse a que el contexto de la Lotería de Navidad es muy familiar para los alumnos que, de este modo, están acostumbrados a este tipo de protocolos sociales (Sánchez, 2014).

Pese a no recibir ninguna indicación para aplicar repartos proporcionales (Peled & Bassan-Cincinatus, 2005), el primer problema fue resuelto mediante ese tipo de modelo de reparto por el 90% de los estudiantes. Por otro lado, el segundo problema solo fue resuelto mediante un modelo inversamente proporcional por el 10% de los estudiantes. Este desequilibrio se puede explicar porque la proporcionalidad directa e inversa son fenómenos muy diferentes matemática y cognitivamente (Gairín & Oller, 2011).

Algunas de las respuestas al segundo problema que no aplican modelos proporcionales de reparto (ver Figura 2) se corresponden con las obtenidas por Peled and Balacheff (2011) cuando trabajaban con el 'problema de la lotería', pero en nuestro caso en un contexto de reparto inversamente proporcional. Dichos autores denominaron a ese modelo de reparto como "partir de manera que la diferencia sea parecida a la diferencia entre las inversiones". Estos modelos basados en pensamiento aditivo también aparecen al abordar problemas de bancarrota (Antequera & Espinel, 2011).

Observamos que las técnicas de resolución de problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad directa son adaptadas libremente y aplicadas por los estudiantes en los problemas de repartos directamente proporcionales. Sin embargo, esto no sucede en el caso de los repartos inversamente proporcionales.

La aparición de estrategias de unitización en el Problema 1 es debida a que las cantidades involucradas (4, 6 y 10) son múltiplos de una cantidad (2) que puede actuar como 'nueva' unidad. Esto ilustra la influencia de los valores numéricos elegidos sobre las estrategias que los alumnos utilizan para resolverlo (Steinthorsdottir, 2006).

Agradecimientos

Financiado por el Gobierno de Aragón y el Fondo Social Europeo (Grupo S119).

Referencias bibliográficas

ISBN 978-84-945722-3-4

Almodóvar, J.A., Cuadrado, A., Díaz, L., Dorce, C., Gámez, J.C., Marín, S., Pérez, C., Redón, M. & Sánchez, D. (2016). *Matemáticas 2º ESO Serie Resuelve*. Madrid: Santillana.

Almodóvar, J.A., García, P., Gil, J., Vázquez, C., Santos, D. & Nortes, A. (1999). *Matemáticas 4º ESO Opción A. Órbita 2000*. Madrid: Santillana.

Antequera, A. & Espinel, M.C. (2011). Analysis of a teaching experiment on fair distribution with secondary school students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 42(2), 213-228.

Chace, A. B. (1979). *The Rhind mathematical papyrus*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics

Fernández, A. (2009). *Razón y proporción: Un estudio en la escuela primaria*. Valencia: Publicacions de la Universitat de València.

Gairín, J. M. & Oller, A. M. (2011). Proporcionalidad aritmética en Secundaria. Ideas para una propuesta didáctica. En Lupiáñez, J. L.; Cañadas, M.C.; Molina, M.; Palarea, M.; Maz, A. (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 179-189). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Kangshen, K., Crossley, J.N. & Lun, A.W.C. (1999). *The nine chapters on the mathematical art: Companion and commentary*. Oxford: Oxford University Press.

Lamon, S. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: Esential content knowledge and instructional strategies for teachers*. New york: Routledge.

Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. En J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations for the middle grades* (pp. 93-118). Reston: NCTM.

Ley orgánica de mejora de la calidad educativa (L.O.M.C.E., Ley Orgánica 8/2013, 9 de diciembre). (2013). Boletín Oficial del Estado, nº 295, 2013, 10 de diciembre.

Martínez-Juste, S., Muñoz-Escolano, J. M. & Oller -Marcén, A. M. (2015). Estrategias utilizadas por estudiantes de distintos niveles educativos ante problemas de proporcionalidad compuesta. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 351-359). Alicante, Spain: SEIEM.

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II. Problem structure at successive stages: problem solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in mathematics*, 11(3), 331-363.

Peled, I. & Balacheff, N. (2011). Beyond realistic considerations: Modeling conceptions and controls in task examples with simple word problems. *ZDM Mathematics Education*, 43, 307–315.

Peled, I. & Bassan-Cincinatus, R. (2005). Degrees of freedom in modelling: taking certainty out of proportion. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). *Proceedings of the 29 PME, Vol. 4* (pp. 57-64). Melbourne: PME.

Sánchez, E. A. (2014). Hacer un reparto proporcional o un reparto equitativo: ¿cómo influye el contexto para tomar la decisión? *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 44-60.

Sánchez, E. A. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto: Una mirada desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16 (1), 65-97

Schubring, G. (1987). On the methodology of analyzing historical textbooks: Lacroix as textbook author. *For the Learning of Mathematics*, 7(3), 41-51.

Silvestre, A. I., & da Ponte J. P. (2012). Missing value and comparison problems: What pupils know before the teaching of proportion. *PNA*, 6(3), 73-83.

Steinthorsdottir, O. B. (2006). Proportional reasoning: Variable influencing the problems difficulty level and one‘s use of problem solving strategies. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková. (Eds.), *Proceedings of the 30 PME*, *Vol. 5* (pp. 169-176). Praga: PME.

ISBN 978-84-945722-3-4