REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática.

Volumen IV Número 2 Fecha: Diciembre, 2016

ISSN: 2395-955X

ISSN: 2395-955X

UN ACERCAMIENTO HISTÓRICO SOCIOEPISTEMOLÓGICO A LA NOCIÓN DE FRACTAL CON CABRI

Plácido Hernández Sánchez

Universidad Autónoma de Zacatecas, México

placidohernan@gmail.com

Para citar este artículo:

Hernández, P. (2016). Un acercamiento histórico socioepistemológico a la noción de fractal con CABRI. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. IV, No. 2. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año 4, No. 2, Julio – Diciembre 2016, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Calle Gordiano Guzmán #6, Benito Juárez, C.P.49096, Ciudad Guzmán Jalisco, Teléfono: 3411175206. Correo electrónico: http://www.amiutem.edu.mx/revista, revista@amiutem.edu.mx. Editor responsable: M.C. Christian Morales Ontiveros. Reserva derechos exclusivos al No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 28 de Diciembre de 2016.

UN ACERCAMIENTO HISTÓRICO SOCIOEPISTEMOLÓGICO A LA NOCIÓN DE FRACTAL CON CABRI

Plácido Hernández Sánchez

Universidad Autónoma de Zacatecas, México

placidohernan@gmail.com

Palabras clave: Socioepistemología, práctica social, modelación, Cabri, fractal.

Resumen

En esta investigación se realizó un acercamiento a la noción de fractal desde una perspectiva histórico socioepistemológica, para dar cuenta cómo Benoit Mandelbrot concibió y desarrolló una nueva geometría, la geometría de las formas fractales. La característica de recursividad de Cabri permitió reconstruir algunas de las estructuras fractales más representativas que, en su momento, fueron plasmadas en el ensayo La Geometría Fractal de La Naturaleza. La investigación sugiere que la práctica social que subyace bajo la construcción de los fractales es la modelación de ciertos objetos naturales.

Marco Teórico

Socioepistemología y epistemologías de prácticas

La Socioepistemología se caracteriza por proponer epistemologías de prácticas (Buendía y Cordero, 2005), es decir, rinde cuentas del ejercicio de las prácticas que anteceden a la generación de conceptos. Explica cómo se construye, adquiere y difunde el saber matemático basándose en prácticas sociales, entendidas no como lo que hacen en sí los grupos humanos, sino como aquello que les hace hacer lo que hacen. En el seno de una epistemología de prácticas se manifiesta necesariamente el uso del conocimiento (Covián, 2005; Buendía, 2012).

De aquí se deriva la importancia de indagar acerca del uso del conocimiento matemático en la escuela, en el trabajo o en la ciudad, pues como sostiene Cordero (2008), mientras los marcos teóricos dominantes han explicado el conocimiento matemático en el sentido de si el estudiante lo aprende y si el profesor lo enseña, no hay datos específicos de cómo se usa el conocimiento matemático.

Socioepistemología, prácticas sociales y usos

La Socioepistemología explica la construcción social del conocimiento matemático o el conocimiento en uso y su difusión institucional. Esta aproximación sistémica incorpora cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento matemático, a saber, su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de trasmisión vía la enseñanza (Cantoral, 2013). Para ello recolecta y analiza lo que las personas hacen cuando construyen conocimiento matemático, fijando su atención más allá de la adquisición del objeto, en el desarrollo intencional de prácticas (Buendía, 2010).

La perspectiva teórica socioepistemológica mira la construcción del conocimiento matemático a la luz de lo que se denomina práctica social. Bajo este constructo teórico, los socioepistemólogos caracterizan los mecanismos de construcción del conocimiento matemático. Al reconocer que la práctica social es intrínseca al conocimiento matemático, su carácter como reguladora en la construcción del conocimiento la hace invisible (Mingüer, 2006), pero se manifiesta a través de los usos mediante funcionamientos y formas de acuerdo a la situación específica que enfrente el sujeto.

El rediseño del discurso Matemático Escolar ha sido señalado como una premisa de la Teoría Socioepistemológica (Cordero, Cen y Suárez, 2010). Para eso se proponen epistemologías que expliquen los usos del conocimiento matemático que se desprenden del concepto de práctica social. Esto se justifica al reconocer que los marcos teóricos mundiales, explican el conocimiento a través de lo que se sabe de él: se preguntan cómo se construye, si los alumnos lo aprenden, si los profesores lo enseñan. Sin embargo, hoy no hay datos concretos sobre cómo se usa el conocimiento matemático. No se sabe cómo se usa el conocimiento ni dentro de la escuela ni fuera de ella.

La modelación en Geometría Fractal

En la búsqueda epistemológica para la significación de la matemática, la historia es fuente que genera respuestas a la pregunta, de por qué el humano ha hecho lo que ha hecho cuando construye conocimiento matemático. Este trabajo es un primer acercamiento que propone indagar los indicios de la práctica social subyacente en *The Fractal Geometry of Nature*. La caracterización del uso se presenta alrededor de Mandelbrot (1977), pero ello no implica la centración exclusiva en el individuo como tal, sino en su papel como sujeto social.

Nuestra hipótesis es que la práctica social de la modelación se manifiesta a través de los usos de los fractales; usos que a su vez se manifiestan a través de ciertos funcionamientos y formas. Por forma estamos entendiendo la apariencia perceptible del fractal regular y de sus elementos que lo constituyen: un iniciador y un generador. Por funcionamiento, estamos entendiendo para qué le sirve al sujeto social la forma fractal, de qué manera le funciona para modelar la naturaleza. Como resultado, se han rastreado usos de los fractales asociados con significados situacionales naturales que responden al paradigma histórico de rescatar un conjunto de funciones que en su momento fueron consideradas como patológicas por ser funciones infinitamente no diferenciables en ningún punto.

Metodología

La metodología para indagar la práctica de la modelación fue un primer análisis –no exhaustivo- en el discurso de *The Fractal Geometry of Nature*. En el análisis se indagó el uso que se da en la obra al fractal. Para dar cuenta del uso de estas estructuras se observan las manifestaciones de sus formas y funcionamientos.

Para atender los usos del fractal, primeramente se realizó un análisis histórico donde se exhiben diversas situaciones naturales, con tan alto grado de complejidad que la geometría euclídea con sus nociones ideales no puede modelar. Así Mandelbrot (1977) concibe y desarrolla una nueva geometría de la naturaleza, que usa en diversas situaciones naturales. La práctica de la modelación emerge cuando el investigador reconoce que su geometría describe muchos de los patrones irregulares y fragmentados de nuestro alrededor, identificando una familia de formas que él ha llamado formas fractales. Así pues, las formas de uso son los fractales y le están funcionando al estudioso para describir patrones regulares y fragmentados.

En el análisis realizado se han considerado dos partes. En la inicial se realizó un primer acercamiento, analizando e interpretando el discurso de Mandelbrot desde la perspectiva socioepistemológica. En la segunda parte se rastrearon y construyeron con Cabri, algunas estructuras propuestas en la obra La Geometría Fractal de la Naturaleza, dando cuenta tanto de su forma como de su funcionamiento. Se utilizó Cabri por su recursividad, ello simplificó la construcción de los fractales.

El análisis histórico socioepistemológico

La modelación como práctica social

Mandelbrot (1977) se pregunta ¿Por qué la geometría siempre se describe como “fría” y “seca”? Él mismo reconoce la incapacidad de la geometría euclidiana para describir la forma de las nubes, las montañas, las líneas costeras, los árboles o el rayo; ya que las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las líneas costeras no son círculos, la corteza de los árboles no es suave, ni los rayos viajan en línea recta.

La naturaleza revela un alto grado de complejidad. Muchos patrones naturales son irregulares y fragmentados, esto contrasta con el grado de simplicidad de las estructuras euclídeas. La existencia de estos patrones cambia la manera de estudiar las formas que Euclides considera amorfas.

De esta manera, el investigador concibe y desarrolla una nueva geometría de la naturaleza y la usa en diversos campos. La geometría Mandelbrotiana describe muchos de los patrones irregulares y fragmentados de nuestro alrededor. El científico identifica una familia de formas que llama *fractales* y que le funcionan para una mejor descripción de la naturaleza que la geometría de Euclides.

Para describir los patrones irregulares y fragmentados de la naturaleza, el explorador de las formas irregulares acuña el término fractal, a partir del adjetivo latino *fractus*, cuyo correspondiente verbo latino *frangere* significa romper, quebrar, abrir, partir, dividir, separar en dos partes para crear fragmentos irregulares. Así, para el estudioso, *fractus* significa “fragmentado” o “irregular”. En tanto que cuando menciona el término fractal natural, alude a un patrón natural que normalmente es representado por un conjunto fractal.

El científico de la IBM realiza un estudio de corte histórico reportando la evolución de las matemáticas desde el siglo XIX hasta las matemáticas del siglo XX. Él reconoce que las matemáticas clásicas del siglo XIX tienen sus raíces en las estructuras regulares geométricas de Euclides y en la Dinámica de Newton, en tanto que las matemáticas modernas inician con la teoría de conjuntos de Cantor y con la curva de Peano.

Mandelbrot reconoce la existencia de una revolución, que inicia con el descubrimiento de ciertas estructuras que no encajaban con las formas de Euclides y Newton. Estas nuevas estructuras fueron consideradas como “patológicas”, como una “Galería de Monstruos” por ser infinitamente no diferenciables en ningún punto. Los matemáticos que crearon esos monstruos, en su momento los consideraron importantes para mostrar que el mundo de la matemática pura, contiene una riqueza de posibilidades que iba más allá de las estructuras simples que ellos veían en la naturaleza.

En contraste, Benoit Mandelbrot señala que la naturaleza ha jugado una broma a los matemáticos. Las matemáticas del siglo XIX podrían ser vistas como carentes de imaginación, pero la naturaleza no. Las mismas estructuras patológicas que los matemáticos inventaron para liberarse del naturalismo, resultaron ser inherentes a los objetos naturales familiares que nos rodean.

La Geometría Fractal nace después de la crisis que inicia cuando Paul du Bois-Reymond en 1875, reporta una función continua no diferenciable construida por Weierstrass (figura 1). La crisis dura hasta 1925 donde desfilaron gigantes de la talla de Cantor, Peano, Lebesgue, Hausdorff, Besicovitch, Bolzano, Cesàro, Koch, Oswood, Sierpinski y Urison.

$$W_{b,s}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} b^{i(s-2)} sen\left(b^i x\right)$$

$$b > 1; 1 < s < 2$$

Figura 1. La función de Weierstrass reportada por Paul du Bois-Reymond.

Mandelbrot (1977) sostiene que detrás de las creaciones de los matemáticos anteriores, subyacen mundos de interés para aquellos que celebran la naturaleza cuando tratan de imitarla, es decir, podría estar emergiendo la modelación como práctica social. La idea vertida por el científico, podría confirmar nuestra hipótesis de que la práctica social anclada a la obra La Geometría Fractal de la Naturaleza es la práctica de la modelación.

Litorales, curvas fractales y práctica social

Mandelbrot (1977) reconoce en la complejidad de la geometría de un litoral, un alto grado de orden en su estructura. No obstante que los mapas dibujados a diferentes escalas difieren en detalles específicos, poseen las mismas características genéricas. Esto significa que aproximadamente, los pequeños y grandes detalles de los litorales son geométricamente idénticos bajo cambio de escala. Para ilustrar esta idea, se puso en marcha una situación experimental dejando caer cuidadosamente una gota de tinta sobre una superficie de agua que yacía en una probeta de vidrio.

Se observa que al tocar la superficie del agua, la gota de tinta se descompone en una serie de ramificaciones cuyos extremos a su vez se descomponen en otras ramificaciones parecidas a las anteriores y así sucesivamente hasta que rompen su regularidad cuando la tinta se difumina paulatinamente en el seno del agua (Figura 2). Este efecto de generación de ramificaciones, Lewis Fray Richardson lo bautizó como efecto cascada Mandelbrot (1977). En este escrito convenimos, que cuando se presente un efecto cascada en una estructura determinada, diremos que la estructura es autosimilar.

Figura 2. Cuando una gota de tinta se deja caer en agua, emerge una serie de ramificaciones en cascada parecidas a sus antecesoras.

A continuación presentamos algunas de las estructuras que fueron generadas con Cabri durante la investigación. Las formas de estas estructuras son representativas en *The fractal Geometry of Nature* y le funcionaron a Mandelbrot en su ensayo para modelar litorales.

La isla triádica de Koch. Modelación de una línea costera

Para construir esta estructura fractal, se parte de un iniciador, un segmento de longitud arbitraria. Se diseña una macro en Cabri para trisecar el segmento iniciador (figura 3).

Figura 3. Iniciador.

Ahora se construye el generador. Se dibuja con Cabri un segmento de longitud arbitraria. Se invoca la macro para trisecar el iniciador. Se construye un triángulo equilátero en el tercio medio del iniciador, se resaltan las divisiones extremas y las dos partes superiores del triángulo equilátero como se ilustra en la figura 4. Se crea una macro en Cabri cuyo objeto inicial es un segmento de longitud arbitraria y cuya estructura final sean los cuatro segmentos resaltados.

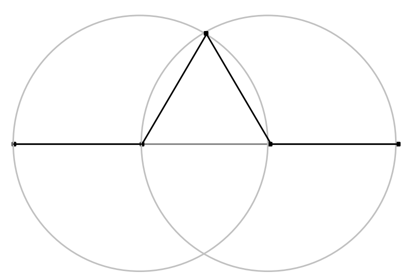

Figura 4. Generador.

Para iterar el proceso se construye un generador y sobre cada uno de los cuatro segmentos resaltados se invoca la macro que dibuja el generador. Este proceso se itera hasta agotar la velocidad y memoria aleatoria de la computadora. A continuación se presentan algunos pasos de la Isla Triádica de Koch.

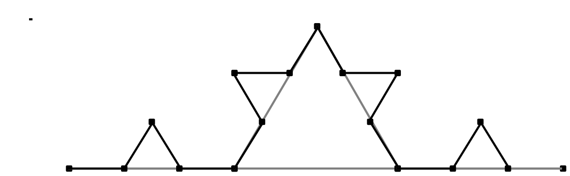

Figura 5. Paso 1 de la Isla Triádica de Koch

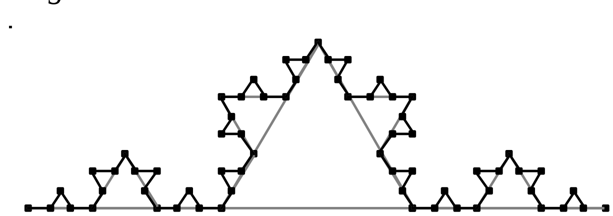

Figura 6. Paso 2 de la Isla Triádica de Koch.

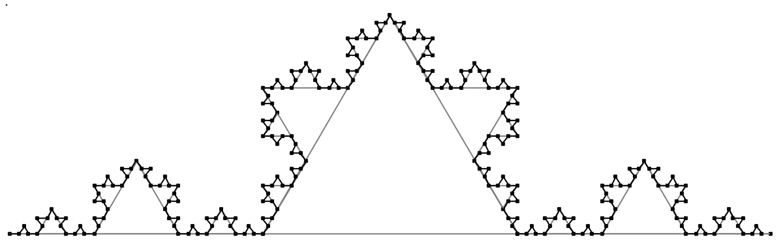

Figura 7. Paso 3 de la Isla Triádica de Koch.

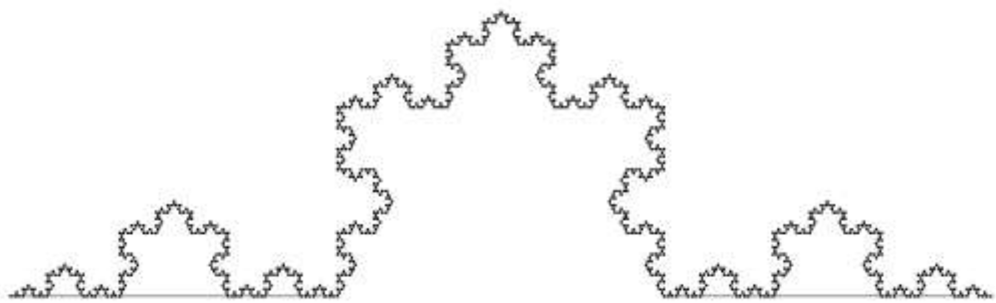

Figura 8. Paso 5 de la Isla Triádica de Koch

La salchicha de Minkowski. Modelación de una línea costera

Para construir este fractal, el iniciador es un segmento de longitud arbitraria. Se diseña una macro en Cabri para cuadrisecar el segmento (figura 9).

Figura 9. Iniciador.

Ahora se construye el generador. Se dibuja con Cabri un segmento de longitud arbitraria. Se invoca la macro para cuadrisecar el iniciador. Se construye un cuadrado en el segundo cuarto del iniciador, se hace una reflexión de este cuadrado respecto al iniciador, se resaltan las divisiones extremas y las tres partes superiores de cada cuadrado (figura 10). Se crea una macro en Cabri cuya estructura origen es un segmento de longitud arbitraria y cuya estructura final sea la estructura geométrica de la figura (10).

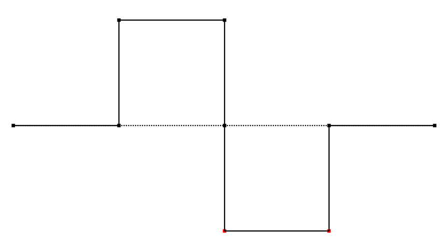

Figura 10. Generador.

Se construye un generador y sobre cada uno de los cuatro segmentos resaltados se invoca la macro. Este proceso se itera hasta agotar la velocidad y memoria aleatoria de la computadora. A continuación se presentan algunos pasos de la salchicha de Minkowski.

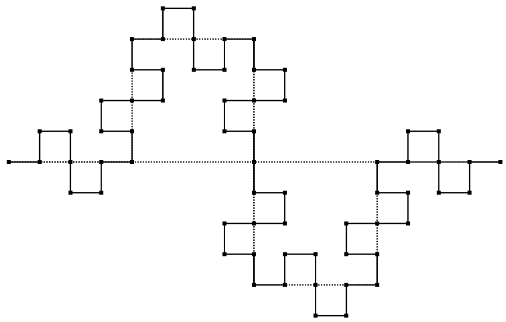

Figura 11. Paso 1 de la Salchicha de Minkowski.

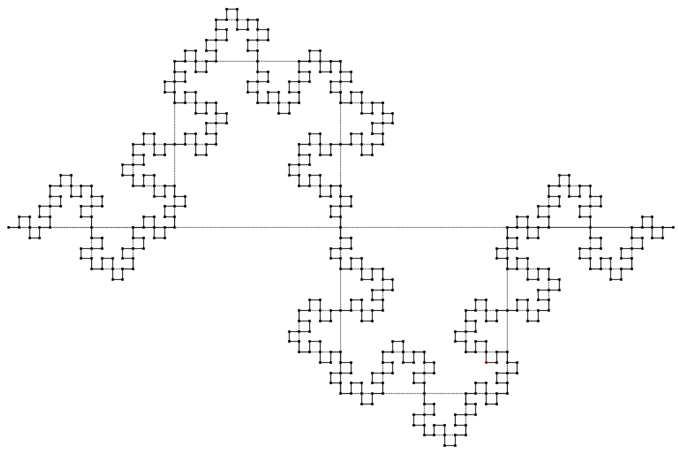

Figura 12. Paso 2 de la Salchicha de Minkowski

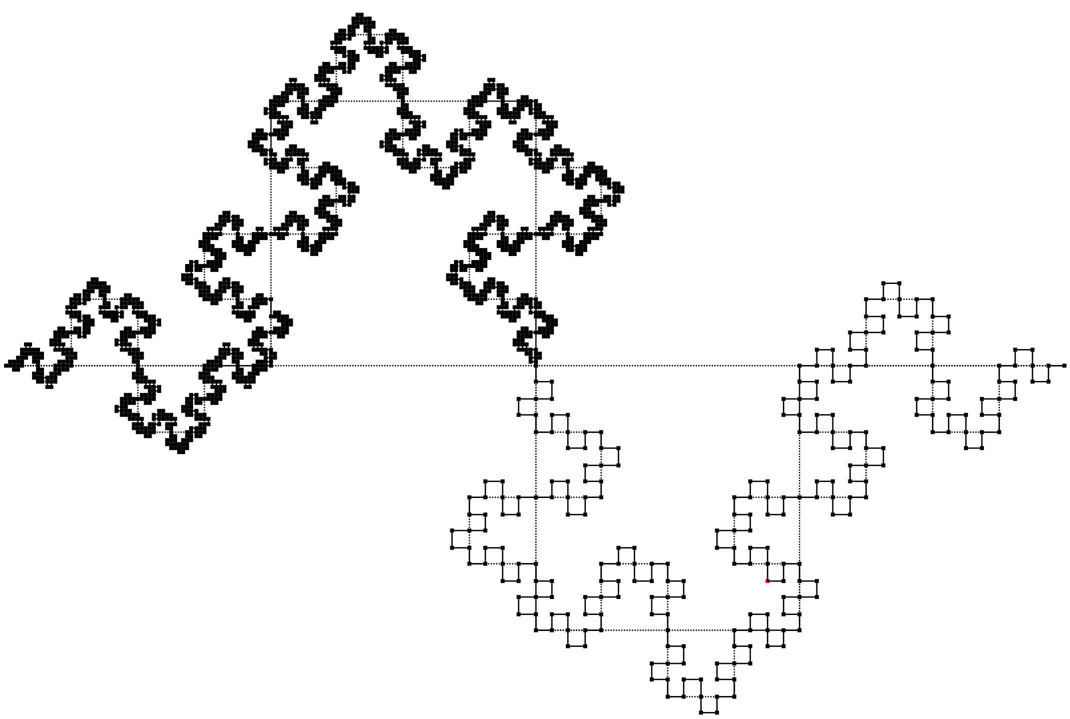

Figura 13. Pasos 2 y 3 de la Salchicha de Minkowski.

Isla cuádrica de Koch. Modelación de una línea costera

Esta estructura fractal parte de un iniciador, un segmento de longitud arbitraria. Se diseña una macro en Cabri para trisecar el iniciador (figura 14). Se invoca la macro punto medio de Cabri para dividir cada tercio del iniciador en dos partes iguales. Así, el iniciador queda sextisecado.

Figura 14. Iniciador.

Ahora se construye el generador. Se dibuja con Cabri un segmento de longitud arbitraria. Se sextiseca. Se construye una estructura como se ilustra en la figura (15). Se crea una macro en Cabri cuya estructura origen es un segmento de longitud arbitraria y cuya estructura final sea como en la figura (15).

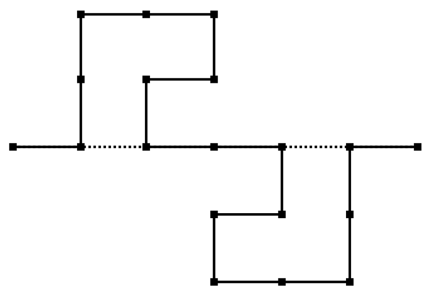

Figura 15. Generador.

Se construye un generador y sobre cada uno de los constituyentes del generador se invoca la macro propia del generador. Este proceso se itera hasta agotar la velocidad y memoria aleatoria de la computadora. A continuación se presenta el primer paso de la Isla Cuádrica.

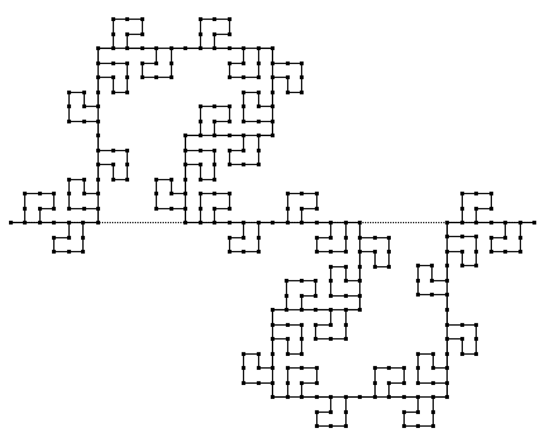

Figura 16. Paso 1 de la Isla Cuádrica.

Otras Islas cuádricas

Esta estructura fractal parte de un iniciador, un segmento de longitud arbitraria. Se divide el iniciador en ocho partes iguales (figura 17).

Figura 17. Iniciador.

Ahora se construye el generador. Se dibuja con Cabri un segmento de longitud arbitraria. Se octiseca. Se construye una estructura como se ilustra en la figura (18). Se crea una macro en Cabri cuya estructura origen es el iniciador octisectado y cuya estructura final sea como en la figura (18).

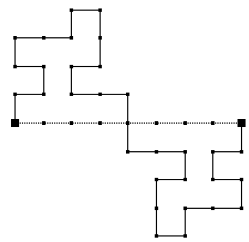

Figura 18. Generador.

Se construye un generador y sobre cada uno de los constituyentes del generador se invoca la macro del generador. Este proceso se itera hasta agotar la velocidad y memoria aleatoria de la computadora. A continuación se presenta el primer paso de esta Isla Cuádrica.

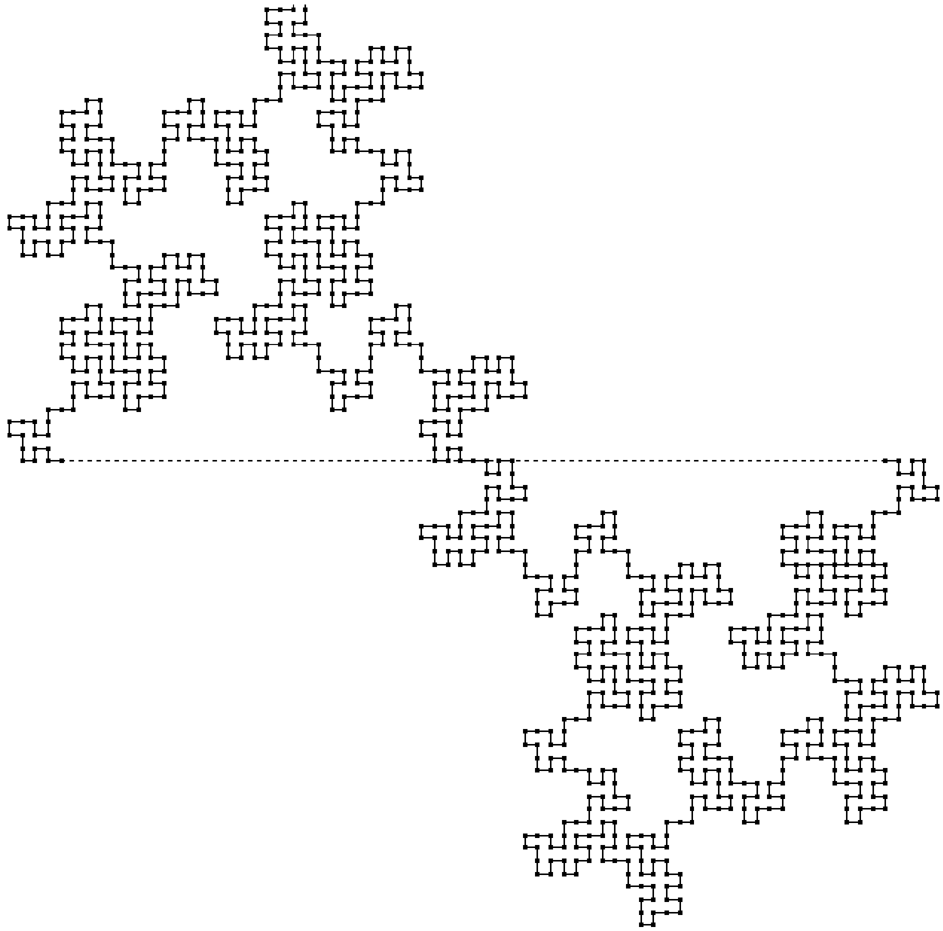

Figura 19. Paso 1 de la Isla Cuádrica.

El dragón

Esta estructura fractal parte de un iniciador, un segmento de longitud arbitraria. Se biseca el iniciador (figura 20).

Figura 20. Iniciador.

Ahora se construye el generador. Se dibuja con Cabri un segmento de longitud arbitraria. Se construye una estructura como se ilustra en la figura (21). Se crea una macro en Cabri cuya estructura origen es un segmento de longitud arbitraria y cuya estructura final sea la figura (21).

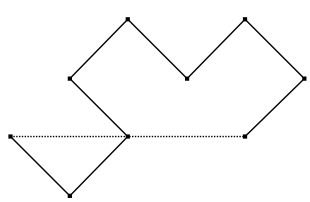

Figura 21. Generador

Se construye un generador y sobre cada uno de los constituyentes del generador se invoca la macro del generador. Este proceso se itera hasta agotar la velocidad y memoria aleatoria de la computadora. A continuación se presenta el primer paso del dragón.

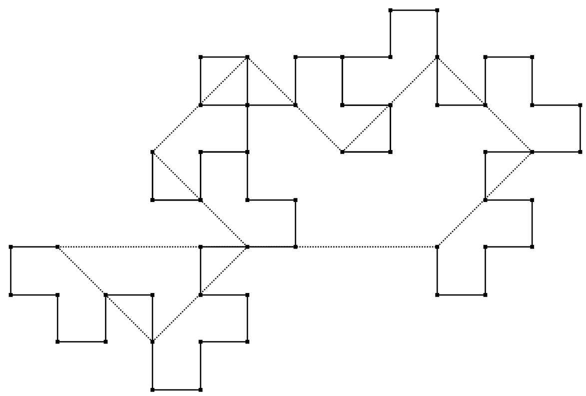

Figura 22. Paso 1 del dragón

Iterando el proceso se presenta a continuación el segundo paso del dragón.

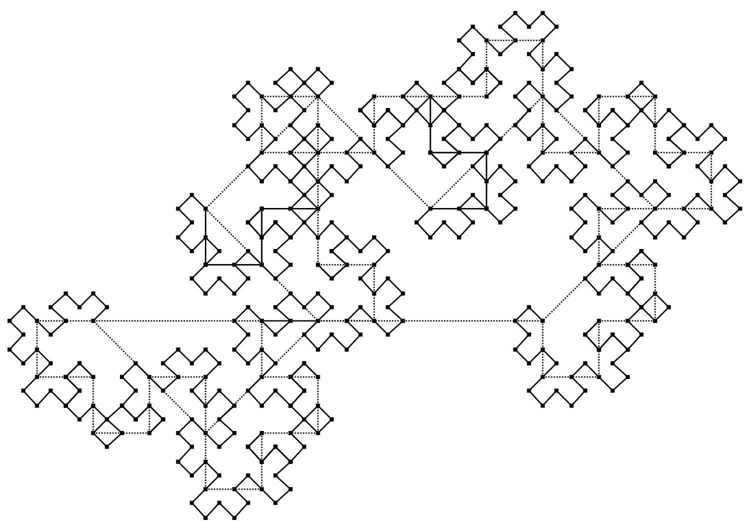

Figura 23. Paso 2 del dragón

El árbol de los monos

Una estructura muy interesante que sugiere ligar la práctica de la modelación con la naturaleza es el árbol de los monos.

Su iniciador es un segmento de longitud arbitraria el cual es dividido en tercios (figura 24).

Figura 24. Iniciador

Para construir el generador del árbol de los monos, se dibuja con Cabri un segmento de longitud arbitraria. Se triseca. Se construye una estructura como se ilustra en la figura (25), el algoritmo de construcción es el mismo algoritmo con el que se construye un hexágono. Trisectado el segmento, se considera el tercio medio. Se trazan dos circunferencias con centro cada uno de los extremos del tercio medio y radio el tercio medio. Con la intersección de estas circunferencias se obtiene el centro del hexágono. Se traza una circunferencia con centro el centro del hexágono y que pase por los extremos del tercio medio. Las primeras circunferencias intersecan a la última. Se trazan dos circunferencias más con centro en las últimas intersecciones y se conecta con segmentos como en la figura (25). Se crea una macro en Cabri cuya estructura origen es un segmento de longitud arbitraria y cuya estructura final sea la figura (25).

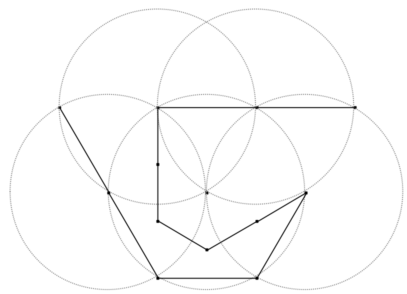

Figura 25. Generador

Se construye un generador y sobre cada uno de los constituyentes del generador se invoca la macro. Este proceso se itera hasta agotar la velocidad y memoria aleatoria de la computadora. A continuación se presenta el primer paso del árbol de los monos.

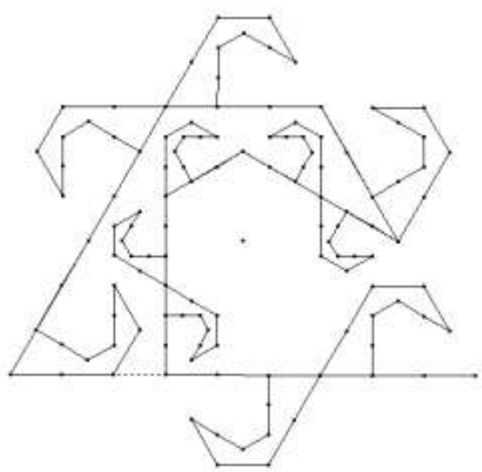

Figura 26. Paso 1 del árbol de los monos

Una atenta mirada a las curvas fractales presentadas sugiere que dentro de las escalas de interés para los geógrafos, los litorales o líneas costeras podrían ser modeladas por medio de curvas fractales, es decir, que los litorales o líneas costeras son patrones fractales Mandelbrot (1977). Desde el punto de vista de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, la afirmación anterior reviste de interés ya que sugiere confirmar nuestra hipótesis, que la práctica social intrínseca a la obra de Mandelbrot es la práctica de la modelación, no obstante falta mucho por indagar en la obra de Mandelbrot desde la perspectiva socioepistemológica.

Conclusiones

La investigación ha dado cuenta de cómo se usa la noción de fractal en *The Fractal Geometry of Nature,* donde aparenta develarse la práctica de la modelación de litorales. En este primer acercamiento se ha encontrado evidencia de que se manifiestan formas y funcionamientos fractales, que surgen a medida que Mandelbrot modela situaciones de interés para los geógrafos como mapas, en particular líneas costeras o litorales que sugieren que la práctica de la modelación está presente en su obra.

Para lograr lo anterior el esquema metodológico que se siguió, es un análisis de corte histórico socioepistemológico. Se considera que esta metodología constituye el hilo conductor que guió la investigación para develar formas y funcionamientos fractales en la obra de Mandelbrot. La indagación sugiere que este marco metodológico, podría ser una contribución científica importante para robustecer la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa y que podría facilitar la búsqueda de evidencias del uso del conocimiento matemático alrededor del concepto de fractal.

En este esquema metodológico aparenta amalgamarse el grupo humano, su conocimiento científico institucional y la práctica de la modelación. Los datos dan pauta para evidenciar un funcionamiento a lo largo de la parte analizada del ensayo, el cual consiste en una mejor descripción de la naturaleza que la geometría euclídea. Esta amalgama podría ser caldo de cultivo para propiciar el surgimiento de formas y funcionamientos de los fractales a través de herramientas específicas para la resignificación de usos del conocimiento matemático, por ejemplo en la escuela o en otros contextos.

Cada patrón fractal construido con el software de geometría dinámica Cabri en esta investigación, es un indicativo de la forma de cómo usan el conocimiento matemático los geógrafos y que les está funcionando para la modelación de líneas costeras. Este trabajo podría ser el inicio de una historia más robusta que indague exhaustivamente los usos del conocimiento matemático en la obra La Geometría Fractal de la naturaleza y que podrían ayudar a resignificar los usos del saber matemático al abordar la noción de infinito.

Bibliografía

Buendía, G. (2010). Articulando el saber matemático a través de prácticas sociales. El caso de lo periódico. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 13(4), 11-28.

Buendía, G. (2012). El uso de las gráficas cartesianas: Un estudio con profesores. *Educación matemática*, 24(2), 9-36.

Buendía, G., & Cordero, F. (2005). Prediction and the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice framework. *Educational Studies in Mathematics*, 58(3), 299-333.

Cantoral, R. (2013). Teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa. *Estudios sobre construcción social del conocimiento (1a ed.). Editorial Gedisa SA, Barcelona*.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano*, 285.

Cordero, F., Cen, C., & Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *13*(2), 187-214.

Covián, O. N. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la Cultura Maya.* Tesis de maestría inédita. Cinvestav, México.

Mandelbrot, B. (1977). *The fractal geometry of nature.* New York: W. H. Freeman and Company.

Mingüer, L. M. (2006). *Entorno Sociocultural y Cultura Matemática en Profesores de Nivel Medio Superior de Educación. Estudio de Caso en el Instituto Tecnológico de Oaxaca. Una Aproximación Socioepistemológica.* Tesis de doctorado inédita. Cicata, México.