CB-775

ENSINO EXPLORATÓRIO DE MATEMÁTICA: UMA DISCUSSÃO SOBRE TAREFAS E A DINÂMICA DA AULA

Celine Maria Paulek – Everton José Goldoni Estevam
celemaria03@yahoo.com.br – evertonjgestevam@gmail.com
Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, Brasil

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos
Modalidad: Comunicación Breve
Nivel: Formación y Actualización Docente
Palabras clave: Ensino Exploratório, Tarefas Matemáticas, Dinâmica de aula

Resumo

O Ensino Exploratório de Matemática (EEM) admite como dimensões fundamentais o inquiry, *a colaboração, a comunicação e a reflexão, as quais devem ser encorajadas pelas tarefas e dinâmica que sustentam aulas nessa perspectiva. No presente trabalho nos propomos a problematizar aspectos fundamentais que necessitam ser considerados quando se intenta essas aulas, buscando responder às questões: Que atributos das tarefas propiciam aprendizagem exploratória da matemática? Que aspectos da dinâmica da aula colaboram para isso? Trata-se de uma pesquisa da própria prática, a partir da experiência de dois professores-pesquisadores que, associados a um grupo de estudos e investigação, elaboraram e implementaram três tarefas matemáticas em turmas de primeiro e segundo anos de um curso de Licenciatura em Matemática. Os resultados sugerem uma lista de aspectos que necessitam ser considerados ao elaborar/adaptar/selecionar tarefas matemáticas, com vistas à aprendizagem exploratória, bem como quando se orquestra aulas nessa perspectiva. Estes constituem aspectos-chave para mobilização das quatro dimensões que fundamentam o EEM.*

Introdução

A abordagem exploratória constitui uma perspectiva que, situada em uma compreensão alargada de *inquiry-based teaching* (Cyrino, 2016), se contrapõe ao modelo de transmissão de conhecimento/informação, associado a práticas expositivas e diretivas (Ponte, 2005). Ela coloca os alunos no centro do processo didático, no qual, a partir de tarefas desafiadoras e com ações consonantes do professor, estes são conduzidos a comunicar suas ideias e (in)compreensões, questionar ideias de outros, refletir sobre a necessidade ou vantagem de determinadas ideias ou estratégias de resolução, em uma dimensão colaborativa de aprendizagem (Chapman & Heater, 2010).

Nesse sentido, pesquisas realizadas apontam, dentre diversas questões, as tarefas matemáticas e a dinâmica da aula como aspectos complexos e desafiadores a este contexto de prática (Canavarro, 2011; Cyrino, 2016; Ponte, 2005; 2014). No presente trabalho nos propomos a problematizar, a partir da experiência de professores-pesquisadores de uma universidade brasileira, aspectos fundamentais que necessitam ser pensados quando se elabora/adapta/seleciona tarefas para subsidiar aulas na perspectiva do Ensino Exploratório de Matemática (EEM), em associação à dinâmica da aula, orientados pelas seguintes questões: Que atributos das tarefas propiciam aprendizagem exploratória da matemática? Que aspectos da dinâmica da aula colaboram para isso?

As tarefas e a dinâmica da aula no Ensino Exploratório de Matemática

Ao admitir que a aprendizagem decorre do trabalho que os alunos realizam a partir do engajamento em tarefas desafiadoras, para as quais não possuem um método imediato de resolução (Canavarro, 2011), o EEM sublinha as características das tarefas que subsidiam essas aulas como meio de promoção da participação individual e coletiva do aluno numa atividade de inquirição (Cyrino, 2016), valorizando a "(re)descoberta pelos alunos de métodos próprios para resolver uma questão" (Ponte, 2014, p. 21), e ressalta que isso constitui uma forma profícua de aprender. O termo "tarefa" aqui é assumido como propostas de trabalho que "fornecem os contextos intelectuais para o desenvolvimento matemático dos alunos" (NCTM, 1994, p. 20), sem necessariamente apresentar diretamente os conceitos e procedimentos matemáticos (Ponte, 2014).

De acordo com Ponte (2005), as tarefas utilizadas no EEM podem caracterizar problemas, investigações ou explorações. Contudo, independente de classificação, é essencial partir de uma situação desafiadora (Canavarro, 2011) e que tenha potencial para envolver os alunos em um trabalho que desencadeie formas complexas de pensamento (Ponte, 2005; 2014). A intencionalidade da tarefa é outro aspecto salientado porque, ao provocar a emergência de diferentes estratégias e representações, com diferentes níveis de sofisticação matemática, ela permite que o aluno se apoie na sua experiência anterior para elaboração do processo de resolução (Ponte, 2014). Do mesmo modo, possibilita a comparação da eficiência e adequabilidade dessas estratégias como meio para (re)solução da situação em causa, ou

ISBN 978-84-945722-3-4

ampliação para outras semelhantes ou relacionadas já que "representações distintas focam, geralmente, aspectos diferentes de relações e conceitos complexos" (NCTM, 1994, p. 77). Contudo, considerando que a aprendizagem resulta da atividade desenvolvida a partir daquilo que é proposto, não das tarefas em si, a dinâmica da aula é essencial para a efetividade das atividades emergentes dessas tarefas. Nesse sentido, as aulas em fases parecem constituir boas oportunidades, às quais são associadas práticas componentes da ação do professor, destacadas por Stein et al. (2008). Tratam-se de quatro fases: i) proposição e apresentação da tarefa, apoiada na prática de propor a tarefa aos alunos; ii) desenvolvimento da tarefa, associada à prática de monitorar a resolução dos alunos, apoiá-los e identificar resoluções interessantes para discussão com toda a turma; iii) discussão coletiva da tarefa, relacionada à apresentação das resoluções selecionadas, contraposição de diferentes ideias e estratégias, bem como discussão de suas potencialidades e limitações; e iv) sistematização das aprendizagens, com a formalização das ideias discutidas no decorrer da aula, aproximando-as daquelas prescritas nos currículos. Salienta-se ainda que a efetivação dessas práticas demanda a "antecipação" de ações de professor e alunos no desenvolver das atividades previstas para a aula, uma parte essencial do planejamento (Stein et al., 2008; Canavarro, 2011).

Aspectos metodológicos e contextuais da pesquisa

A pesquisa desenvolveu-se a partir da prática de dois professores-pesquisadores associados a um grupo de estudos e investigação, no processo de elaboração de duas tarefas matemáticas e das análises das atividades desencadeadas por essas tarefas. Trata-se de uma pesquisa da própria prática, que segundo Cochran-Smith e Lytle (1999) referidas por Lima e Nacarato (2009, p. 246) consiste em "um estudo sistemático e intencionado dos professores sobre seu próprio trabalho na sala de aula e na escola", compreendendo sistemático como organizado e com registros das ações, e intencionado como uma atividade previamente planejada para alcançar determinado(s) objetivo(s). As autoras apontam ainda para a essencialidade da participação do pesquisador da própria prática em espaços de compartilhamento de ideias e saberes, onde será possível reelaborar conceitos e construir novas aprendizagens. As tarefas foram desenvolvidas de acordo com as quatro fases do EEM (inicialmente em trios e posteriormente com discussão e sistematização com toda a turma) nas disciplinas de

ISBN 978-84-945722-3-4

Instrumentalização para o Ensino de Matemática, que têm como objetivos mobilizar no início do curso de licenciatura em Matemática ideias e raciocínios envolvidos no ensino de diferentes conteúdos matemáticos do Ensino Fundamental e Médio, com vistas à sua compreensão e aplicação, priorizando a perspectiva exploratória. As tarefas discutidas neste artigo (ver Anexo) foram elaboradas pelos professores-pesquisadores buscando potencializar a atividade dos alunos durante as aulas em consonância com o EEM.

Como instrumentos de coleta de dados da pesquisa, recorremos ao caderno de campo dos professores, com registros da trajetória de elaboração das tarefas e seu desenvolvimento em sala de aula, bem como aos relatórios escritos dos alunos.

Resultados e Discussões

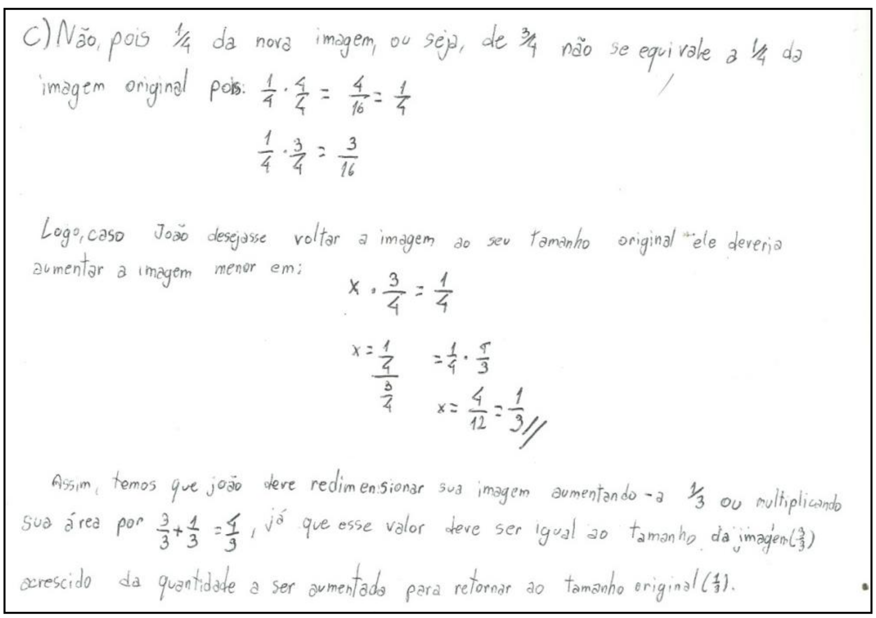
A "Tarefa: Fotografia" visa à compreensão de fração como operador. Para tanto, lidar com aspectos do raciocínio proporcional é fundamental para que se perceba que, neste caso, a fração como parte-todo não faz sentido. A tarefa está estruturada em três itens encadeados que intencionalmente chamam a atenção para ideias-chave relacionadas ao objetivo da tarefa: i) a importância do "todo" considerado quando se trabalho com frações (item a); ii) compreensão de relações proporcionais e não proporcionais entre medidas e diferentes grandezas (item b); e iii) pensar por que a ideia de parte-todo não faz sentido na situação a ser resolvida (item c).

Cabe salientar que a tarefa envolve um contexto real associado à ampliação e redução de fotografias com a utilização de recurso digitais, algo habitual para os alunos que pode contribuir para seu engajamento na tarefa. Do mesmo modo, o encadeamento das ideias que permeiam cada item foi pensando numa perspectiva indutiva, que conduz o aluno à percepção de ideias e conceitos fundamentais para o objetivo em causa. Por outro lado, as questões provocam os alunos a pensar sobre determinados aspectos possivelmente não cuidados inicialmente, cuja percepção, compreensão, justificação e articulação demandam a (re)elaboração de significados. Nesse sentido, tanto a tarefa (proposta inicial) quanto as interações dialógicas professor-aluno e aluno-aluno, buscam oferecer suportes e promover atitude inquiridora com vistas ao estabelecimento de relações entre diferentes ideias e conhecimentos anteriores. Estes funcionam como alavanca para a elaboração de estratégias

ISBN 978-84-945722-3-4

e, por conseguinte, compreensão das ideias em causa na elaboração de um todo que articula formas complexas de pensamento, conceitos e ideias matemáticas.

Como possíveis estratégias de resolução, a tarefa permite a recorrência a diferentes ideias e registros para justificar e explicar os raciocínios empregados. Desenhos (para representar os tamanhos da(s) fotografia(s)), operações aritméticas (tentativa e erro, por exemplo) ou algébricas (a partir do raciocínio proporcional empregado em expressões) constituem diferentes possibilidades de resolução, com diferentes níveis de complexidade matemática, cuja contraposição e articulação podem colaborar para a compreensão da fração como operador. Cabe salientar que a recorrência a expressões como “explique o raciocínio” e “como se deve proceder” denotam um cuidado em priorizar os processos de resolução, em detrimento da solução final. Essa característica, ao mesmo tempo em que fomenta a emergência de estratégias e registros diversos nas resoluções dos alunos, provoca-os a elaborar explicações e justificações para os raciocínios empregados, os quais tornam acessíveis ao professor suas compreensões e incompreensões acerca das ideias, conceitos e procedimentos em causa (Figura 1).


c) Não, pois 1/4 da nova imagem, ou seja, de 3/4 não se equivale a 1/4 da imagem original pois: $\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{4} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$

Logo, caso João desejasse voltar a imagem ao seu tamanho original ele deveria aumentar a imagem menor em:

$x \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$x = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3}$

$x = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Assim, temos que joão deve redimensionar sua imagem aumentando-a 1/3 ou multiplicando sua área por $\frac{3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, já que esse valor deve ser igual ao tamanho da imagem (3/3) acrescido da quantidade a ser aumentada para retornar ao tamanho original (4/3).

Figura 9: Resolução de um dos grupos de alunos ao item “c” da Tarefa: "Fotografia.

Contudo, no momento de resolução da tarefa, diversos grupos de alunos, apesar de aparentemente compreender o princípio de proporcionalidade envolvido, denotaram dificuldade de relacionar as grandezas “medidas dos lados” e “áreas” das figuras,

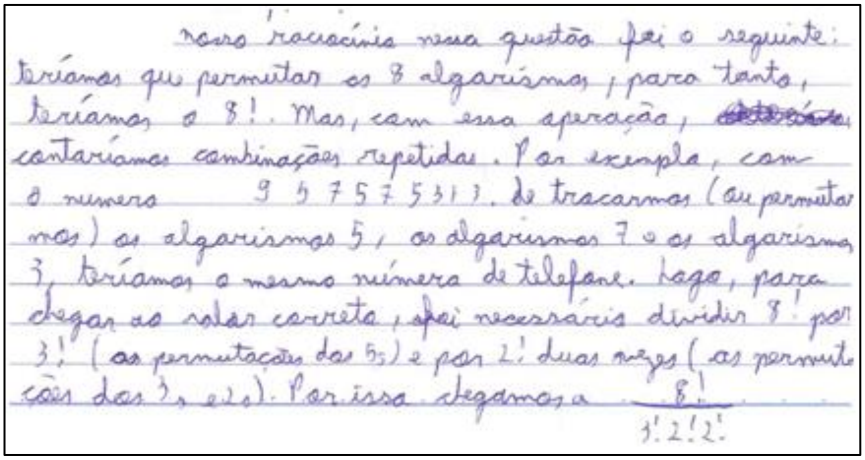
ISBN 978-84-945722-3-4

argumentando, por exemplo, no item b que uma possibilidade de tamanho para a fotografia seria 12x12cm, já que uma imagem com essas medidas resultaria uma área de 144cm². Mesmo com questionamentos do professor e de colegas (discussão coletiva), esses alunos demonstravam dificuldade em perceber o equívoco. Uma estratégia encontrada pelo professor foi projetar uma foto retangular no *software* GeoGebra associada a controles deslizantes relacionados às suas medidas (lados e área), cuja manipulação evidenciou em que circunstâncias a(s) imagem(ns) era(m) proporcionais.

A tarefa "Telefone Celular", por sua vez, tem como objetivo o desenvolvimento de conhecimentos de combinatória com repetição. Ela foi pensada após a resolução de outra tarefa, na qual foi abordada a combinatória simples, em que os alunos foram instigados a diferenciar permutações, arranjos e combinações. O contexto da tarefa envolve a inclusão do nono dígito nos números de telefone celular, e as questões versam sobre a quantidade de números de celular que podemos obter considerando algumas condições. Assim, a tarefa refere um contexto real. As três questões que compõe a tarefa estão intencionalmente encadeadas, de acordo com o(s) objetivo(s): a primeira envolve arranjo com repetição; a segunda solicita a quantidade de subconjuntos formados respeitando certas condições, o que envolve permutação com repetição; e na terceira, os alunos são convidados a pensar/elaborar uma questão que envolva combinação com repetição. Essa última questão permite uma avaliação do desenvolvimento dos alunos, visto que eles precisam perceber que neste contexto a combinação não faz sentido (números de telefone precisam ser ordenados) e justificar por que as questões anteriores não configuram casos de combinação. O encadeamento das ideias que permeiam cada item da tarefa foi pensado, portanto, também numa perspectiva indutiva.

A tarefa possibilita que os alunos a resolvam de várias formas, uma vez que seu(s) enunciado(s) não indica(m) modos de resolução, o que a caracteriza como aberta, mas ao alcance dos alunos. As estratégias de resolução que podem emergir nesta tarefa envolvem a representação da árvore de possibilidades, estimativas aritméticas e representações algébricas. Assim os alunos podem, a partir de seus conhecimentos anteriores, analisar as condicionantes da situação e relacioná-las aritmeticamente – as permutações que representam uma mesma possibilidade (Figura 2).

ISBN 978-84-945722-3-4



Nosso raciocínio nessa questão foi o seguinte: teríamos que permutar os 8 algarismos, para tanto, teríamos o 8!. Mas, com essa operação, ~~contaríamos~~ contaríamos combinações repetidas. Por exemplo, com o número 9 5 7 5 7 5 3 1 3. Se trocarmos (ou permutarmos) os algarismos 5, os algarismos 7 e os algarismos 3, teríamos o mesmo número de telefone. Logo, para chegar ao valor correto, foi necessário dividir 8! por 3! (as permutações dos 5s) e por 2! duas vezes (as permutações dos 3s e 7s). Por isso chegamos a $\frac{8!}{3!2!2!}$

Figura 10: Resolução de um dos grupos de alunos ao item 2 da Tarefa: "Telefone Celular”.

Para potencializar a busca por justificativas e explicações, em cada item da tarefa é solicitado aos alunos que expliquem seu raciocínio e/ou justifiquem suas afirmações. Dessa forma, valoriza-se o desenvolvimento da resolução proposta pelo aluno e não o seu produto final, priorizando os raciocínios e as estratégias empregadas.

Essa constante busca por explicações é promovida também pela ação do professor (especialmente, nas fases de desenvolvimento e discussão coletiva), que busca instigar os alunos a questionar o que estão fazendo e a colaborar uns com os outros, interpondo e defendendo suas ideias, bem como ouvindo e tentando compreender o(s) outro(s). Isso favorece a identificação e o estabelecimento de relações que os auxiliam no processo de resolução. O professor, portanto, assume papel essencial na aula de incentivar, inquirir e apoiar os alunos na busca por resoluções que promovam a (re)elaboração de conhecimentos. A ação do professor ao “ilustrar” os raciocínios empregados indevidamente na tarefa “Fotografia” recorrendo ao GeoGebra, por exemplo, ilustra outra ação semelhante com vistas ao reconhecimento de equívocos relacionados ao raciocínio proporcional, evidenciando a importância da ação do professor nessa prática.

É importante ainda salientar a relação entre a particularidade da situação envolvida na(s) tarefa(s) e a dimensão generalizante da(s) aprendizagem(ns) objetivada(s). É possível que os alunos, baseando-se em conhecimentos anteriores – fração como parte-todo e combinatório sem repetição – e a partir das intervenções feitas pelo professor, resolvam a(s) questão(ões) de forma restrita ao contexto da tarefa. Podem ainda apresentar procedimentos generalizantes restritos a fórmulas previamente conhecidas, sem evidências de compreensão ou

ISBN 978-84-945722-3-4

justificativas. Contudo, deve-se ter em conta que a dinâmica empregada (envolvendo a tarefa e as interações professor-aluno e aluno-aluno) pressupõe a aprendizagem a partir do trabalho que os alunos realizam no contexto particular da situação apresentada, cuja contraposição de ideias e estratégias e o estabelecimento de relações e distinções deve criar condições para a generalização das ideias, conceitos e procedimentos em causa. Isso sublinha a dimensão complexa desse tipo de prática e, especialmente, a relevância da fase de sistematização das aprendizagens como espaço privilegiado de (re)elaboração de conhecimento(s), suportado pelas demais fases da aula. Os erros emergentes nos últimos itens das tarefas, por exemplo, oferecem indícios das relações (não) estabelecidas entre situações particulares da tarefa e dimensões gerais das ideias em causa. As justificativas apresentadas para concordar com a afirmação de João ("Fotografia") evidenciam a (in)compreensão do raciocínio proporcional necessário para a significação da fração como operador e superação da ideia restrita à parte-todo. Do mesmo modo, a (possível) situação apresentada pelos alunos como um caso de combinação com repetição ("Telefone Celular") sugere tanto confusões na utilização deste conceito no processo de resolução de outras questões (por exemplo, entre a posição do algarismo no número e as restrições na quantidade de possibilidades – item 2) quanto entre arranjo e combinação. Essas confusões mostram-se comuns entre os alunos e pouco acessíveis ou inteligíveis em práticas tradicionais pautadas em exercícios de aplicação.

Conclusões

As análises realizadas sugerem uma lista de aspectos que necessitam ser considerados ao elaborar/adaptar/selecionar tarefas matemáticas e na condução de aulas no EEM.

Quanto às tarefas, os resultados evidenciam a importância de contextos significativos aos alunos, cuja estrutura de itens que a compõem, encadeados intencionalmente, devem priorizar o raciocínio indutivo e possibilitar a mobilização de formas de pensamento com diferentes níveis de complexidade – apoiadas em desenhos, na aritmética e na álgebra, por exemplo. Dessa forma, é preciso que a tarefa deixe para os alunos parte importante do trabalho de exploração e elaboração do conhecimento, de forma a configurar, em alguma medida, um desafio e instigar seu engajamento na resolução. É esperado, portanto, algum nível de abertura que favoreça o emprego de estratégias e registros de resolução diversos, com diferentes níveis de sofisticação matemática. Contudo, é essencial destacar que a tarefa

ISBN 978-84-945722-3-4

por si não garante a efetivação da atividade matemática intentada. A ação do professor é fundamental, tanto no que se refere à provocação para justificações, clarificações e ampliações de ideias, quanto para a colaboração e negociação de significados nos processos de estabelecimento de estratégias resolutivas e generalização de ideias, procedimentos e conceitos.

Esses aspectos circunstanciam, portanto, alguns atributos das tarefas que precisam ser considerados na fase de "antecipar" e monitorados no decorrer da aula, ao mesmo tempo em que evidenciam aspectos essenciais da prática do professor quando orquestra aulas na perspectiva exploratória.

Referências

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática, 115*, 11-17.

Chapman, O., & Heater, B. (2010). Understanding change through a high school mathematics teacher's journey to inquiry-based teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education 13*(6), 445-458.

Cyrino, M. C. C. T. (Ed.). (2016). *Recurso multimídia para a formação de professores que ensinam matemática*: *elaboração e perspectivas*. Londrina, Brasil: EDUEL.

Lima, C. N. M. F. & Nacarato, A. M. (2009). A investigação da própria prática: mobilização e apropriação de saberes profissionais em matemática. *Educação em Revista*, Belo Horizonte, *2*(2), 241-266.

NCTM. (1994). *Normas Profissionais para o Ensino da Matemática*. Lisboa: APM e IIE.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (Ed.). (2014). *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática*. Lisboa: IEUL.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313-340.

ANEXO - Tarefas que subsidiaram as análises do artigo

TAREFA: *"FOTOGRAFIA"*

Você tem uma fotografia em seu computador e, com um recurso de editor de imagem, a transforma em outra, com $\frac{3}{4}$ de seu tamanho original.

a) Quais comandos matemáticos você pode dar ao computador/editor para que a fotografia volte ao tamanho original? Explique o(s) raciocínio(s) empregado(s).

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

b) A fotografia inicial tinha as dimensões 12x16cm. Como se deve proceder para que a fotografia fique com o tamanho de 144cm², sem deformá-la? Quais serão suas dimensões?

c) Analisando a situação, João fez a seguinte afirmação: *"Se a figura inicial foi reduzida a* $\frac{3}{4}$ *do tamanho original, basta aumentar esta nova figura em* $\frac{1}{4}$ *que ela voltará ao tamanho original"*. Você concorda com João? Explique seu raciocínio.

TAREFA: *"TELEFONE CELULAR"*

Por uma decisão da Anatel, através da Resolução nº 553, publicada em 14 de dezembro de 2010, para que haja um aumento de disponibilidade de números de telefones móveis (celulares) no Brasil e assim atender à crescente demanda de novos usuários e também para padronizar a numeração da telefonia móvel em todo o país, os números de celular passarão a ter o nono dígito. O nono dígito que será utilizado é fixo, o algarismo 9, que será o primeiro dígito do número de celular.

1. Antes da implantação do nono dígito os números de celular iniciavam com 7, 8 ou 9. Com a implantação do nono dígito, o único formato permitido é o 9AXXX-XXXX. O algarismo A poderá assumir valores de 1 a 9 (o algarismo 0 é reserva técnica da Anatel), e os demais algarismos podem assumir quaisquer valores de 0 a 9. Quantos números de celulares podem ser disponibilizados a mais com a implantação do nono dígito? Explique seu raciocínio.

2. Ao considerarmos um número de telefone móvel que já possui o nono dígito, todos seus algarismos são ímpares, possui o algarismo 5 repetido exatamente três vezes, os algarismos 3 e 7 repetidos duas vezes cada um deles e os demais algarismos distintos, quantas possibilidades temos de formação deste número de telefone móvel? Explique seu raciocínio.

3. Considerando a implantação do nono dígito e o formato permitido para os números telefônicos com essa inclusão, é possível elaborar uma questão envolvendo o conceito de combinação com repetição? Se sim, elaborem e apresentem a resolução de uma questão, e se não, justifiquem por que não é possível.

ISBN 978-84-945722-3-4