

## **DESARROLLO DEL PENSAMIENTO TRIGONOMÉTRICO EN LA TRANSICIÓN DE LA RAZÓN TRIGONOMÉTRICA A LA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA**

Olivia Alexandra Scholz Marbán – Gisela Montiel Espinosa

[olivia.scholz@cinvestav.mx](mailto:olivia.scholz@cinvestav.mx) – [gmontiele@cinvestav.mx](mailto:gmontiele@cinvestav.mx)

CINVESTAV-IPN México

Núcleo temático: Investigación en Educación Matemática

Modalidad: CB

Nivel educativo: Bachillerato

Palabras clave: Trigonometría, Socioepistemología, transición.

### **Resumo**

*En el marco de una investigación de doctorado se estudia el desarrollo del pensamiento trigonométrico en la transición de la razón trigonométrica a la función trigonométrica, en el nivel bachillerato. Reportamos aquí una síntesis de la revisión bibliográfica realizada, para situar nuestro planteamiento de investigación y delinear algunos elementos teóricos que nos permitan llevar a cabo el estudio.*

*En su mayoría, los resultados de investigación apuntan hacia dificultades y niveles de comprensión no deseados, vinculados a la falta de significado no sólo a las nociones trigonométricas, también a nociones previas necesarias y nociones que se articulan con ellas (por ejemplo: razón proporcional y función). Aquellos resultados con resultados positivos están cambiando lo que entienden por comprender las nociones trigonométricas y el tipo de actividades asociadas con su aprendizaje. En esta dirección estamos proponiendo nuestra investigación.*

*La revisión bibliográfica, además de reportar el estado actual de la investigación didáctica relacionada con la Trigonometría, permitió identificar elementos teóricos y metodológicos que nos permitirán, respectivamente, estudiar el pensamiento matemático relativo a las nociones trigonométricas y controlar variables en el diseño de instrumentos para la intervención didáctica, en tanto proponemos una investigación basada en el diseño.*

### **Introducción**

El estudio de la Trigonometría desde las razones trigonométricas a las funciones trigonométricas, transitando por las identidades y leyes trigonométricas; se ubica en el Nivel Medio Superior (NMS) del Sistema Educativo Mexicano, en el que se atienden, regularmente, estudiantes entre 15 y 18 años.

Desde una perspectiva del desarrollo del pensamiento matemático asociado a estos contenidos escolares, se puede identificar el reto de ir desde un pensamiento geométrico (para trabajar con la razón trigonométrica, en el triángulo rectángulo) a un pensamiento variacional

(para trabajar con la función trigonométrica, en el círculo unitario), con la complejidad que implica cada uno y la transición de uno a otro. Sin embargo, las investigaciones de Montiel (Montiel y Jácome, 2014; Beltrán y Montiel, 2016; Buendía y Montiel, 2011) han dado evidencia sobre la falta de significados geométrico y variacional que provoca el discurso trigonométrico escolar, aun en los estudiantes y profesores que dominan los conceptos de razón y función trigonométricas; en tanto el significado lo asocian a la actividad matemática y ésta favorece algoritmos aritméticos y dibujos de referencia (en contraste con la construcción geométrica y el análisis de datos y relaciones). Con el objetivo de devolver a la actividad trigonométrica sus componentes geométricos, se iniciaron proyectos de rediseño del discurso matemático escolar con investigaciones basadas en diseño, donde estudiar el desarrollo del pensamiento trigonométrico en un sentido amplio, es decir, más allá del dominio de técnicas y algoritmos.

Sobre el pensamiento trigonométrico en un contexto geométrico, se llevó a cabo una investigación basada en diseño (Scholz, 2014) que nos permitió identificar, en un proceso de resignificación de la razón trigonométrica, las herramientas, los razonamientos y el lenguaje que emergen en el contexto geométrico; que ahora servirán de base para centrar la atención en la transición a lo variacional.

Presentamos, en este documento, una síntesis de la revisión bibliográfica que nos permita situar nuestro proyecto de investigación y dirigir su aportación en la Matemática Educativa, desde una teoría que atiende al estudio del desarrollo del pensamiento matemático.

### **Revisión bibliográfica**

Hemos localizado diversos estudios que detectan y reportan las dificultades que presentan tanto estudiantes como profesores respecto a los temas de Trigonometría que se estudian en el NMS. Los estudios se enfocan en alguno de los dos grandes temas: razones trigonométricas o funciones trigonométricas, hasta ahora no se han encontrado estudios que atiendan el tránsito de uno a otro, aunque algunos aportan al planteamiento de nuestro problema de investigación.

Organizamos la revisión en dos grandes bloques, asociados a uno de los temas (razón o función), y en cada uno se desarrolla la revisión en orden cronológico, haciendo notar una cierta evolución de la disciplina y sus objetos de estudio: énfasis en la cognición (dificultades

de aprendizaje y comprensión alcanzada); énfasis en la didáctica (estrategias de enseñanza), énfasis en el razonamiento y pensamiento matemático.

### **Investigaciones relativas a la razón trigonométrica**

#### *Dificultades y comprensión*

Encontramos en (Blackett y Tall, 1991) un estudio donde se reconocen las dificultades que encuentra el estudiante al conceptualizar las relaciones y propiedades en el triángulo rectángulo cuando éste cambia de tamaño en dos formas diferentes: cuando un ángulo agudo en el triángulo se incrementa y se mantiene fija la hipotenusa, y cuando los ángulos se mantienen constantes, pero se amplía la hipotenusa en un factor dado. En este estudio se destaca el rol de la visualización y manipulación a través de una herramienta de geometría dinámica.

De Kee, Mura y Dionne (1996) estudian los niveles de comprensión que han alcanzado los estudiantes, posterior a la instrucción mediante dos métodos: triángulo rectángulo y círculo trigonométrico. Comparando el desempeño de los estudiantes en ambos contextos era mejor en el del triángulo rectángulo. Observaron poca comprensión de la función circular y su papel en la definición de las funciones trigonométricas. Dentro de sus resultados, reportaron algunas formas en las que los estudiantes usan y caracterizan las herramientas trigonométricas, por ejemplo: no hacen distinción clara entre razón y función; la razón trigonométrica la consideran como un procedimiento que consiste en dividir una entre otra las longitudes de dos lados del triángulo rectángulo, que incluso algunos lo aplican a triángulos que no son rectángulos o ángulos que no son agudos; para algunos estudiantes el lado más largo de cualquier triángulo es la hipotenusa; en el círculo trigonométrico, aplican el seno y el coseno a sus coordenadas y no establecen relación con el ángulo central; describen las gráficas de las funciones seno y coseno como curvas o de aspecto ondulado.

También en un estudio sobre la comprensión Araya Chacón, Monge Sánchez y Morales Quirós (2007), ubican a su población en niveles bajo o básico y reportan dificultades en la interpretación de los enunciados cuando se le plantea un problema escrito para hacer su dibujo y colocar los datos de la situación presentada, en el empleo erróneo de ciertas fórmulas y en el uso de algunos procedimientos algebraicos (despeje de la incógnita cuando ésta se

encuentra en el denominador de uno de los miembros de la ecuación), ciertos conceptos geométricos como la semejanza y las relaciones entre los lados del triángulo rectángulo.

#### *Estrategias de enseñanza*

El estudio de Kendal y Stacey (1998), compara los métodos de enseñanza del triángulo rectángulo y círculo unitario para ver cuál promueve una mejor comprensión de los conceptos subyacentes y dominio de las habilidades. Sus resultados se basaron en: la capacidad para formular y trasponer la ecuación, mejoras en la actitud y mejora en la resolución de ecuaciones algebraicas. Los autores concluyen que el método del triángulo rectángulo es mejor para iniciar el estudio de la Trigonometría, aunque reflexionan que la definición de razones trigonométricas en el círculo unitario tiene ciertas ventajas, por ejemplo, es ideal para la extensión más allá del primer cuadrante.

#### *Razonamiento y pensamiento matemático*

La investigación reportada por Montiel y Jácome (2014) pone en evidencia que el dominio de la razón trigonométrica no implica un pensamiento trigonométrico, cuando se resuelve una tarea tradicional de cálculo de distancias inaccesibles. Los autores llevan a cabo un análisis del discurso matemático escolar, relativo a la razón trigonométrica, en los libros de texto; para documentar el fenómeno de *arimetización trigonométrica*, y explicar el significado *lineal* que muestran los profesores sobre la relación ángulo - longitud de lado, y donde ubican *lo trigonométrico* del estudio del triángulo.

### **Investigaciones relativas a la función trigonométrica**

#### *Dificultades y comprensión*

Weber (2005) desarrolla un estudio acerca de la comprensión de los estudiantes de las funciones trigonométricas, usando el concepto teórico de *procepto*. Tras la implementación de un diseño didáctico no tradicional, que incorpora algunas tareas de construcción geométrica, medición e identificación de relaciones, los estudiantes participantes logran establecer propiedades y justificarlas para trabajar con la función trigonométrica; lo que el autor reconoce como comprensión, a nivel procepto, de la función. Weber concluye que brindar a los estudiantes la oportunidad de aplicar y reflexionar los procesos geométricos utilizados en la evaluación de las operaciones trigonométricas, permite que entiendan estas

operaciones mejor que si se les enseña que éstas son meras razones que pueden aplicarse a triángulos rectángulos dados.

### *Estrategias de enseñanza*

Ross, Bruce y Sibbald (2011) llevan a cabo un estudio para determinar si la tecnología tiene un mayor impacto en el logro y las actitudes de los estudiantes si se implementa antes o después de la enseñanza de un curso de trigonometría. El estudio encontró que los estudiantes que experimentaron la tecnología después de la enseñanza de los conceptos básicos de trigonometría tuvieron un mejor rendimiento en la resolución de ejercicios que los estudiantes que comenzaron con simulaciones apoyadas por la tecnología.

Un modelo de comprensión trigonométrica, integrado por tres contextos trigonométricos: la trigonometría triangular, la trigonometría circular y los gráficos de funciones trigonométricas; y basado en un análisis conceptual de las ideas matemáticas y entre los tres contextos de trigonometría; sirve a Demir (2013) como base para el diseño de un nuevo enfoque de instrucción de las funciones seno y coseno.

La idea básica en el nuevo enfoque es evitar una introducción temprana de los radianes como unidad de medida para el ángulo, a través del círculo unitario, y en su lugar utilizar el concepto de arco y longitud de arco para introducir el seno y el coseno como funciones reales.

### *Razonamiento y pensamiento matemático*

Moore (2014) propone integrar el razonamiento cuantitativo y covariacional para apoyar el desarrollo de significados en los contextos del círculo y el triángulo, estudia cómo los significados de medida de ángulos, incluyendo el radio como unidad de medida desde el razonamiento cuantitativo, influyen en la construcción y significado de la función seno. El autor caracteriza las acciones mentales del razonamiento covariacional en términos de la función seno.

Por su parte y con base en el marco histórico en torno al trabajo de Euler con la función trigonométrica, Buendía y Montiel (2011) proponen una epistemología de prácticas para la función trigonométrica que se basa en dotarla de significado a partir de: un análisis variacional del movimiento oscilatorio, identificar una unidad mínima de análisis para caracterizar el comportamiento periódico, reconocer la característica acotada del comportamiento (para el caso del seno y el coseno) en relación a las condiciones de la

situación donde emerge la relación trigonométrica, y hacer uso de una unidad de medida congruente, en términos situacionales. Esta epistemología se utilizó para fundamentar y analizar una experiencia con estudiantes del nivel medio superior, donde se reportó lograr la modelación del movimiento de un péndulo a partir de la significación gráfica y experimental de los elementos expuestos (Beltrán y Montiel, 2016).

### **Planteamiento de investigación**

La revisión bibliográfica realizada resalta la importancia de la actividad geométrica, la toma de datos, el análisis de comportamientos, la modelación, el uso de tecnología y la articulación coherente con diversas nociones matemáticas, para el aprendizaje y la comprensión de la Trigonometría. Esto, junto con las dificultades reportadas, cambian el enfoque del dominio de técnicas y algoritmos, a la construcción de significados; y en esa dirección reconocen lo que es propio del pensamiento matemático relativo a cada herramienta.

Nuestro estudio se ubica, entonces, en el tránsito de la razón trigonométrica a la función trigonométrica, para estudiar el desarrollo del pensamiento matemático que se da al transitar de un momento de construcción de significados a otro. Buscamos responder la pregunta: ¿qué condiciones instruccionales, didácticas y de socialización en el aula, hacen emerger las herramientas, los razonamientos y el lenguaje trigonométrico, en la transición de la razón a la función?

El objetivo del estudio es caracterizar el desarrollo del pensamiento trigonométrico, en su transición de lo geométrico a lo variacional, a través de un diseño instruccional fundamentado teóricamente en una perspectiva que atienda al desarrollo del pensamiento matemático.

### **Fundamentación**

La investigación se enmarca en una perspectiva social, particular de una teoría que ha establecido como su objeto de estudio la construcción social y la difusión institucional del conocimiento matemático. La consideración social de la Teoría Socioepistemológica, se orienta al conocimiento matemático mismo; estableciendo en la base de sus objetos de estudio al conocimiento matemático en uso.

Nuestro objeto de estudio se centra en la construcción de significado mediante el uso (del conocimiento trigonométrico) y su proceso de significación progresiva, tanto en la resolución

de tareas como en la transición de una tarea a otra (de un contexto geométrico a un contexto variacional). Estos significados se asumen como constitutivos del pensamiento matemático que desarrolla el sujeto en interacción con su entorno, y se manifiestan en sus producciones, en su lenguaje, en sus gestos, entre otros.

Considerando resultados de investigaciones previas (Scholz, 2014; Beltrán y Montiel, 2016) se tiene contemplado integrar constructos teóricos como las aproximaciones e ideas básicas inherentes que propone Vohns (2006), a las que subyace la estructura geométrica; el razonamiento cuantitativo y covariacional, particular de la trigonometría, que propone Moore (2014); y, naturalmente, los planteamientos del pensamiento y lenguaje variacional (Cantoral, 2004; Caballero y Cantoral, 2013); para caracterizar los significados particulares construidos en cada contexto y su evolución en la transición de uno a otro.

Actualmente nos encontramos articulando estos elementos teóricos, pues serán la base para el diseño de la intervención didáctica, de donde obtener los datos para el estudio.

### Referencias bibliográficas

Araya Chacón, A.M., Monge Sánchez A., y Morales Quirós, C. (2007). Comprensión de las razones trigonométricas: niveles de comprensión, indicadores y tareas para su análisis. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación*, 7(2), 1-31.

Beltrán, P. y Montiel, G. (2016). La modelación en el desarrollo del pensamiento funcional - trigonométrico en estudiantes mexicanas de nivel medio superior. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 19(3), 255-286. doi: 10.12802/relime.13.1931.

Blackett, N. y Tall, D. (1991). Gender and the versatile learning of trigonometry using computer software. *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education XV*, Vol. 1, 144-152.

Buendía, G. y Montiel, G. (2011). From history to research in mathematics education: Socio-epistemological elements for trigonometric functions. Capítulo aceptado en V. Katz & C. Tzanakis (Eds.), *Recent developments on introducing a historical dimension in Mathematics Education*. Mathematical Association of America.

Caballero, M. y Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y el lenguaje variacional. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, vol. 26, pp. 1195-1203. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. Una mirada socioepistemológica. *Actas Latinoamericana de Matemática Educativa*. 17, pp. 1-9. México D.F.: Clame.

- De Kee, S., Mura, R., y Dionne, J. (1996). La compréhension des notions de sinus et de cosinus chez des élèves du secondaire. *For the Learning of Mathematics*, 16(2), 19-27.
- Demir, O. y Heck, A. (2013). A new learning trajectory for trigonometric functions. *Proceedings of the eleventh International Conference on Technology in Mathematics Teaching*, 119-124. Bari, Italy.
- Kendal, M. y Stacey, K. (1998). Teaching Trigonometry. *Australian Mathematics Teacher*, 54(1), 34-39.
- Montiel, G. y Jácome, G. (2014). Significados trigonométricos en el profesor. *Boletim de Educação Matemática Bolema Bolema* 28(50), 1193-1216.
- Moore, K. (2014). Quantitative Reasoning and the Sine Function: The Case of Zac. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(1), 102-138.
- Ross, J. A., Bruce, C. D., y Sibbald, T. M. (2011). Sequencing computer-assisted learning of transformations of trigonometric functions. *Teaching mathematics and its applications*, 30(9), 120-137.
- Scholz, O. (2014). *Construcción de significados para lo trigonométrico en el contexto geométrico del círculo*. Tesis de maestría no publicada, Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada Unidad Legaria. México
- Vohns, A. (2006). Reconstructing basic ideas in geometry an empirical approach. *ZDM*, 38(6), 498-504.
- Weber, K. (2005). Students' understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal*, 17(3), 91-112.