

## CONFLICTOS EN LA DETERMINACIÓN DEL CÁLCULO DE LA POTENCIA EN UN CONTRASTE DE HIPÓTESIS POR ESTUDIANTES DE PSICOLOGÍA

Osmar Darío Vera  
overa17@gmail.com

Universidad Nacional del Quilmes. República Argentina

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.

Modalidad: Comunicación Breve (CB)

Nivel educativo: Educación de adultos

Palabras clave: Potencia de un contraste estadístico, estudiantes universitarios, estudiantes de Psicología, conflictos ontosemióticos.

### Resumen

*Para un problema de contraste estadístico de hipótesis, se pide como pregunta abierta la determinación de la potencia del contraste, dado un valor del parámetro bajo la alternativa y un nivel de significación. Analizamos las prácticas matemáticas implícitas en las respuestas de un grupo de 224 estudiantes de la Licenciatura en Psicología de la Universidad de Huelva a esa pregunta, usando como marco teórico el Enfoque Ontosemiótico de la cognición matemática. Como parte del marco se consideran los objetos y procesos matemáticos intervinientes y emergentes con el objetivo de descubrir los conflictos semióticos que desembocan en respuestas institucionalmente inadecuadas. Se presenta como resultado una clasificación pormenorizada de conflictos semióticos relacionados con los objetos que son parte de la determinación de la potencia de un contraste de hipótesis estadístico.*

### Abstract

For a statistical test of hypothesis, an open question is asked to determine the strength of the contrast, given a value of the parameter under the alternative and a level of significance. We analyze the mathematical practices implicit in the answers of a group of 224 students of the Degree in Psychology of the University of Huelva to that question, using as theoretical framework the Ontosemiotic Approach of mathematical cognition. As part of the framework we consider the intervening and emerging mathematical objects and processes with the aim of discovering semiotic conflicts that lead to institutionally inadequate responses. We present as a result a detailed classification of semiotic conflicts related to objects that are part of the determination of the power of a statistical hypothesis contrast.

### Introducción

El uso e interpretación de la estadística ha jugado un papel destacado en diversas ciencias humanas, en especial en Educación y Psicología, que basan sus investigaciones en datos recogidos en muestras de poblaciones mayores, a las que quieren extender sus conclusiones, para los cuales es condición realizar inferencia estadística. Sin embargo, el uso e interpretación de la inferencia estadística en estas investigaciones no son siempre adecuados, como se muestra en diversas revisiones. Errores de inadecuación en la interpretación, se producen también en estudiantes universitarios (Vallecillos, 1994; Vera, Díaz y Batanero, 2011).

En particular un objeto importante, pero muy poco tratado para la enseñanza en lo que se refiere al contraste de hipótesis es la comprensión del cálculo de la potencia de una prueba, la que se asocia con la probabilidad de cometer error tipo II, puesto que se puede interpretar también como la probabilidad de no cometer este error.

En este trabajo abordamos este objeto estadístico. Realizamos un estudio cualitativo de la determinación de la potencia estadística en un problema de prueba de hipótesis que un grupo de 224 estudiantes españoles en Psicología, después de haber seguido un curso de inferencia. Nos apoyamos en nociones teóricas del enfoque onto-semiótico de la cognición matemática (Godino, Batanero y Font, 2007). Realizamos un análisis semiótico de las respuestas a dichas tareas, clasificándolas e identificando conflictos semióticos. Con todo ello aportamos elementos al profesor que le ayudará a planificar la enseñanza del tema. Seguidamente, presentamos los fundamentos del trabajo que incluyen antecedentes y marco teórico, el método, los resultados y la discusión.

### **Antecedentes**

La interpretación incorrecta más extendida relacionada con la comprensión del contraste de hipótesis es la de cambiar los términos de la probabilidad condicional en la definición del nivel de significación  $\alpha$  (probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo cierta), interpretándolo como la probabilidad de que la hipótesis nula sea cierta, habiendo tomado la decisión de rechazarla (Vallecillos, 1994). El mismo intercambio de condicional se hace en la interpretación del valor  $p$  (probabilidad de obtener un valor igual o más extremo al dado, si la hipótesis nula es cierta) lo cual se interpreta como la probabilidad de que la hipótesis

nula sea cierta si se obtuvo el valor dado del estadístico de prueba. La naturaleza condicional de la potencia de la prueba implica que se cometan las mismas equivocaciones antes mencionadas. Más concretamente, y utilizando el marco teórico que se describe a continuación, queremos analizar con mayor profundidad los posibles planteamientos incorrectos en la determinación de la potencia de una prueba de hipótesis.

### **Marco Teórico**

En este trabajo nos basamos en ideas teóricas propuestas en el enfoque ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2007) en los que se sugiere que el significado de los objetos matemáticos o estadísticos (por ejemplo, los conceptos de potencia de una prueba estadística) es una entidad compleja, en la que intervienen los siguientes tipos de objetos matemáticos primarios: situaciones-problemas, lenguaje, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos. Estos autores, destacan la diferencia entre significado institucional y personal; el primero refleja las prácticas matemáticas que la institución intenta transmitir al estudiante, el segundo es el adquirido por el estudiantes en el seno de la institución que podrían coincidir o no con las que esta pretende. Utilizaremos el método de análisis semiótico propuesto por estos autores, para analizar las respuestas incorrectas de los estudiantes de Psicología en el planteamiento de la potencia de la prueba. Este análisis consiste en la identificación de las prácticas matemáticas de los estudiantes al tratar de plantear la potencia, así como de los objetos y procesos matemáticos implicados. Como resultado se identificarán conflictos semióticos de estos estudiantes, que se producen al realizar una función semiótica no adecuada desde el punto de vista institucional.

### **Método**

La muestra estuvo formada por 224 estudiantes de Psicología de la Universidad de Huelva que habían cursado el primer año la asignatura de Análisis de Datos I y Análisis de Datos II (correspondía al segundo año de estudios), donde se impartían conceptos de: muestreo, estimación de intervalos de confianza y contraste de hipótesis sobre medias y proporciones,

así como análisis de varianza. Los datos fueron recogidos dentro de la asignatura Análisis de Datos II, y los estudiantes participantes estaban habituados a resolver problemas de contraste de hipótesis. Como parte de una evaluación de la asignatura se les propuso el problema que se presenta en Figura 1.

*Problema:* Se sabe por diversos trabajos de investigación que los niños de seis años tienen una velocidad lectora media de 40 palabras por minuto, con varianza igual a 16. Un profesor quiere saber si los niños de su clase se sitúan o no en la media de palabras por minuto. Para ello mide la velocidad de lectura en los 25 niños de su clase, obteniendo una media de 43 palabras por minuto. Determinar la potencia del contraste si partimos de que el valor que toma la media poblacional bajo la hipótesis alternativa es igual a 42, con nivel de significación 0.05.

Figura 1. Tarea planteada a los estudiantes de la muestra

La tarea fue resuelta por los estudiantes por escrito y en forma individual. Se hizo un análisis cualitativo una vez recogidos los datos, el mismo consistió en un proceso cíclico e inductivo donde se compararon las respuestas para llegar a una categorización.

En las respuestas correspondientes al problema, el estudiante he de determinar la potencia del contraste, dado un valor de la media poblacional en la hipótesis alternativa y un nivel de significación para el contraste. Se clasificaron las respuestas como correctas, parcialmente correctas e incorrectas; se encontró un solo tipo de respuesta correcta; las categorías encontradas para las parcialmente correctas han sido tres, donde en general consisten en usar la varianza en lugar de la desviación estándar a la hora de tipificar, incorrecta lectura de la tabla para obtener el percentil o en el cálculo de probabilidades para un intervalo. Se encontraron solo dos categorías para las incorrectas, en algunas se comete error en el cálculo del percentil y estandarización y en otras en el uso de la fórmula del estadístico de prueba y del intervalo para la probabilidad de error tipo II. A continuación se analizan los resultados.

## **Resultados y Discusión**

### *Análisis semiótico de las respuestas correctas*

*C. Calcula los extremos del intervalo para obtener la probabilidad de no rechazar la hipótesis nula y estandariza correctamente. Calcula el valor correcto de la potencia. Reproducimos un ejemplo en la Tabla 1, para ello dividimos la respuesta en tres unidades*

donde analizamos cada una de las expresiones generadas por el estudiantes en la columna contenidos. Observamos, que el estudiante ha de poner en relación gran variedad de conceptos diferentes, propiedades y procedimientos con su argumentación, y aplicarlos, mediante un proceso de particularización al contexto del problema.

En particular debe establecer la relación entre la probabilidad de error tipo II y la potencia de un contraste de hipótesis, y reconocer que ésta también es variable. El alumno ha de comprender que la potencia del contraste es una función cuyos valores cambian a medida que lo hace el valor de la media poblacional bajo la hipótesis alternativa. Por ello no es posible controlar los dos errores a la vez; estos yerros, junto con la potencia del contraste que mide la capacidad del test para rechazar una hipótesis nula falsa, tienen una naturaleza condicional.

Tabla 1. Análisis semiótico de una respuesta correcta

Unidad	Expresión	Contenido
U1	$1.96 = \frac{x-40}{\frac{4}{\sqrt{41}}} \rightarrow x = (1.96 \cdot 0.6) + 40 = 41.176$ $-1.96 = \frac{x-40}{\frac{4}{\sqrt{41}}} \rightarrow x = (-1.96 \cdot 0.6) + 40 = 38.824$ <p><i>Se desmultiplica</i> <i>Se tipifican con <math>\mu=42</math></i></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- El alumno identifica los percentiles (<math>\pm 1,96</math>) para calcular los extremos del intervalo de la zona de no rechazo (particularización de un concepto).</li> <li>- Encuentra los extremos de tal intervalo (procedimiento).</li> <li>- Mediante la frase “se tipifican con <math>\mu = 42</math>” enuncia que a esos valores determinados antes, le restara 42 y dividirá por la desviación de la media muestral (interpretación y cambio de representación).</li> </ul>
U2	$x = \frac{41.176 - 42}{0.6} = -0.53$ $x = \frac{38.824 - 42}{0.6} = -4.46$ <p><i>Se buscan en la tabla y restan</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Tipifica con <math>\mu = 42</math> y la desviación estándar de la media muestral los extremos del intervalo hallados en U1 (procedimiento).</li> <li>- Con la frase “se buscan en la tabla y restan”, indica que calculara las probabilidades acumuladas a izquierda para -0,53 y -4,46 (campo de problemas-procedimiento).</li> </ul>
U3	$-0.53 \rightarrow 0.2987$ $-4.46 \rightarrow \frac{0.0000}{0.2987} = \beta$ $1 - \beta = 0.2987 + 1 = 0.7014$	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Encuentra los valores de las probabilidades acumuladas en los puntos indicados para U2 (procedimiento).</li> <li>- Resta los valores obtenidos en el orden correcto (propiedad).</li> <li>- Iguala el resultado usando símbolo adecuado para la probabilidad de error tipo II, <math>\beta</math> (interpretación y cambio de representación).</li> <li>- Resta de la unidad el valor de <math>\beta</math>, naturaleza complementaria de la potencia (propiedad, definición). Obtiene así la potencia de la prueba.</li> </ul>

*Análisis semiótico de las respuestas parcialmente correctas*

La complejidad de la tarea da lugar a observar varias categorías de respuestas parcialmente correctas, que agrupamos según cometen o no algún error en la determinación de los extremos del intervalo para el cálculo de la probabilidad de no rechazar la hipótesis nula.

*PC1. Usa la varianza, en vez de la desviación típica en la tipificación, comete equivocación en la determinación del percentil.* En esta categoría hemos agrupado a todos aquellos estudiantes que no determinan correctamente los extremos del intervalo para calcular la zona de aceptación, usando para estandarizar el valor de la varianza en lugar del de la desviación estándar además de ese fallo, no logran calcular adecuadamente los extremos del intervalo para la probabilidad de no rechazar la hipótesis nula, pues el percentil no es el adecuado. Este fallo lo arrastra a lo largo de toda la tarea y llega a un resultado erróneo. En la Tabla 2 realizamos un análisis semiótico de un ejemplo. Por cuestiones de espacio las categorías *PC2* y *PC3* pueden verse en el Anexo.

Tabla 2. Análisis semiótico de un ejemplo en la categoría PC1

Expresión	Contenido
<p> <math>\mu = 40</math>  <math>\mu_1 = 42</math>  <math>\sigma = 32</math>  <math>H_0: \mu = 42</math>  <math>H_1: \mu &lt; 42</math>  <math>z = \frac{a - \mu}{\sigma} \Rightarrow -2.81 = \frac{a - 40}{32} \Rightarrow (-2.81 \times 32) + 40 = a \Rightarrow a = 31.00</math>  <math>z = \frac{b - \mu}{\sigma} \Rightarrow 2.81 = \frac{b - 40}{32} \Rightarrow 2.81 \times 32 + 40 = b \Rightarrow b = 48.99</math>  <math>z_\alpha = \frac{31 - 42}{32} = \frac{-11}{32} = -0.34 \Rightarrow 0.0003</math>  <math>z_\beta = \frac{48.99 - 42}{32} = \frac{6.99}{32} = 0.218 \Rightarrow 0.9851</math>  <math>1 - \beta = 1 - 0.9851 = 0.0149</math> (1.49%)         </p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Indica los valores que usara para la media poblacional bajo hipótesis nula como alternativa (particularización de un concepto).</li> <li>- Representa la función de densidad, e indica un valor erróneo (<i>conflicto</i>) de los percentiles. Toma como <math>\alpha/2</math> 0,0025 en lugar de 0,025 (procedimiento).</li> <li>- Otro <i>conflicto</i> es utilizar la varianza en lugar de la desviación estándar al estandarizar (concepto-procedimiento).</li> <li>- Confunde otra vez la varianza con la desviación estándar al tipificar (procedimiento). Las probabilidades acumuladas que encuentra son correctas (operaciones).</li> <li>- Arrastrando los conflictos señalados llega a un valor posible para <math>\beta</math> (concepto).</li> <li>- Calcula la potencia restando de 1 del valor hallado para <math>\beta</math> (definición). Da una respuesta final usando notación en porcentajes (cambio de representación).</li> </ul>

*Análisis semiótico de las respuestas incorrectas*

*II. Error en el cálculo del percentil y estandarización.* En esta categoría hemos clasificado a los estudiantes que han cometido los siguientes fallos: el percentil no es el que corresponde; en la estandarización para el cálculo de la probabilidad de no rechazar la hipótesis nula usan la varianza en lugar de la desviación estándar; al calcular la probabilidad de error tipo II, no usan el valor consignado en la tarea, sino la media muestral. Finalmente calculan incorrectamente la probabilidad para el intervalo hallado, produciendo un valor mayor que la unidad. De este resultado, luego de restar de uno, obtiene una cantidad negativa para la potencia de la prueba. En la Tabla 3, realizamos un análisis semiótico de esa respuesta. Por cuestiones de espacio, la categoría *I2* puede leerse en el Anexo.

Hemos encontrado pocas respuestas totalmente correctas, apenas en un 14,3%, se desprende de la Tabla 4 que probablemente indiquen la complejidad semiótica de esta tarea para cuya solución entran en juego una gran cantidad de conceptos, procedimientos, argumentos; además debe utilizarse un lenguaje muy preciso para arribar a una respuesta correcta en su totalidad. Hay más respuestas parcialmente correctas (25,5%), clasificadas en las que confunden varianza con desviación estándar, cometen algún error en la tipificación de variables y tienen algún fallo en cuanto al cálculo de probabilidades que están en juego en la tarea; e incorrectas. Los errores están relacionados con la estandarización (Cañadas, 2012), la confusión entre media muestral y poblacional (pues tipifica usando el valor de la media muestral y no el de la media poblacional en la alternativa), la elección de la fórmula para el estadístico de prueba y también en el cálculo de probabilidad. Todos estos casos implican llegar a respuestas incorrectas o no dar respuesta.

Tabla 3. Análisis semiótico de un ejemplo en la categoría I1

Expresión	Contenido
-----------	-----------

$H_0: \mu = 40$   
 $H_1: \mu = 42$

$N(40, 3^2)$

$-1.64 = \frac{\bar{x}_1 - 40}{3/\sqrt{2}} \rightarrow \bar{x}_1 = 34.252$   
 $1.64 = \frac{\bar{x}_2 - 40}{3/\sqrt{2}} \rightarrow \bar{x}_2 = 45.248$

$P(34.252 < \bar{x} < 45.248)$   
 $P\left(\frac{34.252 - 40}{3/\sqrt{2}} < Z < \frac{45.248 - 40}{3/\sqrt{2}}\right)$   
 $P(-2.57 < Z < 0.902)$   
 $0.7025 + 2.57 = 3.2725$

$1 - P = -2.2795$

- Especifica los valores supuestos de la hipótesis nula y alternativa en  $\mu = 40$  y  $\mu = 42$  y representa la función de densidad. Aparece un *conflicto*, ya que confunde el percentil (particularización de conceptos).
- Indica mediante el símbolo “ $N(40, 3^2)$ ” la distribución que usará, generando un *conflicto*, pues no es correcta la desviación estándar (propiedad, procedimiento).
- Identifica los percentiles para calcular los extremos del intervalo de la zona de no rechazo (particularización de un concepto). *Conflicto* a pesar que encuentra los extremos de tal intervalo sin fallos (procedimiento), pero arrastrando error.
- Otro *conflicto* al especificar que tipificara con el valor de  $\mu = 43$  para la probabilidad error tipo II (procedimiento-concepto). En la estandarización, usa  $\sigma^2$  en lugar de  $\sigma$  (propiedad).
- *Conflicto*, al obtener una probabilidad mayor que la unidad (procedimiento, propiedad).
- Presenta un *conflicto*, ya que obtiene como resultado una potencia con valor menor que 1 (propiedad).

Un alto porcentaje (casi 40%, al contabilizar el porcentaje de correctas y parcialmente correctas) conoce el procedimiento para la determinación de la potencia de un contraste, logran luego de seguir una serie de pasos coherentes una respuesta, siendo menor el porcentaje (11,1%) que llegan a una respuesta incoherente, que entre otras están en relación con exhibir una probabilidad cuya valor sea mayor que la unidad o negativa. Finalmente presentamos los conflictos encontrados para la resolución de esta tarea.

Tabla 4. Frecuencias (y porcentajes) de respuestas para la potencia del contraste

	Categorías	Frecuencia	%
C.	Correcta	32	14,3
PC1.	Error en tipificación, usando la varianza en lugar de desviación al estandarizar, e incorrecto el percentil.	47	21,0
PC2.	Error en la tipificación y no divide por el tamaño de muestra	4	1,8
PC3.	Intercambia los extremos al calcular probabilidad en un intervalo.	6	2,7
I1.	Errado percentil, mal la estandarización, vuelve a tipificar usando $\bar{x}$ (43).	18	8,0
I2.	Error en formula de estadístico de prueba y del intervalo para la P(ETII).	7	3,1
I3.	No relacionadas con la tarea.	19	8,5
S/R		91	40,6
	Total	224	100,0

### Conflictos en el cálculo de la potencia

En el análisis de las respuestas se han encontrado los siguientes conflictos semióticos que han llevado a los alumnos a un cálculo erróneo de la potencia: *confunde la varianza y desviación estándar en la tipificación* (que aparece en las categorías PC1, PC2; I1 e I2, en total 33,9% de los estudiantes); *confusión en el cálculo de probabilidades* (que aparece en

las categorías PC1, PC3; I1 e I2; en total 34,8% de los estudiantes). Lleva a probabilidades incorrectas, a veces mayores que la unidad; *confusión para el cálculo de percentiles* (aparece en las categorías PC2 e I1; en total un 9,8% de estudiantes). No hemos encontrado descrito este conflicto; *no usan la distribución de la media muestral en el cálculo del estadístico de prueba* (aparece en las categorías PC2, en total en 1,8% de estudiantes) y *mantiene una confusión entre media muestral y poblacional* (aparece en las categorías I1 e I2, en total un 11,1% de estudiantes).

### **Referencias bibliográficas**

- Cañadas, G. (2012). *Comprensión intuitiva y aprendizaje formal de las tablas de contingencia en alumnos de psicología*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- Vallecillos, A. (1994). *Estudio teórico-experimental de errores y concepciones sobre el contraste estadístico de hipótesis en estudiantes universitarios*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Vera, O; Díaz, C. y Batanero, C. (2011). Dificultades en la formulación de hipótesis estadísticas por estudiantes de Psicología. *UNION: Revista Iberoamericana de Educación Estadística*, N° 27, p.41-61. ISSN: 1815-0640.