

El Teorema de Morley

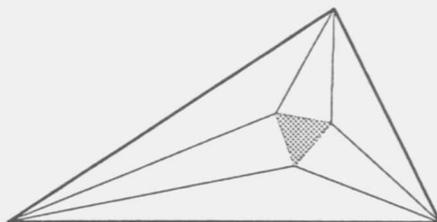
Parte I: Los movimientos afines de la recta compleja

Paulo Tirao

Carl Friedrich Gauss (1777–1855) fue el primero en afirmar que es imposible trisecar un ángulo usando solamente regla y compás. Sin embargo, la primera demostración publicada se debe a Pierre Laurent Wantzel (1814–1848) y apareció en 1837.

Aparentemente, desde entonces los problemas relacionados con la trisección de algún ángulo fueron dejados de lado. Una excepción fue el matemático inglés Frank Morley (1860–1937) que alrededor de 1900 descubrió uno de los teoremas más sorprendentes de la geometría euclídea del plano.

Teorema. *Los puntos de intersección de trisectrices adyacentes de los ángulos de un triángulo arbitrario son los vértices de un triángulo equilátero.*



El teorema de Morley

El teorema aparece como consecuencia de una teoría más general desarrollada por Morley para estudiar la geometría de n -rectas en el plano. Es así que nunca enunció el teorema en forma aislada ni dio alguna prueba directa de él, aunque sí lo divulgó inmediatamente entre amigos y colegas.

Las primeras pruebas publicadas aparecieron en 1908. Hoy existe un sinnúmero de demostraciones distintas; la más reciente, conceptual y muy original se debe a Alain Connes [2], quien presenta al teorema de Morley como una propiedad abstracta de un *grupo*: el grupo de movimientos afines de la recta (compleja). La consideración del grupo de movimientos rígidos del plano, elección en principio más natural, no conduce a “buen puerto”. Por ello la elección del grupo adecuado es un hecho destacable.

Queremos acercar a ustedes la prueba de Alain Connes, que seguramente es menos conocida (por ahora) que muchas otras. Es un ejemplo más de

como el álgebra *abstracta* provee pruebas en geometría. Con los prerequisites adecuados, que no son demasiados ni tan difíciles de adquirir, la prueba es simple y corta. Condensa en un sólo enunciado el teorema de Morley en toda su extensión. Como veremos más adelante no sólo aparece el triángulo equilátero de la figura, sino que aparecerán algunos más.

Morley conocía desde el primer momento la versión completa de su teorema. La primera *solución completa* apareció en 1913. Las pruebas geométricas incluyendo todos los casos son más complicadas que aquellas que sólo consideran el primer caso. Una virtud que merece destacarse de la prueba de Alain Connes es que el enunciado principal del cuál se sigue el Teorema de Morley sugiere la existencia de todos los demás triángulos equiláteros que conforman la solución completa. Es decir, la solución de un problema nos muestra el enunciado y la prueba de otro.

En la primera parte comenzaremos discutiendo los movimientos afines de la recta real y a partir de esto introduciremos la noción de grupo abstracto para estudiar entonces el grupo de movimientos afines de la recta real. Estudiaremos luego el grupo de movimientos afines de la recta compleja. La recta compleja se identifica naturalmente con el plano euclídeo, que nos es muy familiar. Para entender ahí a los movimientos afines de la recta compleja repasaremos las operaciones de los números complejos y su interpretación geométrica en el plano euclídeo. Además estudiaremos particularmente a las rotaciones y daremos una caracterización de triángulos equiláteros en término de las raíces cúbicas de la unidad. El lector interesado en las transformaciones del plano y los números complejos, puede consultar [4].

En la segunda parte ¹ desarrollaremos la prueba de Alain Connes minuciosamente. Haremos todas las cuentas sin evitar los tecnicismos. Después de todo alguna vez hay que pagar algún precio. Con todo lo aprendido en la primera parte esto no resultará difícil. Dedicaremos entonces buen tiempo a comprender como surgen todos los triángulos de la solución completa y a comprender como se construyen.

Incluimos al final la referencia al trabajo de Alain Connes y una de un libro de Coxeter, uno de los pocos libros bien conocidos que enuncian y prueban (geoméricamente) el Teorema de Morley. Además incluimos una referencia con una recopilación sobre la historia del este teorema que contiene 150 referencias, con lo cual nos sentimos liberados de acercarnos alguna otra indicación.

Este material fue el contenido de un curso para profesores que dicté en

¹La Parte II: La prueba de Alain Connes, aparecerá en el próximo número de esta revista.

Setiembre de 2001, en la ciudad de San Luis, en la XXIV Reunión de Educación Matemática llevada a cabo en el marco de la Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina.

1 Los movimientos afines de la recta real

Para entender las transformaciones o movimientos afines de la recta real usaremos la representación gráfica usual.

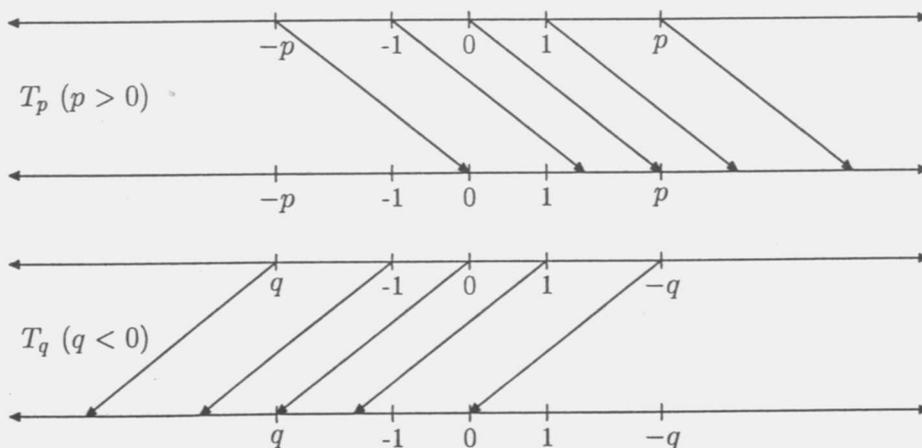


Comenzamos considerando tres tipos básicos de movimientos afines:

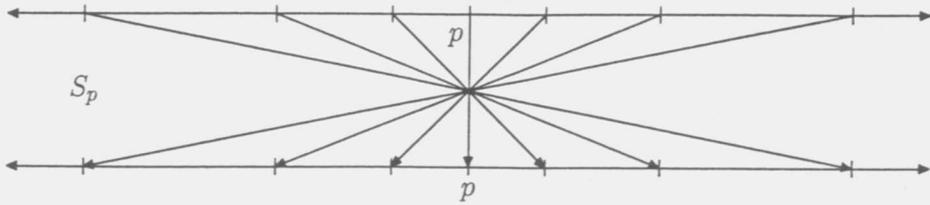
- (i) Traslaciones.
- (ii) Reflexiones.
- (iii) Homotecias.

Cada uno de estos tipos conforman una familia de transformaciones. Para cada número real p hay una traslación T_p y una reflexión con centro p , S_p . Para cada p y cada $\lambda > 0$ hay una homotecia con centro p y razón λ , H_p^λ . Cada una de éstas actúa geoméricamente como mostramos a continuación.

Traslaciones por $p > 0$ y $q < 0$

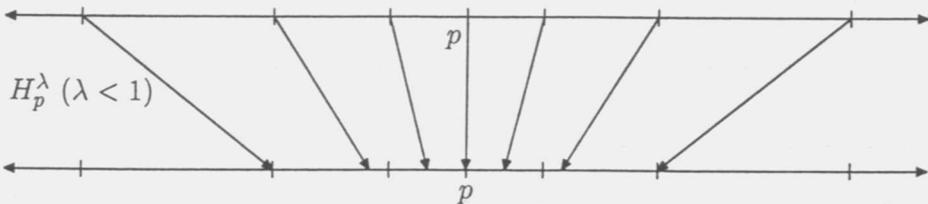
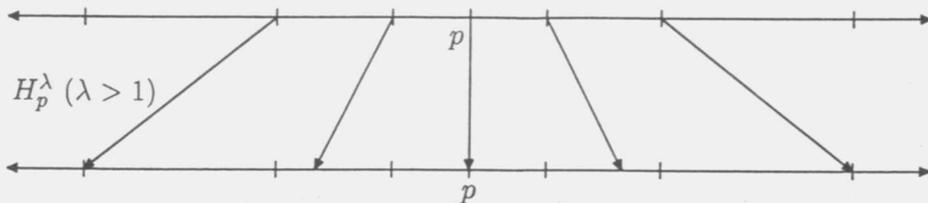


Reflexión con centro p



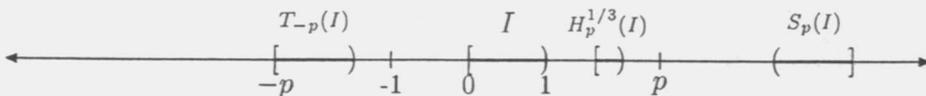
Es claro que el dibujo no depende de la posición relativa de p respecto al 0; por esto no distinguimos al 0.

Homotecia con centro p y razón $1 < \lambda$ y $1 > \lambda (> 0)$



Como en el caso anterior no hace falta distinguir al 0.

Más adelante trataremos los movimientos afines de la recta compleja. Veremos que hay muchas similitudes con éstos de la recta real, pero también habrá algunas diferencias. Quizá las diferencias son más evidentes en la manera en que actúan, unos en la recta real y los otros en el plano euclídeo. A modo de ejemplo, elegimos un subconjunto de la recta real (un intervalo semi-abierto) y graficamos su imagen por distintos movimientos afines.



Es claro, a partir de los dibujos anteriores, que todas ellas son biyectivas como funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} y por lo tanto tienen inversas. No es difícil convencerse de que las inversas de estas transformaciones son del mismo tipo. En efecto, la inversa de una traslación es otra traslación (en sentido inverso). La inversa de una reflexión es ella misma. Y la inversa de una homotecia es otra homotecia, con el mismo centro, y donde las razones de ambas son una la inversa (multiplicativa) de la otra. Más precisamente,

$$\begin{aligned}(T_p)^{-1} &= T_{-p}; \\ (S_p)^{-1} &= S_p; \\ (H_p^\lambda)^{-1} &= H_p^{\lambda^{-1}}.\end{aligned}$$

Recordamos que si f es una función (biyectiva) f^{-1} denota su inversa y no el cociente $\frac{1}{f}$. Sin embargo, si λ es un número real distinto de 0, entonces $\lambda^{-1} = \frac{1}{\lambda}$. Así, para las funciones tenemos que $f \circ f^{-1} = \text{Id} = f^{-1} \circ f$ y para los números tenemos que $\lambda \lambda^{-1} = 1 = \lambda^{-1} \lambda$. Notemos que la función identidad $\text{Id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es la traslación T_0 y también es la homotecia H_p^1 , para cualquier número real p .

Ejemplos 1.1. Consideremos algunas transformaciones afines básicas, sus inversas y algunas composiciones y veamos como actúan en la recta real.

1. Consideremos la traslación T_2 , su inversa T_{-2} y el intervalo $I = (1, 4]$. Entonces:

$$\begin{aligned}T_2(I) &= (1 + 2, 4 + 2] = (3, 6]; \\ T_2 \circ T_2(I) &= (1 + 2 + 2, 4 + 2 + 2] = (5, 8]; \\ T_{-2}(I) &= (1 - 2, 4 - 2] = (-1, 2]; \\ T_{-2} \circ T_{-2}(I) &= (1 - 2 - 2, 4 - 2 - 2] = (-3, 0].\end{aligned}$$

2. Consideremos la reflexión S_3 (su propia inversa) y los intervalos $I = [1, 4)$ y $J = [-1, 1)$. Entonces:

$$\begin{aligned}S_3(I) &= (2, 5]; \quad S_3(J) = (5, 7]; \\ S_3 \circ S_3 \circ S_3(I) &= S_3 \circ S_3((2, 5]) = S_3([1, 4)) = (2, 5].\end{aligned}$$

3. Consideremos las homotecias H_3^2 y $H_3^{1/2}$ y los intervalos $I = [1, 4)$ y

$J = [-1, 1)$. Entonces:

$$\begin{aligned}H_3^2(I) &= (-1, 5]; & H_3^2(J) &= [-5, -1); \\H_3^{1/2}(I) &= [2, 3.5); & H_3^{1/2}(J) &= [1, 2); \\H_3^2 \circ H_3^2(I) &= H_3^2((-1, 5]) = (-5, 7]; \\H_3^{1/2} \circ H_3^{1/2}(J) &= H_3^{1/2}([1, 2)) = [2, 2.5).\end{aligned}$$

Fórmulas. Cada una de estas transformaciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} está definida por medio de la suma y del producto de los números reales. Escribamos fórmulas para todas ellas.

(i) Para la traslación por p , no es difícil convencerse de que

$$T_p(x) = p + x.$$

(ii) La reflexión con centro p lleva un punto x a distancia d de p a otro punto en la semirecta opuesta a distancia d de p . Así dado x escribimos $x = p + (x - p)$ y luego $d = |x - p|$. Entonces la imagen de x es $p - (x - p)$. Por lo tanto

$$S_p(x) = 2p - x.$$

(iii) La homotecia con centro p y razón $\lambda > 0$ lleva un punto a distancia d de p a otro sobre la misma semirecta a distancia λd . Si escribimos como antes $x = p + (x - p)$, entonces la imagen por H_p^λ es $p + \lambda(x - p)$. Por lo tanto

$$H_p^\lambda(x) = \lambda x + (1 - \lambda)p.$$

A partir de estas fórmulas para algunas transformaciones afines básicas podemos intentar construir nuevas transformaciones componiendo algunas de ellas.

Ejemplos 1.2.

1. Comencemos componiendo 2 traslaciones.

$$\begin{aligned}(T_p \circ T_q)(x) &= T_p(x + q) = p + q + x \\ &= T_{p+q}(x).\end{aligned}$$

Es decir

$$T_p \circ T_q = T_{p+q}.$$

Por lo tanto la composición de 2 traslaciones es otra traslación.

2. Compongamos 2 reflexiones.

$$\begin{aligned}(S_p \circ S_q)(x) &= S_p(2q - x) = 2p - (2q - x) = x + 2p - 2q \\ &= T_{2p-2q}(x).\end{aligned}$$

Es decir

$$S_p \circ S_q = T_{2p-2q}.$$

Por lo tanto la composición de 2 reflexiones no es otra reflexión, en cambio es una traslación.

3. Probemos con 2 homotecias con el mismo centro.

$$\begin{aligned}(H_p^\lambda \circ H_p^\mu)(x) &= H_p^\lambda(\mu x + (1 - \mu)p) = \lambda\mu x + \lambda(1 - \mu)p + (1 - \lambda)p \\ &= \lambda\mu x + (1 - \lambda\mu)p \\ &= H_p^{\lambda\mu}(x).\end{aligned}$$

Es decir

$$H_p^\lambda \circ H_p^\mu = H_p^{\lambda\mu}.$$

Por lo tanto la composición de 2 homotecias con el mismo centro es otra homotecia con el mismo centro.

Podríamos hacer más experimentos, pero en algunos casos el resultado no será como en estos ejemplos. Por ejemplo, si se componen 2 homotecias con distinto centro no se obtiene otra homotecia, ni una reflexión, ni tampoco una traslación.

Por lo pronto a partir de estos ejemplos podemos hacer las siguientes observaciones.

Observaciones 1.1.

1. La composición de traslaciones es conmutativa pues la suma de números reales lo es y luego $T_p \circ T_q = T_{p+q} = T_{q+p} = T_q \circ T_p$.
2. La composición de reflexiones no es, en general, conmutativa ya que $S_p \circ S_q = T_{2p-2q} \neq T_{2q-2p} = S_q \circ S_p$.
3. Las reflexiones son *idempotentes*, es decir $S_p^2 = S_p \circ S_p = \text{Id}$. Esto es claro tanto desde un punto de vista geométrico como algebraicamente.

4. La reflexiones con centro distinto de 0 se pueden describir y escribir en términos de la reflexión con centro 0 y dos traslaciones. El efecto de reflejar respecto a un $p \neq 0$ es el mismo que resulta si primero trasladamos el punto p al 0, ahí reflejamos (respecto al 0) y luego devolvemos el 0 al punto p . Es decir $S_p = T_p \circ S_0 \circ T_{-p}$. Para aquellos que no confíen, verificamos usando las fórmulas que tenemos.

$$\begin{aligned} T_p \circ S_0 \circ T_{-p}(x) &= T_p \circ S_0(x - p) \\ &= T_p(p - x) \\ &= 2p - x \\ &= S_p(x). \end{aligned}$$

5. La homotecias con centro distinto de 0 se pueden describir y escribir en términos de las homotecias con centro 0 y dos traslaciones. De manera análoga al caso anterior tenemos que $H_p^\lambda = T_p \circ H_0^\lambda \circ T_{-p}$. En efecto,

$$\begin{aligned} T_p \circ H_0^\lambda \circ T_{-p}(x) &= T_p \circ H_0^\lambda(x - p) \\ &= T_p(\lambda(x - p)) \\ &= p + \lambda x - \lambda p \\ &= \lambda x + (1 - \lambda)p \\ &= H_p^\lambda. \end{aligned}$$

Para avanzar un poco más notemos que todas las fórmulas para las transformaciones básicas que consideramos tienen la forma general

$$T(x) = \lambda x + p.$$

Más aún todas las composiciones que hicimos (y las que no hicimos) tienen esta misma forma. Por otro lado la transformación T definida por $T(x) = \lambda x + p$, con $\lambda \neq 0$, es siempre la composición de 2 o 3 de las transformaciones básicas que consideramos. En efecto

$$T = \begin{cases} T_p \circ H_0^\lambda, & \text{si } \lambda > 0; \\ T_p \circ H_0^{-\lambda} \circ S_0, & \text{si } \lambda < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Es muy fácil chequear esta identidad evaluando ambos miembros en un x arbitrario. Veamos el caso difícil, cuando $\lambda < 0$.

$$T_p \circ H_0^{-\lambda} \circ S_0(x) = T_p \circ H_0^{-\lambda}(-x)$$

(notamos que $-\lambda > 0$, por lo tanto la homotecia está bien definida)

$$\begin{aligned} &= T_p(-\lambda(-x)) \\ &= T_p(\lambda x) \\ &= \lambda x + p \\ &= T(x). \end{aligned}$$

Es natural entonces considerar la familia de todas las transformaciones como T para cualquier valor de p y de $\lambda \neq 0$. Así arrivamos a la familia de transformaciones que queremos estudiar.

Definición 1.1. El conjunto de movimientos afines de la recta real es el conjunto de transformaciones $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} = \{T_{\lambda,p} : \lambda \neq 0, p \in \mathbb{R}\}$ donde $T_{\lambda,p}(x) = \lambda x + p$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Proposición 1.1. *El conjunto de movimientos afines de la recta real $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$, es cerrado por la composición de funciones. Además se tienen las siguientes propiedades:*

(i) Para cualquier $T_{\lambda,p}$ se tiene

$$T_{\lambda,p} \circ T_{1,0} = T_{\lambda,p} = T_{1,0} \circ T_{\lambda,p}.$$

(ii) La función inversa del movimiento afín $T_{\lambda,p}$ es otro movimiento afín. Precisamente

$$(T_{\lambda,p})^{-1} = T_{\lambda^{-1}, -\lambda^{-1}p}. \quad (2)$$

Prueba. Tomemos 2 movimientos afines arbitrarios, $T_{\lambda,p}$ y $T_{\mu,q}$ y evaluemos la composición en un número real x . Tenemos

$$\begin{aligned} (T_{\lambda,p} \circ T_{\mu,q})(x) &= T_{\lambda,p}(\mu x + q) \\ &= \lambda(\mu x + q) + p \\ &= \lambda\mu x + \lambda q + p \end{aligned}$$

por lo tanto tenemos que, como funciones,

$$T_{\lambda,p} \circ T_{\mu,q} = T_{\lambda\mu, \lambda q + p}. \quad (3)$$

Poniendo en esta fórmula $\mu = 1$ y $q = 0$ resulta en particular la primera identidad de (i). La otra se sigue análogamente.

Para probar (ii) debemos verificar que

$$T_{\lambda,p} \circ T_{\lambda^{-1},-\lambda^{-1}p} = \text{Id} = T_{\lambda^{-1},-\lambda^{-1}p} \circ T_{\lambda,p},$$

que también se siguen de la fórmula (3). Veamos la primera.

$$\begin{aligned} T_{\lambda,p} \circ T_{\lambda^{-1},-\lambda^{-1}p} &= T_{\lambda\lambda^{-1},\lambda(-\lambda^{-1}p)+p} \\ &= T_{1,-p+p} \\ &= T_{1,0} \\ &= \text{Id} \end{aligned}$$

La segunda queda como ejercicio (fácil) para el lector. □

Esta proposición dice exactamente que los movimientos afines de la recta real, con la composición, son un ejemplo de *grupo*.

La noción de grupo es fundamental en matemática. Los grupos aparecen naturalmente en muy diversas situaciones y en distintas ramas de la matemática.

Definición 1.2. Un conjunto G con una operación asociativa $\cdot : G \times G \rightarrow G$ es un grupo si se satisfacen las siguientes 2 propiedades:

(i) Existe un elemento $e \in G$ tal que

$$g \cdot e = g = e \cdot g, \quad \forall g \in G.$$

(ii) Para todo $g \in G$, existe un $h \in G$ tal que

$$g \cdot h = e = h \cdot g.$$

La operación \cdot es una asignación que asocia a cada par de elementos de G un tercer elemento. Usualmente se la llama *producto*. No es difícil ver que el elemento e de (i) es único, es decir hay un único elemento con esa propiedad en G . Este único elemento se llama *identidad* de G . Similarmente se puede ver que para cada g el elemento h de (ii) también es único. Este elemento se llama *inverso* de g en G .

En el caso que nos interesa tenemos $G = \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ y la operación es la composición. Dados dos movimientos afines su composición es un tercer movimiento afín. Esta operación es asociativa, pues la composición de funciones lo es. La Proposición 1.1, como dijimos, dice exactamente que $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ es un grupo.

Antes de continuar damos algunos otros ejemplos de grupos.

Ejemplos 1.3.

1. $(\mathbb{Z}, +)$, el conjunto de números enteros con la operación 'suma de enteros'. El elemento identidad es el 0 y el inverso de un entero p es el entero $-p$.
2. $(\mathbb{R} - \{0\}, \times)$, el conjunto de números reales distintos de 0 con la operación 'producto de números reales'. La identidad es el 1 y el inverso de un x cualquiera es $\frac{1}{x}$. Notamos que si no hubiéramos dejado afuera al 0 no tendríamos un grupo pues no hay ningún número real que multiplicado por 0 de 1.
3. Las simetrías del cuadrado con la operación 'composición'. Las simetrías del cuadrado son las rotaciones en un ángulo múltiplo de 90 grados en sentido horario o antihorario (con centro en el centro del cuadrado), más las reflexiones respecto de las diagonales y respecto de las rectas que pasan por lo puntos medios de los lados. Este grupo es finito pues tiene 8 elementos. La identidad es la función identidad, la que deja quieto al cuadrado. La inversa de una rotación es otra rotación con el mismo ángulo pero en sentido contrario y la inversa de una reflexión es ella misma, pues reflejar dos veces respecto de la misma recta deja quieto al cuadrado..

Una noción íntimamente ligada a la de grupo es la noción de *subgrupo*.

Definición 1.3. Sea (G, \cdot) un grupo y sea H un subconjunto. Se dice que H es un subgrupo de G si:

1. H es cerrado para el producto de G , es decir si $h \cdot h' \in H$ cada vez que $h, h' \in H$;
2. la identidad de G está en H , es decir $e \in H$;
3. el inverso de un elemento de H está en H , es decir $h^{-1} \in H$ si $h \in H$.

Ejemplos 1.4.

1. Dentro del grupo $(\mathbb{Z}, +)$, el conjunto de números enteros pares es un subgrupo. En efecto la suma de 2 números pares es otro número par. El 0, la identidad en este grupo es par y el inverso de un entero par p , es decir $-p$, también es par.

2. En el grupo $(\mathbb{R} - \{0\}, \times)$, el conjunto de números racionales (distintos de 0) es un subgrupo, pues el producto de 2 racionales es otro racional, la identidad del grupo, el 1, es un racional y el inverso inverso de un racional q cualquiera es $\frac{1}{q}$ que es otro racional.
3. Dentro del grupo de simetrías del cuadrado, las rotaciones forman un subgrupo. Es claro que la composición de 2 rotaciones es otra rotación, que la identidad es una rotación (de 0 grados) y que la inversa de una rotación es otra rotación (en sentido contrario).

2 Los movimientos afines de la recta compleja y el plano euclídeo

En la discusión anterior sobre la recta real, los números reales no jugaron un papel fundamental más allá de la representación gráfica que usamos en la sección anterior. Bastaría cualquier conjunto de números en el cual podamos sumar y multiplicar con las propiedades usuales (asociatividad, elementos neutros, distributividad), tal que todo número tenga inverso para la suma y todo número distinto de 0 (elemento neutro para la suma) tenga inverso multiplicativo. Estas son todas las propiedades que necesitamos para definir los movimientos afines de \mathbb{R} y probar que forman un grupo. Por ejemplo, pedir que todo elemento distinto de 0 (elemento neutro para suma) tenga inverso multiplicativo es necesario para poder definir la inversa de una homotecia.

Consideremos entonces los números complejos \mathbb{C} . Como pretendemos extender la discusión previa, consideremos la *recta compleja*, que es simplemente el conjunto de números complejos (antes los reales), aunque una representación gráfica de la recta compleja como aquella de la sección 1 ya no es posible. En este caso comencemos directamente copiando la definición que dimos para el caso real.

Definición 2.1. El conjunto de movimientos afines de la recta compleja es el conjunto de transformaciones $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} = \{T_{\lambda,p} : \lambda \neq 0, p \in \mathbb{C}\}$ donde $T_{\lambda,p}(x) = \lambda x + p$, para todo $x \in \mathbb{C}$.

No debería sorprendernos que si copiamos la definición también podamos probar la siguiente proposición.

Proposición 2.1. *El conjunto $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ munido del producto dado por la composición de funciones es un grupo.*

Todas las fórmulas y pruebas de la sección anterior siguen siendo válidas en este caso, pues dependen de las propiedades formales que \mathbb{R} y \mathbb{C} comparten. En particular, la prueba de esta proposición ya la hicimos.

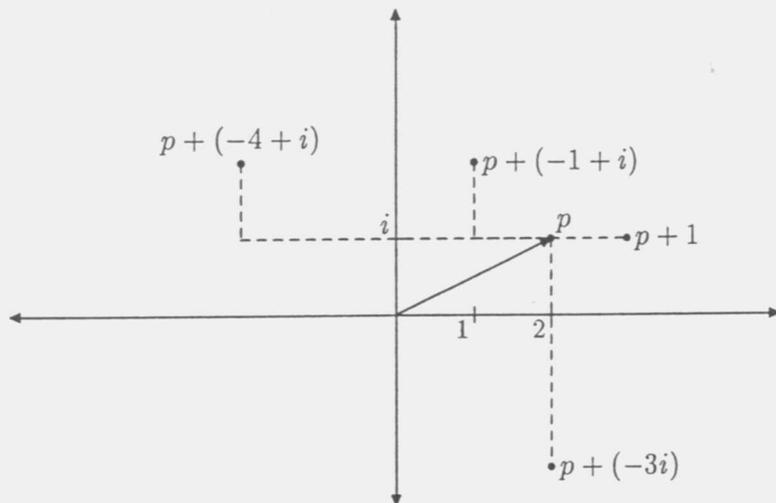
Ahora queremos entender estos movimientos afines. Para esto es útil representar a los números complejos en el plano. No se deben confundir la *recta compleja* con el *plano real* que sirve como representación gráfica de la recta compleja, es decir los números complejos.

Si al plano euclídeo le agregamos un sistema de coordenadas cartesianas podemos entonces identificarlo con los números complejos. Al punto de coordenadas (a, b) lo identificamos con el número complejo $a + ib$.

Para interpretar geoméricamente, en el plano, los movimientos afines de la recta compleja necesitamos recordar como son la suma y el producto de números complejos, ya que $T_{\lambda,p}$ lleva a un punto x del plano al punto $\lambda x + p$.

Suma: Si $p = a + ib$ y $q = c + id$ (con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$), entonces $p + q = (a + b) + (c + d)i$. Si pensamos a p y q como puntos en el plano podemos decir que la suma de p y q se realiza coordenada a coordenada.

Por ejemplo, fijemos $p = 2 + i$ y veamos en un dibujo algunas sumas.



Producto: Si $p = a + bi$ y $q = c + di$ (con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$), entonces $pq = (ac - bd) + (ad + bc)i$. En este caso esta expresión para el producto pq no nos ayuda demasiado para entender donde se ubica en el plano el producto pq . Es conveniente escribir a p y q de otra manera antes de multiplicar. En vez de

identificar a un número complejo del plano por sus dos coordenadas podemos hacerlo diciendo sobre que semirecta que parte del origen se encuentra y a que distancia del origen se encuentra. Para identificar la semirecta basta dar el ángulo que forma esta semirecta con el eje de las abscisas positivas. Por lo tanto un número complejo quedará unívocamente identificado por medio de un ángulo y un número real positivo.

Si z es un complejo en el plano, la distancia de z al origen se denomina *módulo* de z y se escribe $|z|$. Si $z = a + bi$, Pitágoras nos dice que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Si z está sobre una semirecta que forma un ángulo θ con el eje de las abscisas positivas entonces el número complejo $z/|z|$ es otro número complejo sobre la misma semirecta pero de módulo 1. De acuerdo a la trigonometría básica un número complejo w de módulo 1 que está sobre una semirecta que forma un ángulo θ con el eje de abscisas positivas es $w = \cos(\theta) + \text{sen}(\theta)i$.

Resumiendo, un número complejo z se puede describir de dos formas distintas:

$$z = a + ib = |z| \cos \theta + i|z| \text{sen} \theta = |z|(\cos \theta + i \text{sen} \theta)$$

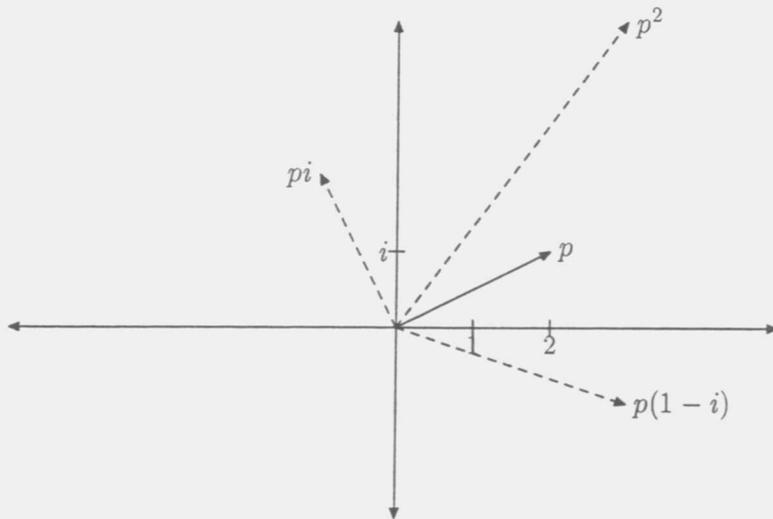
Se dice que θ es *el ángulo de z* .

Ahora, en términos de esta segunda notación, podemos entender mejor el producto de complejos. En efecto si $p = |p|(\cos \theta + i \text{sen} \theta)$ y $q = |q|(\cos \phi + i \text{sen} \phi)$, entonces

$$\begin{aligned} pq &= |p||q|((\cos \theta \cos \phi - \text{sen} \theta \text{sen} \phi) + i(\cos \theta \text{sen} \phi + \text{sen} \theta \cos \phi)) \\ &= |p||q|(\cos(\theta + \phi) + i \text{sen}(\theta + \phi)). \end{aligned}$$

La última igualdad se sigue de las conocidas identidades trigonométricas para el coseno de la suma de 2 ángulos y para el seno de la suma de 2 ángulos.

De la última identidad se sigue que el producto de 2 complejos es el complejo de módulo igual al producto de los módulos de los factores y cuyo ángulo es la suma de los ángulos de los factores.



Este dibujo muestra al complejo $p = 2 + i$ y algunos productos. La unidad imaginaria i tiene módulo 1 y ángulo 90 grados, luego multiplicar por i tiene el efecto geométrico de rotar 90 grados en sentido antihorario. En el dibujo vemos a pi . El producto de p consigo mismo, es decir p^2 , tiene módulo igual al cuadrado del módulo de p y el ángulo de p^2 es el doble del ángulo de p , como se observa en el dibujo.

Podemos ahora entender muy bien como actúan cada uno de los movimientos afines de la recta compleja en el plano euclídeo.

Traslaciones. La traslación $T_p \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ es exactamente la traslación del plano euclídeo determinada por (p_1, p_2) , si $p = p_1 + p_2i$. Por lo tanto, se corresponden

$$\{\text{traslaciones afines}\} \longleftrightarrow \{\text{traslaciones del plano}\}$$

Reflexiones. La reflexión afín S_p lleva a un punto x del plano al punto $2p - x$. Como ya hicimos antes, si escribimos $x = p + (x - p)$ se ve claramente que $S_p(x) = p - (x - p)$. En el plano $x - p$ es el vector que va de p a x , luego $S_p(x)$ es el simétrico de x respecto al punto p . Por lo tanto, se corresponden

$$\{\text{reflexiones afines}\} \longleftrightarrow \{\text{reflexiones centrales del plano}\}$$

Recordamos que las reflexiones axiales del plano, es decir las reflexiones respecto de una recta, son transformaciones rígidas del plano. Sin embargo no

han aparecido, por ahora, como movimientos afines de la recta compleja. De hecho veremos que no lo son.

Homotecias. Las homotecias afines, con centro 0 (H_0^λ), llevan a un punto x al punto λx . Ya sabemos cual es el efecto de multiplicar x por el número complejo λ . El producto λx tiene ángulo igual a la suma de los ángulos de x y λ , es decir, para ubicar la λx debemos rotar a x en un ángulo igual al ángulo de λ ; luego sabemos también que el módulo de λx es el producto de los módulos de x y λ respectivamente, por lo cual para ubicar a λx , luego de haber rotado x , debemos multiplicarlo por el módulo de λ (un número real positivo). Ahora queda claro que las homotecias de centro 0 se comportan como la composición de una rotación del plano con centro en el origen seguida de una homotecia del plano con centro en el origen. El ángulo de la rotación es el ángulo de λ y el factor de la homotecia es el módulo de λ .

Para entender como actúan las homotecias afines con centro $p \neq 0$ recordemos que $H_p^\lambda = T_p \circ H_0^\lambda \circ T_{-p}$. Por lo tanto, como ya conocemos el efecto de H_0^λ , se sigue que H_p^λ actúa como lo hace H_0^λ pero respecto de p . Es decir, H_p^λ se comporta como una rotación del plano con centro p seguida de una homotecia del plano también con centro p .

Resumiendo tenemos que se corresponden

$$\{\text{homotecias afines}\} \longleftrightarrow \{\text{rotaciones seguidas de homotecias del plano}\}$$

Muchas de las transformaciones rígidas del plano euclídeo han aparecido como transformaciones afines de la recta compleja, como las traslaciones, las reflexiones centrales y las rotaciones. Por otro lado las homotecias del plano son también movimientos afines de la recta compleja, aunque no son transformaciones rígidas del plano. Es decir los movimientos afines de la recta compleja y las transformaciones rígidas del plano son conjuntos distintos de transformaciones. Las reflexiones axiales del plano, un tipo de transformaciones rígidas, no son movimientos afines de la recta compleja. Esto se sigue de la siguiente proposición.

Proposición 2.2. *Un movimiento afín $T_{\lambda,p}$, distinto de la identidad, tiene un único punto fijo o es una traslación.*

Prueba. Tomemos un movimiento afín $T_{\lambda,p}$ y supongamos que tiene un punto fijo c . Es decir $T_{\lambda,p}(c) = c$. Si $\lambda = 1$, es decir si $T_{\lambda,p}$ es una traslación, esta ecuación implica que $p = 0$ y luego $T_{\lambda,p} = \text{Id}$ en cuyo caso todos los puntos del

plano son puntos fijos. Por lo tanto las traslaciones distintas de la identidad no tienen puntos fijos.

Supongamos entonces que $\lambda \neq 1$. Como $T_{\lambda,p}(c) = \lambda c + p$, resulta que c satisface la ecuación

$$\lambda c + p = c.$$

De aquí se sigue que

$$c = \frac{p}{1 - \lambda}.$$

□

De ahora en más, para los movimientos afines $T_{\lambda,p}$ con, $\lambda \neq 1$, denotaremos a su único punto fijo

$$\text{fijo}(T_{\lambda,p}) = \frac{p}{1 - \lambda}.$$

Vimos que las homotecias de razón λ con $|\lambda| = 1$ y $\lambda \neq 1$ son rotaciones del plano. Estas homotecias son movimientos afines de la recta compleja $T_{\lambda,p}$ con $|\lambda| = 1$ y $\lambda \neq 1$ en efecto son $H_p^\lambda = T_{\lambda,(1-\lambda)p}$. Esta propiedad caracteriza a las rotaciones del plano dentro de los movimientos afines de la recta compleja.

Proposición 2.3. *El movimiento afín de la recta compleja $T_{\lambda,p}$ es una rotación del plano si y sólo si $|\lambda| = 1$ y $\lambda \neq 1$.*

Prueba. Sea R una rotación del plano con centro p . Entonces $T_p \circ R \circ T_{-p}$ es una rotación, con el mismo ángulo que R , pero con centro 0. Las rotaciones con centro 0 son las homotecias H_0^λ con $|\lambda| = 1$. Luego

$$T_p \circ R \circ T_{-p} = H_0^\lambda,$$

para algún complejo λ de módulo 1. Ahora se sigue, usando la fórmula (3), que

$$\begin{aligned} R &= T_{-p} \circ H_0^\lambda \circ T_p \\ &= T_{\lambda,(\lambda-1)p}. \end{aligned}$$

Recíprocamente sea $R = T_{\lambda,p}$ con $|\lambda| = 1$ y $\lambda \neq 1$. Queremos probar que R es una rotación. Comencemos por encontrar su centro. La Proposición 2.2

dice que R tiene un único punto fijo y éste es exactamente $c = \text{fijo}(T_{\lambda,p}) = \frac{p}{1-\lambda}$. Ahora consideramos, como antes, la transformación afín

$$\begin{aligned} R' &= T_{-c} \circ R \circ T_c \\ &= T_{-c} \circ T_{\lambda,p} \circ T_c \\ &= T_{\lambda,(\lambda-1)c+p} \\ &= T_{\lambda,0}. \end{aligned}$$

Es decir R' es una rotación con centro 0. Como $R = T_c \circ R' \circ T_{-c}$ se sigue que R es una rotación con centro c . \square

Ejercicios 2.1.

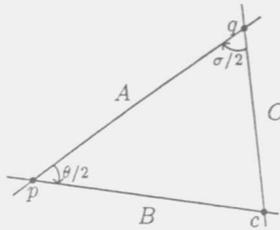
1. Sea $T \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ dada por $T(x) = ix + (1+i)$. Entender geoméricamente la transformación T . ¿Cuál es la imagen por T del punto $(1,0) \sim 1+i0$? ¿Cuál es la imagen de la recta vertical que pasa por $(1,0)$?
2. Sea $T = T_{\lambda,0}$ con $\lambda = 1+i$ y sea $p = 1 (= 1+0i)$. Graficar $T(p), T^2(p), \dots, T^{10}(p)$.
3. Escribir el movimiento afín $T_{-i,2}$ como composición de una traslación, una homotecia y una reflexión. (Ver (1))

2.1 La composición de rotaciones

Las rotaciones son transformaciones rígidas del plano euclídeo y, como vimos, también son elementos de $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$. La composición de dos rotaciones con el mismo centro es claramente otra rotación con el mismo centro y con ángulo igual a la suma de los ángulos de las rotaciones iniciales. Un hecho mucho más sorprendente es que la composición de dos rotaciones con distinto centro es, casi siempre, otra rotación cuyo ángulo es la suma de los ángulos de las rotaciones iniciales. Sin embargo, en este caso, no es para nada obvio cual es el centro de la composición.

Con $R_{p,\theta}$ denotaremos la rotación con centro p y ángulo θ y con S_A denotaremos la reflexión axial respecto de la recta A .

La composición $R_{p,\theta} \circ R_{q,\sigma}$ de dos rotaciones con centros p y q y ángulos de rotación θ y σ respectivamente, es otra rotación si $\theta + \sigma \neq 0$ y es una traslación si $\theta + \sigma = 0$. Si $\theta + \sigma \neq 0$, el ángulo de rotación de la composición es $\theta + \sigma$ y el centro es el punto c de la figura.



Composición de rotaciones

En efecto, hemos elegido las rectas A , B y C de tal manera que $R_{p,\theta} = S_C S_A$ y $R_{q,\sigma} = S_A S_B$ ² y luego

$$R_{p,\theta} R_{q,\sigma} = S_C S_A S_A S_B = S_C S_B,$$

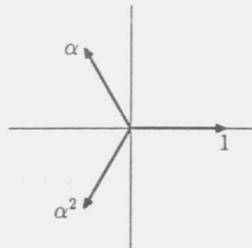
siendo c el único punto fijo de $S_C S_B$. Notamos que si $\theta + \sigma = 0$, entonces B y C resultan paralelas y la composición $S_C S_B$ es una traslación.

Ejercicio 2.1.

1. Determinar geoméricamente qué traslación es $R_{p,\theta} \circ R_{q,\sigma}$, en el caso que $\theta + \sigma = 0$.
2. Hacer lo mismo analíticamente, considerando a $R_{p,\theta}$ y $R_{q,\sigma}$ elementos de \mathcal{A}_C .

2.2 Caracterización de triángulos equiláteros

Existen 3 raíces cúbicas de la unidad: 1 , α y α^2 , donde $\alpha = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$; dichas raíces satisfacen la relación $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$.



Raíces cúbicas de la unidad

²Una transformación rígida queda determinada (existe una sola) por la imagen de una semirecta y uno de los semiplanos que ésta determina. Así se puede verificar que la composición de dos reflexiones, respecto de rectas que se intersecan, es una rotación con centro en el punto de intersección y ángulo igual al doble del ángulo formado por las rectas.

Proposición 2.4. *Tres puntos a, b, c en el plano son los vértices de un triángulo equilátero si y sólo si satisfacen $a + jb + j^2c = 0$, donde $j = \alpha$ ó $j = \alpha^2$.*

Prueba. Sean a, b, c los vértices de un triángulo equilátero y sea p el centro de éste. La rotación $R_{p,120^\circ} = H_p^\alpha$ lleva un vértice cualquiera en otro. Así $H_p^\alpha(a) = b$ ó $H_p^\alpha(a) = c$. Podemos suponer que $H_p^\alpha(a) = b$, intercambiando los nombres de b y c si fuera necesario; luego $H_p^{\alpha^2}(a) = c$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} b &= \alpha a - \alpha p + p, \\ c &= \alpha^2 a - \alpha^2 p + p. \end{aligned}$$

Evaluemos ahora la suma

$$\begin{aligned} a + \alpha b + \alpha^2 c &= a + \alpha(\alpha a - \alpha p + p) + \alpha^2(\alpha^2 a - \alpha^2 p + p) \\ &= a + \alpha^2 a - \alpha^2 p + \alpha p + \alpha a - \alpha p + \alpha^2 p \end{aligned}$$

(recordemos que $\alpha^3 = 1$ y por lo tanto $\alpha^4 = \alpha$)

$$\begin{aligned} &= (1 + \alpha + \alpha^2)a \\ &= 0. \end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que a, b, c satisfacen $a + jb + j^2c = 0$ con $j = \alpha$ ó $j = \alpha^2$. Como $1 + j + j^2 = 0$, tenemos que $a + ja + j^2a = 0$. Sustrayendo esta identidad a la anterior resulta $jb - ja + j^2c - j^2a = 0$ ó bien $j(b - a) = j^2(a - c)$. Multiplicando por j^{-1} concluimos que

$$b - a = j(a - c).$$

En particular, $|b - a| = |a - c|$, pues $|j| = 1$ es decir, los dos lados del triángulo abc con vértice común a son de igual longitud. Cambiando a por b en la identidad $a + ja + j^2a = 0$ se deduce análogamente que el tercer lado es igual a los anteriores. \square

Hasta aquí llegamos con los preliminares sobre transformaciones afines de la recta compleja. En el próximo número aparecerá la Parte II; ahí nos concentraremos ya en la prueba y la comprensión del Teorema de Morley en toda su extensión.

Referencias

- [1] Baker C. y Oakley C., *The Morley trisector theorem*, Amer. Math. Monthly **85** (1978), 737-745.
- [2] Connes A., *A new proof of Morley's theorem*, I.H.É.S. - Les relations entre les mathématiques et la physique théorique. Festschrift for the 40th anniversary of the IHÉS (1998), 43-46.
- [3] Coxeter H.S.M. y Greitzer S.L., *Geometry Revisited*. Washington, DC: Math. Assoc. Amer. 1967 (pp 47-50).
- [4] Herrera F., *Números complejos y transformaciones geométricas planas elementales*, Revista de Educación Matemática (UMA) **5** Num. 1 (1990), 21-45.

CIEM - Fa.M.A.F.

Universidad Nacional de Córdoba.