Enseñanza de algoritmos para operar con funciones polinómicas usando una planilla de cálculo

Graciela Guala   Edgardo Güichal   Viviana Oscherov

Introducción

Las propuestas curriculares más recientes para la enseñanza de Matemática insisten en la necesidad de situar en primer plano las capacidades ligadas a la identificación y resolución de problemas como uno de los enfoques que deben destacarse para el trabajo de los contenidos en matemática [2]. Por otra parte, como se señala en [4], con relación a las discusiones surgidas por los movimientos de reforma de la enseñanza de la Matemática en Estados Unidos, se propone una disminución en la atención de la enseñanza y práctica de algoritmos en favor de la conceptualización de procesos matemáticos y las aplicaciones a situaciones del mundo real. No obstante, si entendemos que un algoritmo es una "receta" para la ejecución sistemática de un procedimiento diseñado para resolver un problema específico, manteniendo ciertas características a seguir, coincidiremos con J. Ziegenbalg [6] en que los algoritmos constituyen un foco metodológico de la educación matemática y que su construcción significa un trabajo creativo, aunque su posterior procesamiento sea, normalmente, algo muy aburrido. Es en esta etapa donde la computadora juega un papel esencial, realizando esa parte aburrida y mecánica del trabajo y constituyéndose en una herramienta fundamental para la realización de experimentos que permitan lograr una interpretación intelectual más profunda de los problemas en estudio. En particular, resulta importante señalar que muchos de estos algoritmos pueden trabajarse usando una Planilla de Cálculo, es decir que no es necesario adquirir costosos programas específicos para la enseñanza de la Matemática, sino tan solo aprovechar las posibilidades de esta herramienta dinámica e interactiva, que nos permite la realización de cálculos numéricos que se actualizan automáticamente al modificar datos, que por otra parte, pueden ser presentados en forma de tablas y cuadros que permiten además la representación gráfica usando un sistema de coordenadas [3]. Consideramos que, históricamente, la Matemática se ha interesado mucho por este tipo especial de procedimientos, ligados a conocimientos referidos al "saber hacer", en los que se trata de formas de proceder de manera sistemática y ordenada como son los algoritmos.

En este trabajo proponemos abordar, desde otra mirada, tres problemas conocidos. Ellos son: el cálculo del valor de una función polinómica en un punto, la determinación de los coeficientes de una nueva expresión para la misma cuando se la centra en un punto cualquiera y la construcción de una función polinómica interpoladora. En los tres casos contamos con la asistencia de una Planilla de Cálculo.

Problemas

Problema 1: Dada la función polinómica

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

calcule f(a).

En este caso, conocemos los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_3, a_2, a_1, a_0$ y queremos calcular f(a).

Observemos que:

$$f(a) = a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \ldots + a_3 a^3 + a_2 a^2 + a_1 a + a_0$$

y que para obtener su valor por cálculo directo es necesario realizar:

- $n - 1$ multiplicaciones para calcular: $a^2, a^3, \ldots, a^n$
- n multiplicaciones para calcular: $a_i x^i$ con $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Esto nos indica un total de $2n - 1$ multiplicaciones. Pero, ¡ésta es la operación que más errores puede acumular en un cálculo!

Bien, intentaremos entonces reducir al mínimo el número de productos determinando una fórmula adecuada para ello.

Extrayendo a como factor común en forma sucesiva obtenemos:

$\mathrm{f(a)} = (((\ \dots\ (((\mathrm{a}_n\, \mathrm{a} + \mathrm{a}_{n-1})\, \mathrm{a} + \mathrm{a}_{n-2})\, \mathrm{a} + \mathrm{a}_{n-3})\, \mathrm{a}\ \dots + \mathrm{a}_3)\, \mathrm{a} + \mathrm{a}_2)\, \mathrm{a} + \mathrm{a}_1)\, \mathrm{a} + \mathrm{a}_0$

expresión que involucra solamente n productos y permite el cálculo ordenado aplicando el siguiente algoritmo:

$$a_n = \mathrm{a}_n$$

$$a_{n-1} = \mathrm{a}\, a_n + \mathrm{a}_{n-1}$$

$$a_{n-2} = \mathrm{a}\, a_{n-1} + \mathrm{a}_{n-2}$$

....

$$a_2 = \mathrm{a}\, a_3 + \mathrm{a}_2$$

$$a_1 = \mathrm{a}\, a_2 + \mathrm{a}_1$$

$$a_0 = \mathrm{a}\, a_1 + \mathrm{a}_0\ .$$

Podemos organizar este cálculo en forma sencilla con una Planilla de Cálculo, por ejemplo EXCEL. Esta planilla tiene incorporada una calculadora algunos programas sencillos de estadística y permite organizar datos según distintas necesidades. Además nos permitirá el uso de cualquier número racional, representable por la computadora , como coeficiente.

La disposición que veremos es la siguiente:

I3 = f(a)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_2	a_1	a_0	
2	a		$\mathrm{a} * a_n$	$\mathrm{a} * a_{n-1}$	...	$\mathrm{a} * a_3$	$\mathrm{a} * a_2$	$\mathrm{a} * a_1$	
3		a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_2	a_1	a_0	f(a)

Es claro que: $a_0 = \mathrm{f(a)}$.

El algoritmo que usamos es similar al correspondiente a la Regla de Ruffini para calcular el cociente entre f(x) y $(x - a)$. El último casillero indica justamente el resto de la división que, por el Teorema del Resto, sabemos que es f(a). De este modo combinamos la Regla de Ruffini y el Teorema del Resto resignificando el uso de ambos.

<u>Problema 2</u>: Dada la función polinómica

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

determine los coeficientes de una nueva expresión para la misma cuando se la centra en un punto cualquiera.

El problema nos plantea:

Conocidos los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \dots, a_3, a_2, a_1, a_0$; determine los coeficientes $b_n, b_{n-1}, \dots, b_2, b_1, b_0$ que permitan expresar la función f centrada en $x = \mathbf{a}$. Es decir $f(x) = b_n (x - a)^n + b_{n-1} (x - a)^{n-1} + \dots + b_2 (x - a)^2 + b_1 (x - a) + b_0$ (1)

Observación: Sabemos que en el caso de funciones derivables hasta el orden n + 1, condición que verifica la función f por tratarse de una función polinómica de grado n, podremos utilizar la fórmula de Taylor. En tal caso es $b_i = f^{(i)}(a) / i!$.

Sin embargo vamos a utilizar un algoritmo, sin necesidad de recurrir al cálculo diferencial, que además minimice el número de productos y cocientes a realizar.

El algoritmo que nos permite hacer el cálculo es una simple generalización del usado en el Problema 1.

Es evidente que $a_0 = f(a) = b_0$

Aplicando la llamada "Regla de Horner" [5] podemos construir los n coeficientes restantes.

¿Cómo lo hacemos?

Podemos escribir a partir de la fórmula (1)

$$f(x) = f_1(x)\,(x - a) + b_0$$

$$\text{siendo: } f_1(x) = b_n\,(x - a)^{n-1} + b_{n-1}\,(x - a)^{n-2} + \ldots + b_2\,(x - a) + b_1$$

De tal modo es: $b_1 = f_1\,(a)$.

Pero $f_1(x)$ es precisamente el cociente entre $f(x)$ y $(x - a)$ y por lo tanto sus coeficientes son los que aparecieron en la fila 3 de la planilla anterior.

Por un procedimiento similar podremos calcular: $b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}, b_n$.

Estos cálculos también se pueden organizar usando una Planilla de Cálculo.

Veamos un ejemplo sencillo:

Dada la función

$$f(x) = 3\,x^4 + 2\,x^3 - x^2 - 2\,x + 5$$

determinamos los coeficientes de una nueva expresión para la misma cuando se centra en $x = 2$.

F3 =SUMA(F1:F2)

	A	B	C	D	E	F	G
1		3	2	-1	-2	5	
2	2		6	16	30	56	
3		3	8	15	28	61	b_0
4	2		6	28	86		
5		3	14	43	114	b_1	
6	2		6	40			
7		3	20	83	b_2		
8	2		6				
9		3	26	b_3			
10	2						
11		3	b_4				

De este modo tenemos:

$f(x) = 3\,(x - 2)^4 + 26\,(x - 2)^3 + 83\,(x - 2)^2 + 114\,(x - 2) + 61.$

Si centramos, por ejemplo, en $x = 1{,}3572$ tendremos:

F3 =F1+F2

	A	B	C	D	E	F	G
1		3	2	-1	-2	5	
2	1.3572		4.0716	8.2403755	9.8266377	10.622313	
3		3	6.0716	7.2403755	7.8266377	15.622313	b_0
4	1.3572		4.0716	13.766351	28.510329		
5		3	10.1432	21.006727	36.336967	b_1	
6	1.3572		4.0716	19.292327			
7		3	14.2148	40.299053	b_2		
8	1.3572		4.0716				
9		3	18.2864	b_3			
10	1.3572						
11		3	b_4				

Con

$$f(x) = 3\,(x - 1.3572)^4 + 18.2864\,(x - 1.3572)^3 + 40.299053\,(x - 1.3572)^2 +$$
$$+ 36.336967\,(x - 1.3572) + 15.622313\ .$$

Problema 3: Construcción de una función polinómica interpoladora.

Dados n + 1 puntos (x_i , y_i) con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, encuentre la función polinómica de grado n cuyo gráfico pase por ellos.

Para determinar esta función polinómica interpoladora construimos un algoritmo (ver [1]) basado en el cálculo de los coeficientes por el método de Newton. Puede implementarse fácilmente con una planilla de cálculo y evita el procedimiento de resolución de un "gran sistema" de ecuaciones lineales.

Inicialmente planteamos un caso particular.

Determinamos los coeficientes de una función polinómica de grado 2:

$$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_o$$

que pasa por los puntos: (x_0 , y_0), (x_1 , y_1) y (x_2 , y_2) siendo $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$.

Encontrar la función nos conduce a la búsqueda de la solución de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas que son, precisamente, los coeficientes de la función.

Este sistema está dado por:

$$\begin{cases} a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0 = y_0 \\ a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0 = y_1 \\ a_2 x_2^2 + a_1 x_2 + a_0 = y_2 \end{cases} \quad \text{con} \quad x_i \neq x_j \quad \text{si} \quad i \neq j$$

que es de fácil solución.

Si aumentamos el número de puntos, digamos que consideramos $n + 1$ puntos de la forma (x_i , y_i) para $i = 0, 1, 2, \ldots , n$ con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, la búsqueda de la función polinómica de grado n que pase por ellos conducirá a la solución de un sistema de $n + 1$ ecuaciones lineales con $n + 1$ incógnitas.

Es fácil ver que existe una única función polinómica $f(x)$ de grado menor o igual que n que satisface las condiciones $f(x_i) = y_i$ con $i = 0, 1, 2, 3, \ldots , n$. La unicidad está garantizada por el hecho de que dos funciones polinómicas de grado menor o igual a n que coinciden en $n + 1$ valores distintos de la variable independiente son idénticas.

La existencia está justificada por la construcción efectiva de una función polinómica que satisfaga las condiciones requeridas.

Consideremos un ejemplo para $n = 2$ y utilicemos el método de Lagrange para construir la función polinómica interpoladora.

Según este método, la función f se puede escribir como suma de tres funciones: f_0 , f_1 y f_2 cuya construcción propone. De acuerdo con la misma resulta:

$$f_0(x) = y_0 \, [(x - x_1) / (x_0 - x_1)] \, [(x - x_2) / (x_0 - x_2)]$$

función que se anula en x_1 y x_2 y tal que $f(x_0) = y_0$

$$f_1(x) = y_1 \, [(x - x_0) / (x_1 - x_0)] \, [(x - x_2) / (x_1 - x_2)]$$

función que se anula en x_0 y x_2 y tal que $f(x_1) = y_1$

$$f_2(x) = y_2\,[(x - x_2) / (x_2 - x_0)]\,[(x - x_1) / (x_2 - x_1)]$$

función que se anula en x_1 y x_2 y tal que $f(x_2) = y_2$

y

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x).$$

Como en los casos anteriores, este método tiene la desventaja de la cantidad de productos y cocientes que es necesario efectuar, por ello nos basaremos en el método de Newton que reduce el número de productos y cocientes y que puede realizarse en forma organizada en una Planilla de Cálculo.

Usaremos una fórmula análoga a (1) pero centrada en n puntos, de los n + 1 dados. Consideraremos los n primeros cuyas abscisas son: $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$

La expresión es de la forma:

$$\begin{aligned} f(x) = \ & a_n (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-2})(x - x_{n-1}) + \\ & + a_{n-1} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-2}) + \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + a_2 (x - x_0)(x - x_1) + \\ & + a_1 (x - x_0) + \\ & + a_0. \end{aligned}$$

Si denominamos $f_k(x)$ con $k \leq n - 1$ a la suma de los últimos $k + 1$ términos, podemos escribir entonces

$$f(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_k)\, q(x) + f_k(x).$$

Como el primer término se anula en $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$, resulta que

$$f(x_i) = f_k(x_i) \qquad \text{para} \qquad i = 0, 1, 2, \dots, k.$$

Se verifica entonces que $f_k(x_i) = y_i$ si $i = 0, 1, 2, \dots, k$; es decir que f_k debe ser la función polinómica interpoladora en los $k + 1$ primeros puntos.

En particular esto muestra que:

$$f_k(x) = a_k (x - x_0) \dots (x - x_{k-1}) + f_{k-1}(x)$$

y como consecuencia de ello, que a_k es el coeficiente principal de la función polinómica f_k , que como ya observáramos anteriormente, es la única función polinómica de grado menor o igual que k que satisface $f_k (x_i) = y_i$ si $i = 0, 1, 2, \dots , k$..

Para remarcar esta situación utilizaremos la siguiente notación:

$$[x_0, x_1, x_2, \dots , x_k] = a_k$$

que leeremos: diferencia dividida de $x_0, x_1, x_2, \dots , x_k$.

De acuerdo con esta notación, si $q_k(x)$ denota la única función polinómica de grado menor e igual que k tal que $q_k(x_i) = y_i$ con $i = 1, 2, 3, \dots , k + 1$ se ve que su coeficiente principal es $a_k = [x_1, x_2, \dots , x_k, x_{k+1}]$.

Si llamamos

$$m(x) = ((x - x_0) / (x_{k+1} - x_0))q_k(x) + ((x_{k+1} - x)/ (x_{k+1} - x_0)) f_k(x)$$

tendremos que:

$m(x_i) = y_i$ si $i = 0, 1, 2, \dots , k, k+1$ puesto que:

$m(x_0) = f_k(x_0) = y_0$

$m(x_{k+1}) = q(x_{k+1}) = y_{k+1}$

y para $1 \leq i \leq k$

$m(x_i) = ((x_i - x_0) / (x_{k+1} - x_0)) q_k(x_i) + ((x_{k+1} - x_i) / (x_{k+1} - x_0))f_k(x_i) =$

$((x_i - x_0) / (x_{k+1} - x_0)])y_i + ((x_{k+1} - x_i) / (x_{k+1} - x_0)) y_i =$

$= ((x_{k+1} - x_0) / (x_{k+1} - x_0))y_i = y_i$.

Dada la unicidad es $m = f_{k+1}$. Es decir

$f_{k+1}(x) = ((x - x_0) / (x_{k+1} - x_0)) q_k(x) + ((x_{k+1} - x)/ (x_{k+1} - x_0)) f_k(x)$.

Si tratamos de identificar el coeficiente principal de f_{k+1} resulta

$a_{k+1} = [x_0, x_1, x_2, \dots , x_k, x_{k+1}] = a_k / (x_{k+1} - x_0) - a_k / (x_{k+1} - x_0) =$

$= [x_1, x_2, \dots , x_k, x_{k+1}] / (x_{k+1} - x_0) - [x_0, x_1, x_2, \dots , x_k]/ (x_{k+1} - x_0)$.

Hemos obtenido así la siguiente fórmula de recurrencia para el cálculo de los coeficientes a_k

$$\begin{cases} [x_0] = y_0 \\ [x_0, x_1, x_2, \dots, x_k] = \{[x_1, x_2, \dots, x_k] - [x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}]\} \,/\, (x_k - x_0) \quad \text{si } k \geq 1. \end{cases}$$

Veamos cómo podemos trabajar utilizando una Planilla de Cálculo cuando n = 5.

	A	B	C	D	E	F
1	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
3		$\frac{B2-A2}{B1-A1}$	$\frac{C2-B2}{C1-B1}$	$\frac{D2-C2}{D1-C1}$	$\frac{E2-D2}{E1-D1}$	$\frac{F2-E2}{F1-E1}$
4			$\frac{C3-B3}{C1-A1}$	$\frac{D3-C3}{D1-B1}$	$\frac{E3-D3}{E1-C1}$	$\frac{F3-E3}{F1-D1}$
5				$\frac{D4-C4}{D1-A1}$	$\frac{E4-D4}{E1-B1}$	$\frac{F4-E4}{F1-C1}$
6					$\frac{E5-D5}{E1-A1}$	$\frac{F5-E5}{F1-B1}$
						F6-E6

Consideremos ahora un caso particular.

Sean los puntos de coordenadas:

(1 , 1), (0.5 , 3), (-1 , -2), (2 , -1), (1.5 , 0.5) y (-2 , 4).

En la planilla de cálculo tenemos:

F7 =(F6 - E6)/(F1 - A1)

	A	B	C	D	E	F
1	1	0.5	-1	2	1.5	-2
2	1	3	-2	-1	0.5	4
3	a_0	-4	3.333333	0.333333	-3	-1
4		a_1	-3.666667	-2	-1.333333	-0.5
5			a_2	1.666667	0.666667	-0.833333
6				a_3	-2	0.6
7					a_4	-0.866667
8						a_5

La función interpoladora es:

$$f(x) = -0.866667\, x^5 - 2\, x^4 + 1.666667\, x^3 - 3.666667\, x^2 - 4\, x + 1.$$

Referencias Bibliográficas

[1] S. D. Conte, C. de Boor: *Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach.* McGraw Hill; 3rd. Ed. 1980.

[2] *Contenidos Básicos Comunes para la Educación General Básica.* 2ª. Ed. 1995.

[3] A. García, A. Martínez, R. Miñano: *Nuevas Tecnologías y Enseñanza de las Matemáticas.* Editorial Síntesis. Colección: Educación Matemática en Secundaria. Madrid 1995.

[4] T. T. Y. Mingus, R. M. Grassl. *Algorithmic and Recursive Thinking.* The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics. 1998 Year Book NCTM.

Pp. 32-43.

[5] J. V. Uspensky. *Teoría de Ecuaciones.* La Línea Recta, Buenos Aires, 1958.

[6] J. Ziegenbalg. *Algorithms: a focal point in mathematics and information science education.* (Pädagogische Hochchule Karlsruhe, Alemania) Comunicación presentada en el 8° ICME, Sevilla, España, 1996.

Departamento de Matemática. Universidad Nacional del Sur.

Avenida Alem 1253.

8000 Bahía Blanca. Provincia de Buenos Aires.

e-mail: gguala@criba.edu.ar eguichal@criba.edu.ar oscherov@criba.edu.ar