

Invencción de problemas por estudiantes con talento matemático

Johan Espinoza González. johanespi@hotmail.com¹.

Jose Luis Lupiañez Gómez. lupi@ugr.es.²

Isidoro Segovia Alex. isegovia@ugr.es.³

Resumen. Presentamos el análisis de los resultados de la actuación de un grupo de estudiantes del proyecto ESTALMAT Andalucía, España, considerados con talento en matemáticas, al resolver dos tareas de invención de problemas aritméticos construidas especialmente para este estudio y valoradas con base en un esquema de análisis confeccionado igualmente en esta investigación. Lo expuesto se fundamenta en un estudio exploratorio realizado durante el 2011 con el propósito de caracterizar la actuación de estudiantes con talento cuando inventan problemas aritméticos. Los resultados informan sobre la extensión del problema, el tipo de número empleado, el tipo de proposición interrogativa, cantidad y tipo de relaciones semánticas, cantidad pasos para resolver el problema planteado, etc.

Términos claves: Invención de problemas; resolución de problemas; talento matemático; problemas aritméticos.

1. Introducción

La temática implicada en esta investigación comprende dos campos de estudio: la invención de problemas y los sujetos con talento matemático. Con respecto a la primera, es una línea de investigación que surge de la resolución de problemas (Castro, 2008)⁴ y es tal que algunos estudios en educación matemática como el de

¹ Universidad Nacional, Costa Rica

² Universidad de Granada, España

³ Universidad de Granada, España

⁴ Castro, E (2008). Resolución de problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. En Luengo Ricardo; Gómez Bernardo; Camacho Matías; Blanco Lorenzo (Eds.). Investigación en Educación Matemática XII. *Actas del Duodécimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 113-140). Basajoz: Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper"/ Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Krutetskii, (1976)⁵; Freudenthal, (1973)⁶; Brown y Walter (1990)⁷ y el NCTM (2000)⁸ reconocen su importancia como actividad relevante de la experiencia matemática de cualquier estudiante.

El término invención de problemas ha sido empleado generalmente para referirse tanto a la generación de nuevos problemas como a la reformulación de problemas dados (Silver, 1994)⁹. Uno de los primeros autores en referirse a este proceso fue Dunker (1945, citado en Silver, 1994), quien menciona que la resolución de problemas consiste en sucesivas reformulaciones de un problema inicial, el cual ocurre durante el proceso de resolución de un problema complejo (Silver, Mamona-Down, Leung y Kenny, 1996)¹⁰. Sin embargo, la invención de problemas también puede ocurrir antes del proceso de solución, cuando lo que se persigue es la creación de un problema a partir de una situación o experiencia. También puede realizarse después de la solución de un problema, en el cual se modifica el objetivo, meta o condición del mismo con el fin de generar nuevos problemas (Silver, 1994). Este tipo de estrategia está relacionada con la fase “looking Back” de resolución de problemas citada por Polya (1979)¹¹.

Con respecto a los sujetos con talento matemático, observamos que la investigación relacionada con este tema es reciente y se ha centrado en tres grandes focos: la caracterización del talento matemático, el establecer mecanismos de identificación y ofrecer alternativas de intervención (Castro, 2008). Centrándonos en la caracterización del talento matemático, algunos investigadores entre ellos Krutetskii

⁵ Krutetskii, V.A (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago: University of Chicago Press.

⁶ Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht. Reidel.

⁷ Brown, S., Walter, M. (1990). *The Art of problem posing*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

⁸ National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: El autor.

⁹ Silver, E. A. (1994). On Mathematical Problem Posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19-28.

¹⁰ Silver, E., Mamona-Downs, J., Leung, S., Kenney, P (1996). Posin matehematical problem: An exploratory study. *Journal for research in matehematics education*. 27(3), 293-309.

¹¹ Polya, G. (1979). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

(1976)¹², Greenes (1981)¹³, Pasarín, Feijoo, Díaz y Rodríguez (2004)¹⁴, entre otros, se han preocupado por observar y analizar el pensamiento característico de este tipo de estudiantes en diferentes tareas de resolución de problemas, resultando que algunas de ellas están relacionadas con la invención de problemas.

Por tanto consideramos que hay elementos teóricos que sustentan el estudio del talento matemático mediante la invención de problemas, ya que este tipo de actividades proporciona una herramienta poderosa para estudiar niños con talento matemático (Ellerton, 1986)¹⁵ y sus habilidades matemáticas (Kesan et al., 2010)¹⁶, así como una características de la actividad creativa o talento excepcional y una “ventana” que permite observar la comprensión matemática de los estudiantes (Silver, 1994).

Así, la revisión de estudios previos y literatura sobre ambos campos de estudio nos permitió definir nuestro problema de investigación, el cual consiste en caracterizar la capacidad de un grupo de estudiantes con talento matemático ante dos tareas de invención de problemas aritméticos verbales. Los objetivos de esta investigación se centraron en construir un instrumento de planteamiento de problemas con dos tareas o situaciones semiestructuradas de invención problemas aritméticos verbales; desarrollar y utilizar un esquema analítico para valorar los problemas aritméticos planteados por los estudiantes, definir categorías de análisis que permitan caracterizar las producciones de los estudiantes y caracterizar los problemas planteados por los estudiantes de la muestra con base en las categorías de análisis definidas.

2. Metodología

Esta investigación es de tipo exploratorio descriptivo pues corresponde a un primer acercamiento al estudio de la invención de problemas aritméticos por estudiantes

¹² Krutetskii, V.A (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago: University of Chicago Press.

¹³ Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematic. *Arithmetic Teacher*, 28 (8),14-17.

¹⁴ Pasarín, M. J., Feijoo, M., Díaz, O., Rodríguez, L. (2004). Evaluación del talento matemático en educación secundaria. *Faísca, Revista de altas capacidades N° 11*, pp 83-102

¹⁵ Ellerton N. (1986). Children's made up mathematics problems- A new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics*, 17, 261-271.

¹⁶ Kesan, C., Kaya, D & Güvercin, S. (2010). The Effect of Problem Posing Approach to the Gifted Student's Mathematical Abilities. *International Online Journal of Educational Sciences*, 2(3), 677-687.

considerados con talento matemático, privilegiando la descripción e interpretación de la información pero al mismo tiempo dando un tratamiento cuantitativo a los datos (Espinoza, 2011)¹⁷. Los sujetos de estudio corresponden a un grupo de 21 estudiantes considerados con talento matemático que participaron en el proyecto ESTALMAT Andalucía durante el curso 2010-2011 y que tienen edades comprendidas entre los 13 y los 15.

Descripción del instrumento para recolectar información

En este estudio se elaboró un cuestionario con dos tareas o situaciones semiestructuradas de invención de problemas (Stoyanova, 1998)¹⁸ con características diferentes que permiten a los estudiantes poner en práctica sus habilidades, conocimientos y creatividad.

Para el diseño de este instrumento se tomaron en cuenta aspectos como la clase de información que proporciona el problema, el tipo de información que permanece desconocida y que el contexto escolar presentado en la situación sea muy familiar para los estudiantes (Moses et al., 1990). De igual forma se consideró el tipo de número, su magnitud, la cantidad de tipos de números empleados, la presentación de la información, la riqueza de ideas y las relaciones matemáticas que podrían surgir de la situación presentada a los estudiantes.

Así, consideramos que las situaciones de invención de problemas debían cumplir lo siguiente: el contexto debe ser de interés y familiar para los estudiantes, motivar a plantear diferentes tipos de problemas, estimular la creatividad, permitir el empleo de diferentes tipos de números, cantidades y representaciones numéricas y favorecer e incentivar la invención de problemas difíciles para ambos grupos de estudiantes.

Con respecto a esta última condición, creemos importante pedir a los estudiantes el plantear problemas que consideren difíciles de resolver, ya que nos interesa que los estudiantes muestren y pongan en juego sus conocimientos, habilidades y creatividad para inventar problemas. Además, consideramos que esto puede hacer que el estudiante ponga su mayor esfuerzo y sienta un reto y compromiso hacia la actividad de inventar problemas originales.

¹⁷ Espinoza, J. (2011). *Invención de problemas aritméticos por estudiantes con talento matemático: Un estudio exploratorio*. Memoria de Tercer Ciclo. Granada: Universidad de Granada

¹⁸ Stoyanova, E. (1998). Problem posing in mathematics classrooms. En A. McIntosh y N. Ellerton (Eds.), *Research in Mathematics Education: a contemporary perspective*. (pp 164-185). Edit Cowan.

Después de identificar dichos parámetros se elaboraron nueve propuestas las cuales fueron analizadas de acuerdo con la riqueza de los elementos antes mencionadas; sin embargo se escogieron sólo 2 de éstas, dadas las limitaciones de tiempo en la aplicación del instrumento y la posible dificultad que pudieran tener los estudiantes en responder a las tareas.

La primera tarea plantea lo siguiente: *De acuerdo con la información de la siguiente figura, inventa un problema matemático que te parezca difícil de resolver y que en su resolución se utilice una o varias de las operaciones de suma, resta, multiplicación o división. Si lo consideras necesario puedes agregar más datos o información.*

La figura propuesta¹⁹ a los estudiantes para que inventen el problema es la siguiente:

Figura 1 *Imagen presentada en la primera tarea de invención de problemas*



Las indicaciones de la segunda tarea de invención de problemas son similares a la anterior; pero en ésta tuvieron que inventar un problema matemático a partir de la siguiente situación expuesta de forma textual en la que no aparece ninguna imagen: *Un tren con cuatro vagones para pasajeros sale de una estación a las 9:00 h con destino a Málaga. El tren tiene una capacidad máxima para 294 pasajeros.*

Descripción de las categorías de análisis empleadas

Para elaborar las categorías de análisis consideramos las características propias de esta investigación y realizamos una revisión de las variables de estudio de los problemas aritméticos propuestas por Puig y Cerdán (1988)²⁰; Castro (1995)²¹; Silver

¹⁹ <http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2009/problematic/menuppal.html>

²⁰ Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos*. Madrid: Síntesis.

²¹ Castro, E. (1995). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa*. Tesis doctoral. Granada: Comares.

y Cai (2005)²²; Castro et al., (1988)²³ y los esquemas para valorar las producciones de los estudiantes ante tareas de invención de problemas empleados por Leung y Silver (1997)²⁴; Silver y Cai (2005)²⁵; Cázares (2000)²⁶; Ayllón (2004)²⁷; Silver y Cai, (1996)²⁸. Así, definimos las siguientes tres categorías de análisis y en cada una de ellas variables de estudio que nos permitieron caracterizar los problemas inventados por los estudiantes. Dichas variables se explican con mayor detalle y sustento teórico en el trabajo de investigación de Espinoza (2011).

En la primera categoría, denominada estructura sintáctica, se estudió la longitud del enunciado, tipo de proposición interrogativa y tipo de número empleado. La longitud del enunciado fue analizada de acuerdo a la cantidad de proposiciones presentes y hace referencia a aquellas expresiones explícitas en el texto del enunciado que asignan un valor numérico o una cantidad a una variable, o bien, establece una relación cuantitativa entre dos variables. Cada una de estas expresiones aportan un dato al problema; sin embargo, algunas podrían no ser utilizadas en la solución del mismo por aportar un dato superfluo. El tipo de proposición interrogativa está relacionada con la pregunta del problema y se puede clasificar de acuerdo a la presencia de proposiciones de asignación, condicionales o relacionales (Silver y Cai, 2005)

La segunda categoría llamada estructura matemática fue analizada de acuerdo con el tipo de estructura operatoria y número de etapas, cantidad de procesos de cálculo

²² Silver y Cai (2005). Assessing students' mathematical problem posing. *Teaching Children Mathematics*, 12(3), 129-135.

²³ Castro, E., Castro, E., Rico, L., Gutierrez, J., Tortosa, A., Segovia, I., et al. (1997). Problemas aritméticos compuestos de dos relaciones. En L. Rico y M. Sierra (Eds.), *Primer simposio nacional de la SEIEM* (pp 63-76). Granada: SEIEM.

²⁴ Leung, S., Silver, E (1997). The role of task format, mathematics knowledge, and creative thinking on the arithmetic problem posing of prospective elementary school teachers. *Mathematics Education Research Journal*, 9(1), 5-24.

²⁵ Silver y Cai (2005). Assessing students' mathematical problem posing. *Teaching Children Mathematics*, 12(3), 129-135.

²⁶ Cázares, J. (2000). *La invención de problemas en escolares de primaria: un estudio evolutivo*. Memoria de tercer ciclo. Granada: Universidad de Granada.

²⁷ Ayllón, M. (2004). *Invención de problemas con números naturales, enteros negativos y racionales. Tarea para profesores de educación primaria en formación*. Memoria de Tercer Ciclo. Granada: Universidad de Granada.

²⁸ Silver, E., Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(5), 521-539.

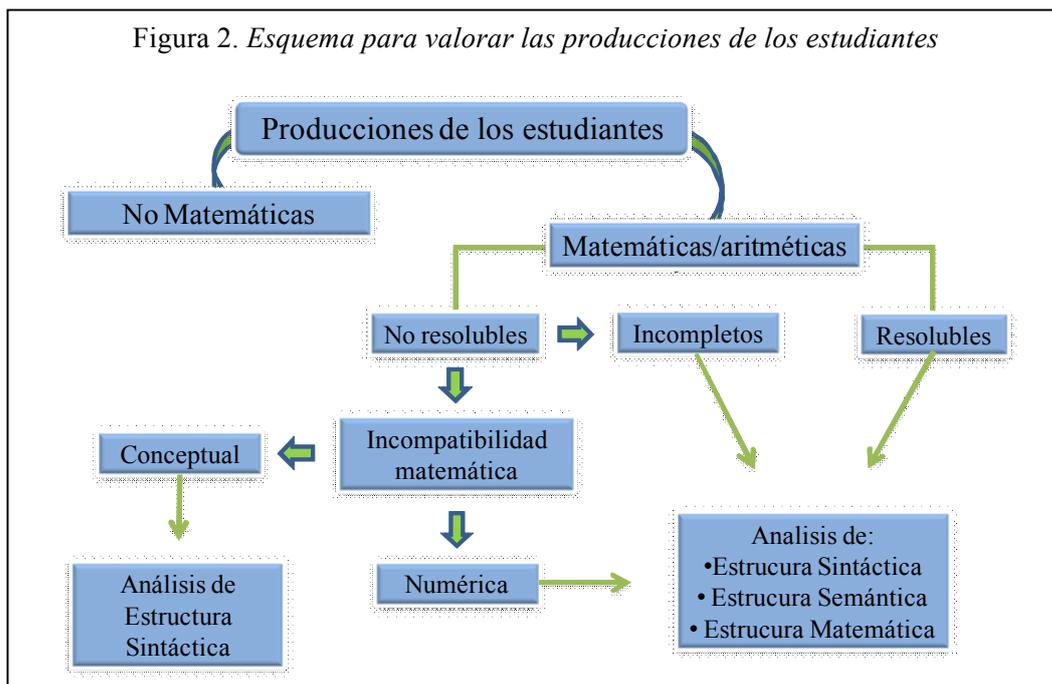
distintos implicados en la solución del problema y cantidad de pasos distintos para resolver el problema. Por último, en la categoría de estructura semántica, los problemas fueron estudiados en relación a su estructura semántica y cantidad de relaciones semánticas distintas presentes en el enunciado.

Esquema para valorar las producciones de los estudiantes

Todas las producciones de los estudiantes correspondieron a problemas matemáticos, por lo que los autores del estudio los resolvieron y clasificaron en resolubles y no resolubles. Dentro de las producciones de los estudiantes encontramos problemas matemáticos no resolubles que presentaron características importantes de analizar. Por ello los clasificamos como incompletos (Puig y Cerdán, 1988) y los distinguimos de aquellos que presentan incompatibilidad matemática de tipo numérico o conceptual (Espinoza, 2011). A los problemas matemáticos resolubles y no resolubles clasificados como incompletos o que presentan incompatibilidad matemática de tipo numérica se les aplicó el análisis de la estructura sintáctica, semántica y matemática explicado anteriormente. Mientras que los problemas matemáticos que presentan incompatibilidad matemática de tipo conceptual fueron analizados sólo desde su estructura sintáctica, pues no era posible analizar la estructura semántica y matemática.

La figura 2 muestra el esquema utilizado para valorar las producciones de los estudiantes

Figura 2. Esquema para valorar las producciones de los estudiantes



Resultados

En primera instancia encontramos que todos los estudiantes respondieron a las dos tareas de invención de problemas propuestas, obteniendo un total de 42 problemas matemáticos de los cuales el 57% son resolubles. Con respecto a los problemas no resolubles, resultó que el 66,6% presentan incompatibilidad matemática y el 33,3% son incompletos.

El siguiente es un problema incompleto: En este viaje va lleno. En una primera parada se bajan 2 parejas, una con un hijo más que la otra, y suben un número de personas tal que quedan 290. En la segunda parada bajan 10 parejas y suben 15 personas, y en la última antes de llegar, bajan 3 personas y suben el triple de niños que tenían las dos primeras parejas juntas. ¿Cuántas personas subieron en la primera parada y cuántos niños tenían cada pareja (de la 1° parada)?

Este problema plantea una serie de relaciones entre los datos y presenta una gran riqueza en cuanto a las variables de estudio; sin embargo, no es resoluble porque no se indicó el total de personas que quedaron en el interior del tren después de la última parada.

Un problema que presenta incompatibilidad matemática de tipo numérica porque 294 no es divisible por 4 es el siguiente: *De la estación de tren de Madrid sale un tren con cuatro vagones a las 9:00 h con destino a Málaga. Todos los pasajes están vendidos (294) pero en un último momento uno de los vagones sufre una serie de desperfectos por lo que debe quedarse en la estación. Si todos los vagones tienen la misma capacidad. ¿Cuánto pasajeros deben quedarse en tierra?*

Con respecto al análisis según la estructura sintáctica, resultó que el promedio de la cantidad de proposiciones presentes en los problemas fue de 5,27 y que el 69,1% de los problemas están conformados por cinco o más proposiciones. También se observó que la mayoría de las proposiciones interrogativas son de asignación (52,4%), mientras que las proposiciones interrogativas relacionales fueron las menos preferidas. Por último, los enunciados se caracterizaron por la presencia de números naturales (97,6%) y números racionales expresados tanto en notación decimal como fraccionaria (43,9%)

En relación con el análisis según la estructura matemática, se encontró que los estudiantes prefirieron plantear problemas de estructura mixta (80%), seguido de problemas de estructura multiplicativa (17,5%). Estos dos resultados nos indican que el 97,5% de problemas son de estructura multiplicativa o aditiva de más de una etapa o problemas de estructura mixta. También observamos que el 92,5% de los problemas implicaron dos o más procesos distintos para ser resueltos y que aproximadamente la mitad (47,5%) de los problemas presentan tres o más procesos distintos. Además se observó que los problemas requieren en promedio 3,95 pasos para ser resueltos. Esto se evidenció en la cantidad de problemas que requieren cuatro o más pasos para ser resueltos, puesto que el 67,5% presentaron esta característica. Otro resultado a destacar es que el 66,6% de los problemas que presentan dos o tres relaciones semánticas distintas implican cuatro o más pasos para ser resuelto y que el 60,7% de los problemas que incluyen dos o tres procesos requieren cuatro o más pasos para ser resueltos.

Por último, en el análisis según la estructura semántica, resultó que los estudiantes sólo plantearon un problema aditivo y presenta la relación semántica de cambio. Con respecto a los 33 problemas de estructura aditiva y mixta, se encontró que el 81,8% son de combinación, el 51,5% de cambio y en menor proporción (9,1%) presentaron la estructura semántica de igualación. De los 7 problemas de estructura

multiplicativa, 5 son de producto de medida, 5 de isomorfismo de medida y sólo uno es de comparación multiplicativa. Con respecto a los 39 problemas de estructura multiplicativa y mixta, resultó que el 79,5% son de isomorfismo de medida y el 33,3% de producto de medidas. Otro resultado destacable es que los problemas presentan en promedio 2,83 relaciones semánticas distintas y que el 65% presentan tres o más relaciones semánticas distintas.

3. CONCLUSIONES

Luego de revisar los problemas aritméticos planteados por los estudiantes en relación con las variables de estudio definidas y considerando las limitaciones de nuestra investigación, podemos concluir que un estudiante con talento se puede caracterizar por inventar una gran cantidad de problemas no resolubles; incluir en el enunciado del problema cinco o más proposiciones; emplear números naturales y en menor proporción números racionales; utilizar dos tipos de números distintos, ya sean naturales o racionales expresados en notación decimal y/o fraccionaria; incluir como pregunta del problema proposiciones interrogativas de asignación; plantear problemas de estructura mixta; incluir las relaciones semánticas de combinación y producto de medidas; plantear tres o más relaciones semánticas distintas; inventar problemas que requieren cuatro o más pasos para ser resueltos y que presentan dos o más procesos de cálculo distintos en su solución.

El siguiente es un ejemplo de problema que cumple con las características citadas: *En este viaje va lleno. En la primera parada se bajan 2 parejas, una con un hijo más que la otra, y suben un número de personas tal que quedan 290. En la segunda parada bajan 10 parejas y suben 15 personas, y en la última antes de llegar, bajan 3 personas y suben el triple de niños que tenían las dos primeras parejas juntas. ¿Cuántas personas subieron en la primera parada y cuántos niños tenía cada pareja (de la 1° parada)?*

Agradecimientos

Este trabajo contó con el financiamiento de la Junta de Becas de la Universidad Nacional de Costa Rica (UNA) y la Comisión de Incentivos del Consejo Nacional para Investigaciones Científicas y Tecnológicas (CONICIT) del Ministerio de Ciencia y Tecnología de Costa Rica y se realizó en el seno del Grupo de investigación “Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico” de la Universidad de Granada,

perteneciente al Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía (FQM-193) y en el marco del proyecto de investigación EDU2009-11337 “Modelización y representaciones en educación matemática” del Plan Nacional de Investigación, Desarrollo e Innovación 2010-2012 del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

4. Anexos.

ANEXO A

Instrumento de recolección de información

Nombre del alumno _____

Edad _____

Provincia de residencia _____

Nombre del centro educativo _____

Nivel que cursa en dicho centro educativo _____

Tarea # 1

De acuerdo con la información de la siguiente figura, inventa un problema matemático que te parezca difícil de resolver y que en su resolución se utilice una o varias de las operaciones de suma, resta, multiplicación o división. Si lo consideras necesario puedes agregar más datos o información.



Tarea # 2

Con la siguiente información inventa un problema matemático que te parezca difícil de resolver y que en su resolución se utilice una o varias de las operaciones de suma, resta, multiplicación o división. Si lo consideras necesario puedes agregar más datos o información.

Un tren con cuatro vagones para pasajeros sale de una estación a las 9:00 h con destino a Málaga. El tren tiene una capacidad máxima para 294 pasajeros.