REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática.

Volumen IV Número 2 Fecha: Diciembre, 2016

ISSN: 2395-955X

ISSN: 2395-955X

EL PROBLEMA DE APOLONIO EMPLEANDO GEOGEBRA

José Eduardo Mellado Sánchez, Noelia Londoño Millán, Otilio Mederos Anoceto

Universidad Autónoma de Coahuila, México.

j.mellado@uadec.edu.mx, *noelialondono@uadec.edu.mx*
omederosa@uadec.edu.mx

Para citar este artículo:

Mellado, J. E., Londoño, N. y Mederos, O. (2016). El problema de Apolonio empleando GeoGebra. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. IV, No. 2. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año 4, No. 2, Julio – Diciembre 2016, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Calle Gordiano Guzmán #6, Benito Juárez, C.P.49096, Ciudad Guzmán Jalisco, Teléfono: 3411175206. Correo electrónico: http://www.amiutem.edu.mx/revista, revista@amiutem.edu.mx. Editor responsable: M.C. Christian Morales Ontiveros. Reserva derechos exclusivos al No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 28 de Diciembre de 2016.

EL PROBLEMA DE APOLONIO EMPLEANDO GEOGEBRA

José Eduardo Mellado Sánchez, Noelia Londoño Millán, Otilio Mederos Anoceto

Universidad Autónoma de Coahuila, México.

j.mellado@uadec.edu.mx, *noelialondono@uadec.edu.mx* *omederosa@uadec.edu.mx*

Palabras clave: geometría, tangencias, construcción, GeoGebra.

Resumen.

En el presente artículo se explica y se discute la solución de dos casos del conocido problema de Apolonio, con sus respectivos incisos, incorporando el software GeoGebra. Este problema es considerado como uno los problemas más importantes dentro de la geometría euclidiana, el cual se divide en diez casos sobre tangencias, aquí se analizan de forma comparativa los dos procesos de las construcción, usando tecnología y regla y compás tradicionales, también se muestra la construcción de nuevas herramientas en el software, las cuales permiten realizar los otros casos del problema, en forma más rápida y efectiva. Vale la pena destacar, que aunque el problema se puede solucionar de forma analítica y sintética, en este artículo solo se menciona la forma sintética.

Introducción

Uno de los problemas de la antigüedad que involucra la construcción de figuras utilizando regla y compás es el Problema de Apolonio que se puede enunciar de la siguiente manera:

“Dados tres objetos matemáticos, cada uno de los cuales puede ser un punto, una recta o una circunferencia, construir una circunferencia que sea tangente a los tres objetos dados, (o que los contenga en el caso de los puntos)”. (García, 2000)

Al realizar las combinaciones entre los objetos posibles, se tienen los diez casos siguientes:

1. Tres puntos.
2. Tres rectas.
3. Dos puntos y una recta.
4. Dos rectas y un punto.
5. Dos puntos y una circunferencia.
6. Dos circunferencias y un punto.
7. Dos rectas y una circunferencia.
8. Dos circunferencias y una recta.
9. Un punto, una recta y una circunferencia.
10. Tres circunferencias.

Los casos más sencillos (1 y 2) vienen resueltos en el Libro IV de los *Elementos* de Euclides, los casos 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 se encuentran en el Libro I y los casos 7 y 10 en el Libro II de *Tangencias* del mismo Apolonio.

Sobre Apolonio: Apolonio vivió en Alejandría, donde fue estudiante y después profesor de la escuela de los sucesores de Euclides, institución impulsada por el mismo Apolonio. También conocido como el Gran Geómetra por sus trabajos sobre geometría, que principalmente hablan de las secciones cónicas, curvas planas y la cuadratura de sus áreas. Además dio el nombre a los términos de elipse, hipérbola y parábola. También explicó el movimiento de los planetas según la teoría de los epiciclos.

Marco teórico

En la enseñanza de las matemáticas, la resolución de problemas ha sido y seguirá siendo un proceso fundamental que debe realizarse con cierta cotidianidad, ya que es una forma de ver si lo enseñado puede ser usado en el momento que sea requerido, y que no forme parte simplemente de un conjunto de datos inútiles que los alumnos pudieran encontrar en libros, enciclopedias o en internet. Desde la perspectiva de Schoenfeld (1999), acerca de la resolución de problemas, donde se plantea que para tener éxito en la solución de problemas debe manejarse de manera coherente las siguientes dimensiones: el *dominio de conocimientos*, las *estrategias cognitivas*, las *estrategias metacognitivas* y el *sistema de creencias*, en este estudio de discute sobre las tres primeras y se incorpora una nueva que el autor no menciona y es el uso de la tecnología, en particular, el uso de la ventana gráfica de GeoGebra, para el desarrollo de construcciones geométricas.

Sobre el dominio de conocimientos, se entiende como el uso de teoremas, definiciones, axiomas corolarios, postulados, etc., que se deben conocer y usar cuando así se requiera, especialmente, los conceptos cruciales que intervienen en este estudio, que es el postulado de Euclides sobre la circunferencia, que se enuncia de manera siguiente: “para construir una circunferencia basta conocer el centro y el radio. Otro concepto es el de circunferencia tangente, (a una recta, a una circunferencia) y que son precisamente los elementos desconocidos en el problema de Apolonio. Un conocimiento presente en este trabajo fue el domino de las herramientas del software, se tenía cierto dominio y eso permitió de cierta manera desarrollar los problemas con mayor certeza.

La definición de tangencia que se maneja en este estudio, corresponde al de geometría sintética esta es: la recta tangente se define como la una recta que tiene un sólo punto común con la circunferencia (Lehmann, 2009). Para el caso de las circunferencias ocurre de manera similar, debe haber sólo un punto común entre los objetos, bien sean rectas, puntos y circunferencias, según sea el caso; aclaramos esta parte porque la definición de tangencia que persiste en cálculo, difiere de la utilizada en este documento.

Las *estrategias metacognitivas* que se usaron en geometría dinámica es la denominada *prueba del arrastre*, esta se entiende como la conservación de las propiedades de la figura construida aun cuando se cambien las posiciones y los tamaños de los objetos iniciales implicados en la construcción. Schoenfeld, sugiere que se utilice esta estrategia desde el principio de la solución, para realizar los correctivos que se consideren necesarios en tiempo y forma.

Acerca de las estrategias cognitivas se puede hablar que se implementaron varias de ellas, en particular, la de considerar que el problema si tenía solución y realizar el proceso inverso, es decir, ir de atrás para adelante, explorar diferentes opciones de solución, y descartar aquellas que fueran imposibles de considerar.

Metodología

El proceso metodológico bajo el cual se desarrolló este estudio tuvo dos fases, la primera consistió en la construcción de los problemas de Apolonio usando solamente regla y compás. La segunda fase consistió en solucionar los problemas usando las diferentes herramientas de GeoGebra; aunque los procesos fueron un tanto similares, los resultados obtenidos fueron diferentes, particularmente algo que fue de gran ayuda, es la creación de nuevas herramientas en donde los problemas posteriores se solucionan usando los anteriores y estas nuevas herramientas hacen posible un desarrollo más rápido y eficiente de todos los problemas. Por cuestión de espacio solo se hablará sobre la solución de dos casos del problema de Apolonio.

Exposición de la propuesta

Se ha discutido en varios documentos sobre el uso de la tecnología, Hitt (2014), Hitt y Cortes (2013), Camacho y Santos (2003), ya que esta juega un papel crucial en el proceso de resolución de problemas, en particular, los abordados aquí se permitió ver varias soluciones del mismo problema, al cambiar algunas características de los objetos iniciales, esto es, permite generar figuras con dinamismo que no pierden sus características originales.

Dentro de este trabajo, se explicará la construcción de dos casos del problema de Apolonio con ayuda del software *GeoGebra,* posteriormente se explicará la creación y uso de las nuevas herramientas para solucionar otros problemas.

Los dos casos que desarrollaremos serán:

- *Dos puntos y una recta*: consiste en hallar, dados dos puntos y una recta, una circunferencia que pase por los dos puntos y sea tangente a la recta.
- *Dos puntos y una circunferencia,* que consiste en hallar, dados dos puntos y una circunferencia, una circunferencia que pase por los dos puntos y sea tangente a la circunferencia dada.

Problema 1. Dados dos puntos y una recta, construir la circunferencia tangente a ellos, en el caso de los puntos, que la circunferencia los contenga. Al analizar el planteamiento del problema pueden visualizarse diversas posibilidades:

- Ambos puntos estén en una recta paralela a la recta dada (Figura 2.).
- Ambos puntos estén en una recta que no es paralela a la recta dada (Figura 3.).
- Uno de los puntos pertenece a la recta dada.

Antes de explicar los pasos a seguir en GeoGebra para la construcción, analizaremos cómo se tiene que resolver el problema. En este caso en el que tenemos dos puntos y una recta, lo que tendremos que buscar es un punto, centro de la circunferencia que se busca, que equidiste de los dos puntos y de la recta dados. Analíticamente se tendría que resolver un sistema de ecuaciones, sin embargo en este artículo se discutirá solamente la solución sintética.

Experimentación

Antes de empezar a solucionar los problemas se procedió a entenderlos, pensar en estrategias de solución, responder preguntas como ¿qué si sé? y ¿qué se puede usar? etc. (Polya, 1965; Schoenfeld, 2000; Mason, 1989). Una vez hecho este análisis pudieron establecerse un conjunto de pasos para llegar a una solución que fue puesta a prueba cada vez. Los pasos a seguir para el caso en que los dos puntos se encuentren en una recta paralela a la recta dada:

1. Dar los dos puntos *A* y *B* que pertenezcan a una recta *a* y dar una recta *b* paralela a la recta *a*.
    a. Para construir la recta *b* utilizamos la herramienta de *Recta Paralela.*
2. Con ayuda de la herramienta *Mediatriz* construiremos la mediatriz del segmento *AB.*
3. Buscaremos la intersección, *D,* de la mediatriz con la recta *b,* utilizando la herramienta de *Intersección.*
4. Con la herramienta *circunferencia por tres puntos*, construíremos la circunferencia que estamos buscando (que sea tangente a la recta dada *b* y que contenga a los puntos dados *A* y *B*) utilizando los puntos *A*, *B* y *D*.

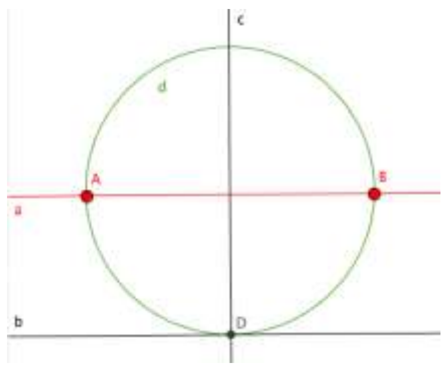

Figura 2. Dos puntos *A* y *B*, una recta paralela *b* a la recta *AB.*

Si analizamos la posibilidad de que ambos puntos estén en una recta no paralela a la recta dada utilizando GeoGebra, a *grosso modo* los pasos que se deben seguir son los siguientes:

1. Dar los dos puntos *A* y *B* y la recta *a*.
2. Trazar una recta *b* que pase por los puntos *A* y *B.*
3. Utilizando la herramienta *Intersección* buscar la intersección entre la recta *a* y *b*; y a ese punto llamarlo *M.*
4. Con la herramienta de *Punto medio o Centro* buscar el punto medio del segmento *AB* que llamaremos *C.*
5. Trazar una circunferencia *c* con la herramienta *Circunferencia (centro,radio)* con centro en *C* e ingresar un radio igual a $\frac{AB}{2}$; ya que queremos una circunferencia de diámetro *AB.*
6. Construir una tangente a la circunferencia *c* que pase por el punto *M,* utilizando la herramienta *Tangentes*, además buscar el punto de tangencia que llamaremos *T.*

7. Utilizando la herramienta *Circunferencia (centro, punto)* construir una circunferencia *d*, con centro en *M* y el otro punto *T*.
8. Con la herramienta *Intersección* buscar los puntos *J* y *K* que son intersecciones de la circunferencia *d* y la recta *a*.
9. Construir las circunferencias que buscamos (que sean tangentes a la recta *a* y contengan a los puntos *A* y *B*) con la herramienta *Circunferencia por tres puntos*, utilizando los puntos *A*, *B* y *J* para una circunferencia *e* y los puntos *A*, *B* y *K* para la otra circunferencia *f*.

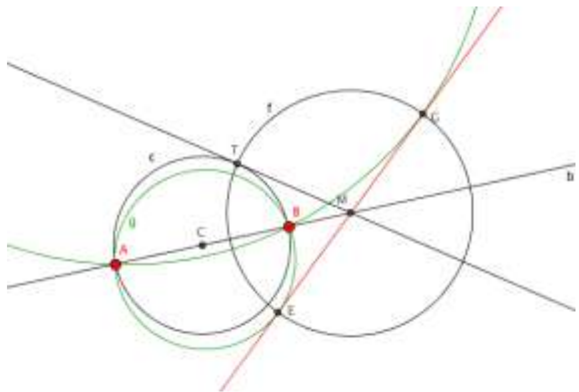

Figura 3. Dos puntos *A* y *B*, una recta *a*.

Ahora analizando el caso que uno de los puntos pertenezca a la recta dada:

1. Dar un punto *A*
2. Crear una recta *a* con la herramienta Recta
3. Poner un punto *D* en la recta *a*.
4. Trazar la mediatriz de *AD* con la herramienta *Mediatriz*.
5. Trazar la perpendicular a la recta *b* con pie de perpendicular en *D*.
6. Buscar el punto de intersección *E*, de la mediatriz de AD con la perpendicular del paso anterior; utilizando la herramienta *Intersección.*
7. Con la herramienta de Circunferencia (Centro, Punto), crear una circunferencia d con centro en E y el otro punto puede ser A o D, y esta es la circunferencia que buscamos.

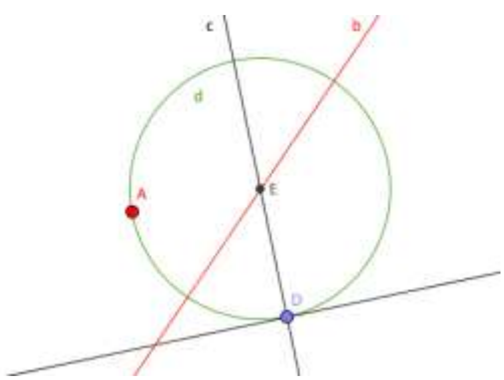

Figura 4. Dos puntos *A* y *D*, con *D* que pertenece a una recta *a*.

Siguiendo cada uno de estos pasos se han obtenido las distintas posibilidades de solución de este problema, pero vale la pena resaltar que aunque se cambien de "posición los objetos iniciales" (dos puntos y una recta), la construcción realizada con regla y compás electrónico se mantiene, es decir, al hacer el proceso de metacognición, la figura construida se mantiene. Usando la definición de tangencia no es posible, por ejemplo, que ambos puntos pertenezcan a la misma recta, por lo que el cambio de posición debe ser acorde al problema, tampoco es posible que los puntos estén en los dos distintos semiplanos que genera la recta, ya que hace imposible la solución del problema. Por supuesto que estas consideraciones se hicieron desde el planteamiento del problema, cuando se analizaron las distintas opciones.

Segundo problema: Corresponde al caso, en el que a partir de *dos puntos* y una *circunferencia*; se construya la circunferencia tangente a los tres. Analizando la información proporcionada se observan varias posibilidades; considerando que ambos puntos no pertenecen a la circunferencia:

- Que ambos puntos sean interiores o exteriores a la circunferencia. (Figuras 5 y 5.1)
- Que uno de los puntos pertenezca a la circunferencia y el otro sea interior o exterior a esta. (Figura 6 y 6.1)

Desarrollando la primera posibilidad (el proceso para el caso en que ambos puntos sean exteriores a la circunferencia es el mismo para el caso en que sean interiores a esta):

1. Dada una circunferencia c y dos puntos exteriores (interiores) C y D.
2. Utilizando la herramienta *Mediatriz*, encontramos la mediatriz del segmento CD.
3. Con la herramienta de *Circunferencia por Tres Puntos*, construímos una circunferencia d, que pase por los puntos C, D y E (Este último punto es un punto cualquiera que pertenece a la circunferencia c).
4. Construímos la recta CD, utilizando la herramienta *Recta.*
5. Buscamos las intersecciones F y G de las dos circunferencias c y d; con ayuda de la herramienta *Intersección*.
6. Trazamos la recta FG que es el eje radical de las dos circunferencias con la herramienta *Recta*.
7. Buscamos la intersección H, del eje radical (FG) con la recta CD; ayudandonos de la herramienta *Intersección*.
8. Con ayuda de la herramienta *Tangentes*, construímos las tangentes a la cirunferencia c que pasen por el punto H.
9. Encontramos las intersecciones I y J de las rectas tangentes con la circunferencia c, ayudandonos de la herramienta *Intersección*. (Los puntos I y J también son puntos de tangencia de las circunferencias que estamos buscando)
10. Con la ayuda de la herramienta *Circunferencia por Tres Puntos*, construíremos la circunferencia h que pasa por los puntos C, D e I; y la circunferencia k que pasa por los puntos C, D y J. Ambas circunferencias h y k son las que buscamos.

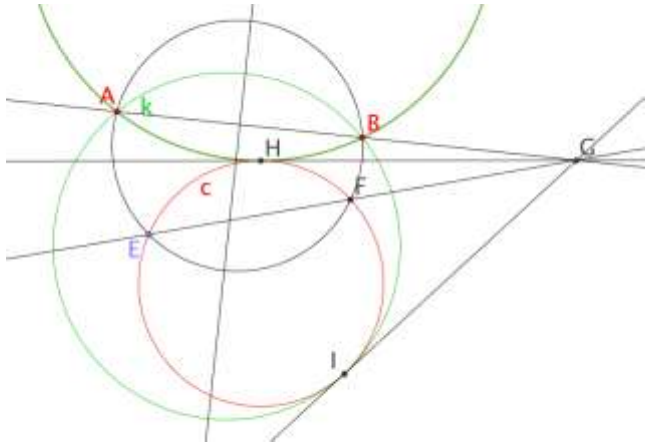

Figura 5. Dos puntos exteriores *A* y *B* exteriores a una circunferencia *C.*

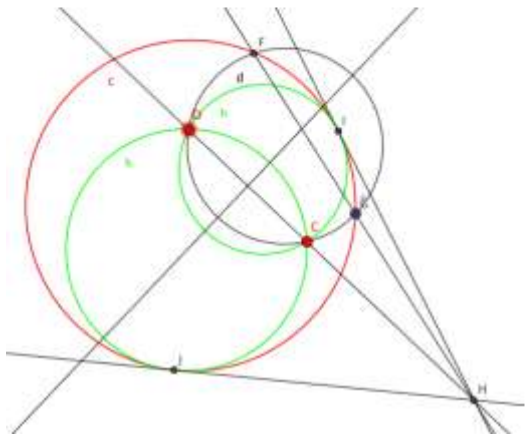

Figura 5.1. Dos puntos interiores *D y C* interiores a una circunferencia *c*

A continuación describiremos el proceso a seguir para nuestra segunda posibilidad (el caso en que un punto pertenezca a la circunferencia y el otro sea interior o exterior a este (igual que en el caso anterior, no importa si el punto sea exterior o interior a la circunferencia, se sigue el mismo proceso) (Figura 6 y 6.1).

1. Dada una circunferencia c, un punto C que pertenezca a esta circunferencia y un punto D exterior (interior) a la circunferencia.
2. Con ayuda de la herramienta Punto Medio o Centro, hallaremos el punto E que es centro de la circunferencia c.
3. Trazamos la recta CE con la herramienta Recta
4. Trazamos la mediatriz de CD con la ayuda de la herramienta Mediatriz.
5. Con la herramienta Intersección buscamos el punto F que es la intersección de las dos rectas trazadas en los pasos anteriores (3 y 4); además es el centro de la circunferencia que estamos buscando.
6. Ayudandonos de la herramienta Circunferencia Centro-Punto, trazamos la circunferencia d con centro en F y el otro punto C o D (ambos son los puntos dados).

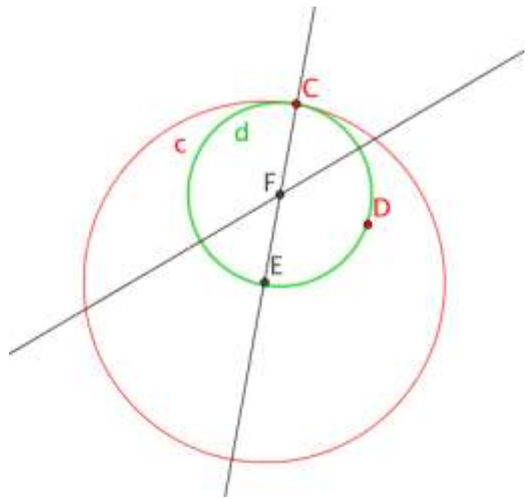

Figura 6. Un punto *D* interior y un punto *C* perteneciente a la circunferencia *D.*

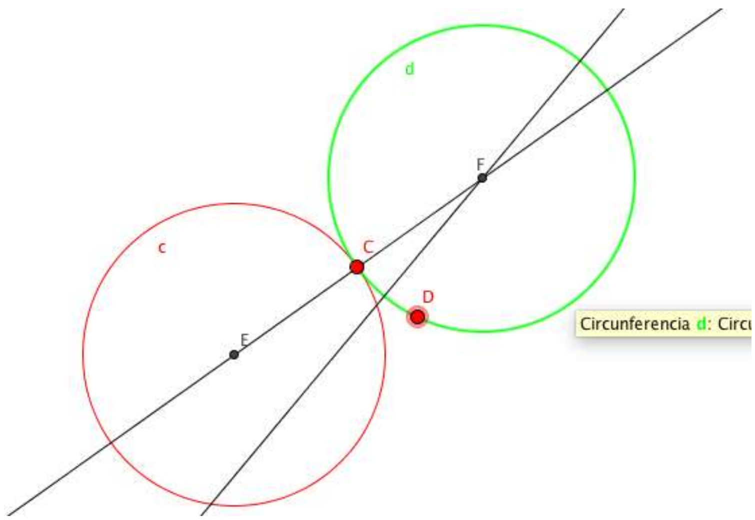

Figura 6.1. Un punto *D* exterior y un punto *C* perteneciente a la circunferencia *d.*

Es prudente advertir que este problema no tiene solución si uno de los puntos está en el interior y el otro en el exterior.

Proceso seguido para crear una *nueva herramienta en GeoGebra*: Al seleccionar la opción de crear una herramienta (Figura 7), que se encuentra en la parte superior del software se despliega una nueva ventana (Figura 8) para la creación de dicha herramienta.

Para ejemplificar la creación de una herramienta utilizaremos el caso de dos puntos y una circunferencia.

Lo primero que se nos pregunta son los objetos de salida (Figura 9), lo que haremos será seleccionar aquellos que queremos sean los objetos finales, en nuestro caso las circunferencias h y k. Después nos pregunta los objetos iniciales (Figura 10), aquellos objetos con los que iniciamos, en nuestro caso los dos puntos iniciales A y B y la circunferencia c. Por último nos pregunta el software el nombre de la herramienta (Figura 11), nosotros señalamos dos puntos y una circunferencia, automáticamente se pone el nombre del comando y además podemos personalizar el ícono a usarse. Para finalizar picamos el botón de concluido y la herramienta se agrega a la barra.

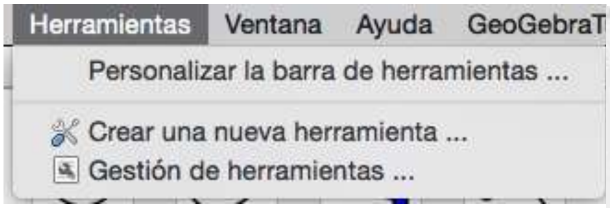

Figura 7. Opción de *Crear una nueva Herramienta.*

Figura 8. Ventana de *Crear una nueva herramienta.*

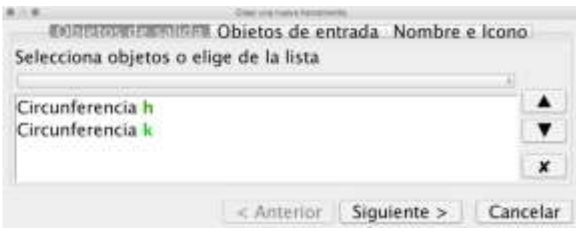

Figura 9. Objetos de Salida.

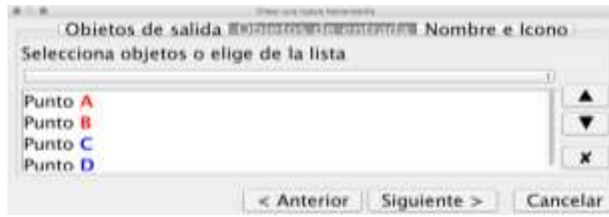

Figura 10. Objetos de Entrada.

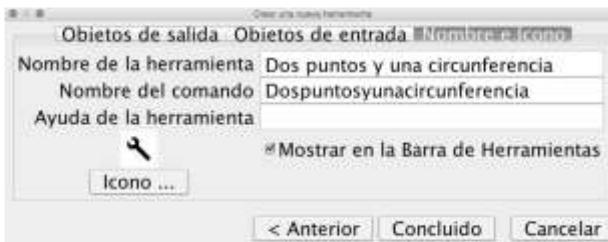

Figura 11. Nombre de la herramienta

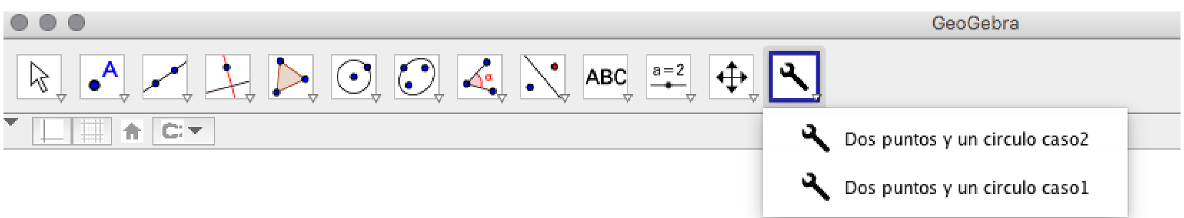

Figura 12. Ventana de Geogebra con herramientas creadas.

Resultados

Como resultados se obtuvieron las distintas soluciones del problema de Apolonio para los casos enunciados anteriormente y aparte de esto se crearon las nuevas herramientas en el software que sirven de base para los demás casos del mismo problema. Se analizaron las distintas posibilidades del problema y se descartaron aquellas que no cumplían con las condiciones, se pusieron en juego tres de las dimensiones planteadas por Schoenfeld en cuanto a lo referente a domino de conocimientos, estrategias cognitivas y metacognitivas.

Conclusiones

Al comparar los procesos de construcción de los problemas con GeoGebra y usando solamente regla y compás, se puede enunciar lo siguiente:

El dominio de conocimientos sobre geometría utilizados fueron los mismos, aunque con regla y compás resultó ser un proceso tedioso y largo.

El resultado de la construcción con lápiz y papel es único, solo se obtiene una versión del problema, mientras que con el uso de GeoGebra se tiene varias versiones y la generalización de las definiciones y teoremas aplicados.

Una ventaja que tiene el uso del software, además del tiempo de construcción, es que se puede mover libremente los elementos iniciales y las circunferencias resultantes, siempre van a cumplir con la propiedad de ser tangente a los tres elementos iniciales.

Un aporte que se hace en este artículo es la implementación y construcción de nuevas herramientas dentro del software, herramientas que después podemos utilizar para la construcción de los siguientes casos, con solo darle los elementos iniciales y evitar todo el proceso de construcción. Esto reduce de manera significativa el trabajo y el tiempo de construcción.

Bibliografía

García, F. J. (2000). *Problema de Apolonio*. Recuperado de http://garciacapitan.99on.com/bella/htm/apolonio.htm

GeoGebra. *Sitio oficial* www.geogebra.org

Hitt, F. (2014). ¿Qué tecnología utilizar en el aula de matemáticas y por qué? *Revista Electrónica AMIUTEM*. 1 (1). 1-18.

Lehmann, C. (2009). *Geometría analítica*. México: Limusa.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (1989). *Pensar matemáticamente*. España: Ed. Labor.

Polya, G. (1965). ¿*Cómo plantear y resolver problemas*? México: Trillas.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to Thinking Mathematically: Problem Solving, metacognition and sense making in mathematics. In D. Grouws (Eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. NCTM.