REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen V Número 2 Fecha: Julio-Diciembre de 2017

ISSN: 2395-955X

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA ABORDAR APLICACIONES DEOPERACIONES MATRICIALES CON ESTUDIANTES DE INGENIERÍA

[1]Gabriel Martínez Gradilla, [2]Juan José Sevilla García, [3]Ruth Elba Rivera Castellón, [2]Maximiliano de las Fuentes Lara, [4]Ramiro Ávila Godoy

[1,2]Instituto de Ingeniería, [2,3]Facultad de Ingeniería, [1,2,3,4]Universidad Autónoma de Baja California, México. [4]Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México

gabriel.martinez.gradilla@uabc.edu.mx,jsevilla@uabc.edu.mx,rrivera@uabc.edu.mx,maximilianofuentes@uabc.edu.mx, ravilag@mat.uson.mx

Para citar este artículo:

Martínez, G., Sevilla, J. J., De las Fuentes, M, Ávila, G. (2017). Propuesta didáctica para abordar aplicaciones de operaciones matriciales con estudiantes de ingeniería. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. V, No. 2. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año V, No. 2, Julio-Diciembre de 2017, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: https:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA ABORDAR APLICACIONES DE OPERACIONES MATRICIALES CON ESTUDIANTES DE INGENIERÍA

[1,2]Gabriel Martínez Gradilla, [2]Juan José Sevilla García,[3]Ruth Elba Rivera Castellón, [2]Maximiliano de las Fuentes Lara,[4]Ramiro Ávila Godoy

[1,2]Instituto de Ingeniería, [2,3]Facultad de Ingeniería, [1,2,3,4]Universidad Autónoma de Baja California, México. [4]Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México

gabriel.martinez.gradilla@uabc.edu.mx, jsevilla@uabc.edu.mx, rrivera@uabc.edu.mx, maximilianofuentes@uabc.edu.mx, ravilag@mat.uson.mx

Resumen

Este trabajo expone el diseño e implementación de una situación problémica que involucra una aplicación de ingeniería como mediador para la enseñanza de operaciones matriciales dentro de la asignatura de álgebra lineal. Se aborda el caso de estudio de la modelación de un robot de dos grados de libertad y se brinda como alternativa de salida un código de algoritmo en el software MATLAB, el objetivo instruccional es ofrecer una opción tendiente a enriquecer y fortalecer los reactivos en donde las transformaciones entre tipos de registros de representación se ubican en la parte central del proceso. El uso de la estrategia didáctica arrojó un balance exitoso, en virtud de que promueve la eficacia en la obtención del conocimiento matemático, así como evidencia la disposición, motivación y un protagonismo importante por parte de los estudiantes.

Palabrasclave: Situación problémica, registros de representación, estrategia didáctica, modelación.

Introducción

Son diversos los autores que destacan el nexo entre semiótica y educación, en García (2012, p. 12) por ejemplo, se afirma que *"… hoy más que nunca en la historia del conocimiento científico, la semiótica le proporciona a la educación un enfoque y un conjunto de instrumentos que la sitúan como método preciso y eficaz para explicar el proceso de producción, comunicación y transformación del significado de todo fenómeno educativo"*.

En este orden de ideas, el manejo de conceptos relativos a la llamada *"semiótica matemática"* ha ganado popularidad en las publicaciones científicas contemporáneas del área de conocimiento de la matemática educativa a nivel internacional. Godino (2002) destaca el creciente interés de la comunidad de investigación por el uso de nociones semióticas en el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Así, se puede hacer un recuento de trabajos clásicos presentados en psicología de la educación matemática (Ernest, 1993; Vile y Lerman, 1996) y los realizados desde la perspectiva del interaccionismo simbólico, entre otros, por Bauersfeld y colaboradores (Cobb y Bauersfeld, 1995) que enfatizan la noción de significado y negociación de significados como centrales para la instrucción matemática. Son relevantes también los documentos que trataron la problemática de la influencia de los sistemas de representación (Duval, 1993), simbolización y comunicación (Pimm, 1995; Cobb et al., 2000) y, en general, del lenguaje y el discurso (Ellerton y Clarkson, 1996; Kieran et al., 2001) en la didáctica de la matemática, así como las investigaciones sobre la comprensión de la asignatura (Sierpinska, 1994; Godino, 1996), que no pueden eludir las cuestiones del significado.

Se presenta aquí un primer acercamiento que corresponde a la formulación de una estrategia que, a partir de una *situación problémica* pretende *moderar* la *adquisición* de *conocimientos* relativos con el tema de *operaciones matriciales* el cual se instruye dentro del programa de asignatura de álgebra lineal. En específico, se le pide al sujeto que resuelve los reactivos, la formulación de una forma matricial para un sistema de ecuaciones lineales, esto es, a partir de las instrucciones (en el registro de lenguaje natural)exhibir una respuesta algebraica (*conversión*), lo anterior también constituyendo en un *tratamiento*al involucrar dos configuraciones algebraicas distintas. En la siguiente etapa, se exige del estudianteel cálculo de matriz inversa, significando en una *conversión* delsegundo registro algebraico a la obtención de una réplica numérica. Por último, se precisa del *tratamiento* dentro del registro numérico para llevar a cabo un producto matricial y derivar en una solución final.

Objetivo

El interés de ésta investigación es ubicar *"áreas de oportunidad"* en el marco del proceso de *enseñanza-aprendizaje* de la matemática para programas de ingeniería, así también se deriva en recomendaciones que pueden ser consideradas como *"pertinentes"* y que se formulan después de abordar una propuesta de *diseño didáctico* que aproxima a los estudiantes con una *situación problémica*propia de su área de conocimiento. En atención a lo anterior, se toma como punto de partida un modelo que procede del robot de dos grados de libertad y a cuyaformulación es posible asociar conocimientos sobre *operaciones matriciales*. Se hace énfasis en que el logro del objetivo tiene como punto central el análisis de las evidencias arrojadas por los sujetos al resolver reactivos que involucran *transformaciones* entre tipos de *registros de representación* y que constituye, esto último, la parte del trabajo respecto de la cual ha sido hecho todo el diseño y que es en todo caso, el objeto semiótico matemático en el que se focaliza la investigación.

Marco teórico

De acuerdo con Duval (2006b, p. 144) la *actividad matemática* se realiza ineludiblemente en un *"… contexto de representación"* que por necesidad debe ser semiótico.

Es importante para estos entornos que cuenten con una cierta flexibilidad, porque el *procesamiento matemático* siempre implica alguna transformación de *representaciones semióticas*.

Adicionalmente, un sistema de signos puede ser un *registro de representación*, si permite las tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis (Duval, 1993):

1. La formación de una representación identificable.
2. El tratamiento de una representación.
3. La conversión de una representación.

D'Amore (2006) utiliza el siguiente esquema para relacionar tales ideas:

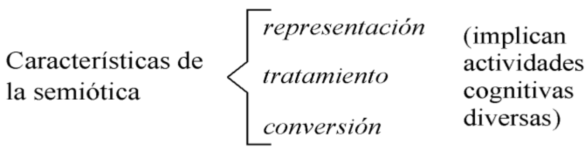


Figura 1. Tres actividades cognitivas asociadas a la semiosis.

Descartes fue el primero que utilizó el término registro de representación para referirse a los distintos campos de simbología que se manejan en matemáticas, pero el aspecto más relevante es el referente a que existen cuatro tipos distintos de ellos (Duval, 2006a):

Tabla 1. *Clasificación de los distintos tipos de registros abordados por la matemática.*

	REPRESENTACIÓN DISCURSIVA	REPRESENTACIÓN NO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONALES: Los procesos no pueden ser estructurados como algoritmos	Lenguaje natural *Asociaciones verbales (conceptuales)* *Razonamiento:* • *argumentos basados en la observación, las creencias…* • *deducciones validadas por definiciones o teoremas*	Figuras geométricas planas o en perspectiva (configuraciones de formas en 0, 1, 2 y 3 dimensiones) • *comprensión operacional y no sólo perceptiva* • *construcción con instrumental geométrico*
REGISTROS MONOFUNCIONALES: Los procesos en su mayoría son algorítmicos	Sistemas de notación • *numéricos (binario, decimal, fraccional…)* • *algebraico simbólicos (lenguajes formales)*	Gráficos cartesianos • *cambio de sistemas coordenados* • *interpolación, extrapolación*

Por otra parte, cuando se analiza cualquier labor matemática, es importante distinguir entre las dos clases de transformación de los registros de representación. En el ejemplo de la figura 2, hay un único cambio de representación en la conversión (aunque en la mayoría de los casos esto no necesariamente es tan simple), mientras que en el tratamiento hay una secuencia de transiciones. Pero es común que conversión y tratamiento estén entrelazados en un mismo proceso de resolución.

TRANSFORMACIÓN
de una representación semiótica a otra distinta
Juan es 3 años mayor que Pedro. Juntos tienen 23 años de edad.
¿Qué edad tienen?

TRATAMIENTO
Consiste en permanecer en el mismo sistema semiótico (registro)

$x+(x+3)=23$

$2x+3=23$

$2x=23-3$

…

CONVERSIÓN
Consiste en cambiar el sistema semiótico (registro) **empleado pero haciendo referencia a los mismos objetos indicados**

$x+(x+3)=23$

Figura 2. Los dos procesos cognitivos fundamentales del pensamiento matemático

En otro orden, según Mestre y Fuentes (2010, p. 40) una disciplina de las ciencias básicas como la matemática, *"… debe aportar un conjunto de habilidades lógicas, experimentales y en la solución de problemas teóricos"*.

"… La insuficiente sistematización en la formación de habilidades en la resolución de problemas de las ciencias básicas, es un negativo y complejo fenómeno".

Calvo (2008, p. 124) abunda lo anterior al afirmar *"… la metodología empleada en la enseñanza de la resolución de problemas en matemáticas, es un elemento clave para el logro satisfactorio de los contenido"*, además, *"… los estudiantes y las estudiantes deben ser introducidos de forma agradable con actividades que mantengan el interés en la materia y evite abstracciones que conllevan a la desmotivación ante la falta de comprensión de los diversos conceptos".*

En García (2010) el *aprendizaje basado en problemas* (ABP), se sustenta sobre el principio de utilizar los problemas como punto de partida para la adquisición e integración de nuevos conocimientos.Promueve el conocimiento aplicado a *escenarios reales*, donde se precisa analizar todos los elementos para alcanzar un resultado.

Las siguientes son algunas de sus características (Guevara, 2010):

1. Es un método donde los *estudiantes participan* en la adquisición de su conocimiento.
2. Se orienta a la solución de ejercicios seleccionados o diseñados para lograr el aprendizaje de ciertos *objetivos* de *conocimiento*.
3. El aprendizaje se *centra* en el *estudiante.*
4. Estimula el trabajo *colaborativo.*
5. El *profesor* se convierte en*facilitador* o *tutor* del aprendizaje.

Metodología

En cumplimiento con la finalidad planteada en este trabajo y en concordancia con el antecedente teórico expuesto, se diseñó una práctica sobre *"modelado matemático básico"*que, partiendo de una *situación problémicaespecífica* al ser resuelta permitiese explorar los aciertos, dificultades y errores presentados por los individuos al efectuar *transformaciones* enlos *tipos de registro* algebraico, numérico y de lenguaje natural. La estructura de *"diseño experimental"* según las condiciones de este desarrollo corresponde a un *"preexperimento"*, ya que ofrece un *referencial inicial* para observar el nivel de la muestra (Hernández, Fernández y Baptista, 2010):

El análisis fue realizado a través de las siguientes fases o etapas:

1. Se seleccionó el *ejemplo de estudio* (en este caso el robot de dos grados de libertad) por medio de una discusión de *pares académicos* y se elaboró el cuerpo de la práctica.
2. Se aplicó el test a dos grupos conalumnos matriculados en distintos programas de licenciatura en ingeniería (eléctrica, electrónica, civil, en computación, industrial, química, mecatrónica y mecánica) de la Universidad Autónoma de Baja California (UABC).
3. Se obtuvieron *conclusiones* pertinentes a partir del*análisis* de los *resultadosmuestrales*.

Exposición de la propuesta

Se trata de un instrumento sobre *"modelado matemático básico"* que toma como ejemplo de estudio al robot de dos grados de libertad (caso muy conocido de la robótica elemental) y que consta de seis partes las cuales serán descritas a continuación de acuerdo con la secuencia que se propone como *"adecuada"* para abordar la práctica:

1. Teoría. Se provee al aplicante un antecedente teórico esencial para que se involucre con el "mecanismo" a modelar.

   El robot de dos grados de libertad (2GDL) es una cadena cinemática "abierta" (o mecanismo) formada por dos cuerpos rígidos (eslabones) acoplados o articulados por juntas o pares (puntos conectivos) rotacionales, su configuración habitual se muestra en la figura 3.

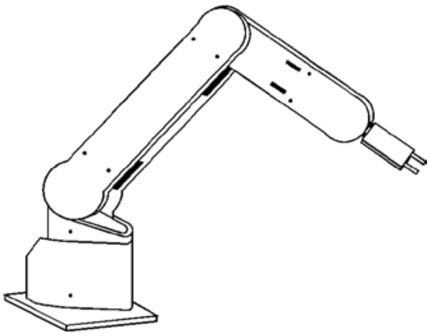


Figura 3. Configuración usual del robot de 2GDL

2. Modelado. Se analiza vectorialmente la cadena y se obtienen dos ecuaciones de "lazo cerrado" que corresponden a las partes en *x* y en *y*. Al final de esta sección se solicita al estudiante que reformule las igualdades de manera"matricial", es decir, una*conversión* de las instrucciones dictadas en lenguaje natural al registro algebraico, pero que también constituye un*tratamiento* algebraico.

   Se trazan "vectores de posición" comenzando en la base del robot y de manera consecutiva sobre los eslabones ($\vec{R}_1$ y $\vec{R}_2$), además se traza otro vector directamente de la base al punto final del mecanismo ($\vec{R}_3$) figura 4.

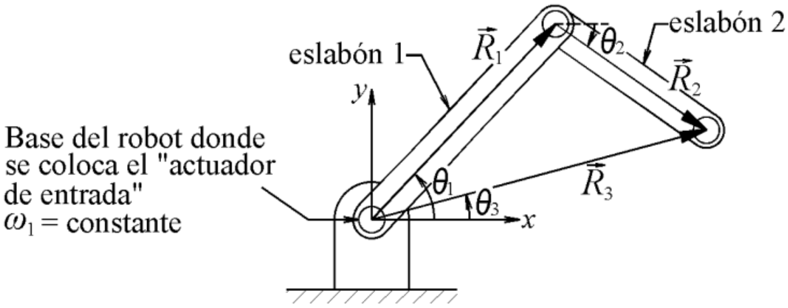


Figura 4. Configuración utilizando vectores

Los parámetros identificados con "θ" son las posiciones angulares de cada vector y a su vez las "ω" sus velocidades angulares ($\omega = \dot{\theta}$).

A continuación se formula una ecuación vectorial que iguala el "lazo" formado por $\vec{R}_1$ y $\vec{R}_2$ con $\vec{R}_3$:

$$\vec{R}_1 + \vec{R}_2 = \vec{R}_3$$

Esta igualdad puede ser representada por su parte en *x* y su parte en *y* utilizando las magnitudes de los vectores "*r*":

$r_1 \cos\theta_1 + r_2 \cos\theta_2 = r_3 \cos\theta_3$ ……………….………………..…….…………….parte en *x*

$r_1 \sin\theta_1 + r_2 \sin\theta_2 = r_3 \sin\theta_3$ ………………..……..………..…………..parte en y

Al derivar se obtiene:

- parte en x

$$r_1 (-\sin\theta_1)\,\omega_1 + r_2 (-\sin\theta_2)\,\omega_2 = r_3 (-\sin\theta_3)\,\omega_3$$

$$-\omega_1 r_1 \sin\theta_1 - \omega_2 r_2 \sin\theta_2 = -\omega_3 r_3 \sin\theta_3$$

“re-arreglando” la igualdad ya que ω_1 se supone constante:

$$\omega_3 r_3 \sin\theta_3 - \omega_2 r_2 \sin\theta_2 = \omega_1 r_1 \sin\theta_1 \text{ ……………………………………......…(1)}$$

- parte en y

$$r_1 (\cos\theta_1)\,\omega_1 + r_2 (\cos\theta_2)\,\omega_2 = r_3 (\cos\theta_3)\,\omega_3$$

“re-arreglando” la igualdad ya que ω_1 se supone constante:

$$-\omega_3 r_3 \cos\theta_3 + \omega_2 r_2 \cos\theta_2 = -\omega_1 r_1 \cos\theta_1 \text{ ……………...……………….…..(2)}$$

A partir de las relaciones (1) y (2) formule una forma matricial para el sistema:

$$\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} \qquad \text{…..…..(3)}$$

3. Problema. Se proporcionan al sujeto parámetros numéricos, con el fin de que pueda calcular ω_2 (la velocidad angular del eslabón 2), esto es, de la notación algebraica matricial (3) que determine los valores de una matriz inversa (*conversión*) y después ejecute un producto (*tratamiento* en el registro numérico).

Utilice el arreglo (producto) matricial (3) para calcular ω_2. Suponga un valor de 100 rad/s para ω_1(la velocidad angular de entrada). Además, las dimensiones de los eslabones y la magnitud de la distancia r_3(para la posición indicada), así como los ángulos de referencia correspondientes son los incluidos en la tabla 2:

Tabla 2. Valores para el cálculo de ω_2.

Elemento	Longitud(pulg.)	Ángulo(grados)
Eslabón 1	12	45.0
Eslabón 2	8	-77.3
Distancia 3 (r_3)	16	20.0

$$\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

4. Código en MATLAB. Se ofrece como una alternativa de algoritmo de procesamiento operacional.

```
>> %
>> %ROBOT DE 2GDL
>> %
>> %Longitudes y ángulos
>> %
>> r1=12;
>> r2=8;
>> r3=16;
>> teta1=45*pi/180;
>> teta2=-77.3*pi/180;
>> teta3=20*pi/180;
>> %
>> %Note que los ángulos deben estar dados en radianes
>> %
>> %A continuación se define la matriz J
>> %
>> J=[r3*sin(teta3)-r2*sin(teta2);-r3*cos(teta3)r2*cos(teta2)]
J =
      5.4723          7.8043
    -15.0351          1.7588
>> %
>> %A continuación se define el vector columna b
>> %
>> b=[100*r1*sin(teta1);-100*r1*cos(teta1)]
b =
   848.5281
  -848.5281
>> %
>> %A continuación se calcula el vector columna solución omega
>> %
>> omega32=inv(J)*b
omega32 =
       63.9127
       63.9108
```

5. Solución. Se exhibe el valor correspondiente a ω_2 con su magnitud, dirección y sentido, el cual debió ser hallado por el estudiante que resuelve la práctica.

   Por tanto, ω_2(la velocidad angular del eslabón 2 es de 63.9108 rad/s en el sentido contrario al de las manecillas del reloj (↺).

6. Preguntas adicionales. Se trata de una posprueba, tendiente a soportar lo observado durante la resolución del test.

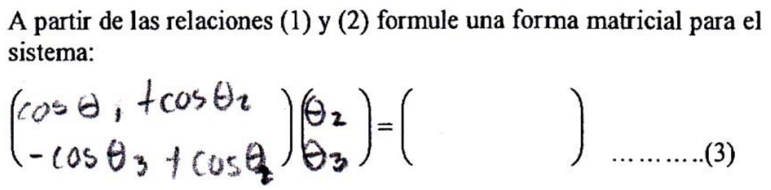
   1. ¿Piensa que el desarrollo de esta práctica le ayudó a fortalecer su conocimiento sobre los conceptos de producto matricial y matriz inversa?. Explique.
   2. ¿Es el sistema de ecuaciones que planteó para resolver el problema, consistente o inconsistente? Explique.
   3. ¿Es el sistema de ecuaciones que formuló para resolver el problema, linealmente independiente o dependiente? Explique.
   4. Problema extra; La diferencia de dos números es 14, y $\frac{1}{4}$ de su suma es 13. Calcule las cantidades.

Resultados

Muestran deficiencias por parte de los aplicantes para llevar a cabo algunas de las actividades que propone la práctica de modelado (como lo revelan los siguientes ejemplos):

- Indicador; Desarrollar una forma matricial a partir de un sistema de ecuaciones.

  Respuesta tipo:


A partir de las relaciones (1) y (2) formule una forma matricial para el sistema:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & +\cos\theta_2 \\ -\cos\theta_3 & +\cos\theta_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \text{ ……….(3)}$$

Figura 5. Respuesta representativa del primer indicador

El individuo no identifica la manera en que el sistema de ecuaciones (1) y (2) puede tomar una forma de producto matriz por vector columna. Lo anterior pone de manifiesto su falta de destreza para concretar laconversión del registro de lenguaje natural (las instrucciones) al algebraico y el tratamiento de este último al mismo.

- Indicador; Obtener una matriz inversa, ejecutar un producto matricial y ofrecer una solución numérica.

Respuesta tipo:

El sujeto no propone una configuración matricial correcta y es incapaz de efectuar el cálculo de la matriz inversa y del posterior producto, dejando inconcluso el reactivo. La falla es en dos conversiones, del registro de lenguaje natural (instrucciones) al algebraico y de algebraico a numérico y en el tratamiento del último al mismo.

Problema

Utilice el arreglo (producto) matricial (3) para calcular ω_2. Suponga un valor de 100 rad/s para ω_1 (la velocidad angular de entrada). Además, las dimensiones de los eslabones y la magnitud de la distancia r_3 (para la posición indicada), así como los ángulos de referencia correspondientes son los de la tabla siguiente:

Elemento	Longitud (pulg.)	Ángulo (grados)	
Eslabón 1	12	45.0	0.785 rad
Eslabón 2	8	-77.3	-1.349 rad
Distancia 3 (r_3)	16	20.0	0.349 rad

$$\begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_3 r_3 \sin\theta_3 - \omega_2 r_2 \\ -\omega_3 r_3 + \omega_2 r_2 \cos\theta_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \omega_1 r_1 \sin\theta_1 \\ -\omega_1 r_1 \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

Figura 6. Respuesta representativa del segundo indicador

Conclusiones

Después de analizar los resultados, se puede concluir que la prácticasí representa una alternativa aceptable como *opción explorativa “preexperimental”*, en la búsqueda orientada a determinar *deficiencias*(o en su caso *fortalezas*) presentadas por los sujetos de la muestra al llevar a cabo las transformaciones entre registros semióticos, que forman parte del quehacer mínimo que puede exigirse a los involucrados con procesos ingenieriles. El no contar con esas pericias básicas mínimas, seguramente dejará en desventaja a algunos de estos futuros profesionistas, en los rubros de interpretación y ejecución de su labor diaria.

En Ramírez*et. al*. (2013) se destaca el hecho de que el cambio de registro (conversión) es una actividad de por si compleja, ya que precisa, en primer lugar, del reconocimiento del mismo objeto entre dos representaciones cuyos contenidos no tienen regularmente nada en común. Lo anterior cobra vigencia, cuando se solicita la conversión que lleve de las ecuaciones (1) y (2) a una notación matricial o en el desarrollo de la sección de la práctica denominada “problema” al cálculo de una matriz inversa.

La incorporación de elementos tecnológicos trae consigo una *doble ventaja*(Hitt, 1994), ya que provee un incremento en la capacidad de visualización de los problemas, y auxilia a los estudiantes en el proceso de autoevaluación del conocimiento que están adquiriendo, así, toman un papel más activo e independiente en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática.Del desarrollo de la sesión de práctica, se pudo observar que los medios que los estudiantes emplearon para resolverla fueron diversos, desde los simples lápiz (o pluma) y papel, pasando por calculadoras “científicas” convencionales, calculadoras con sistema CAS, ordenadores ultraligeros (netbook), hasta tabletas. Lo anterior exhibe la falta de “estandarización” en el proceso de incorporación tecnológica a los espacios áulicos.

Por último, puede argumentarse que los resultados mostraron incapacidad por parte de los aplicantes fundamentalmente en la interpretación de instrucciones (registro de lenguaje natural), ya que como se reveló en algunos casos no fueron lo suficientemente competentes incluso para alcanzar a estructurar el formato de solución.

Referencias Bibliográficas

Calvo, M. (2008). Enseñanza eficaz de la resolución de problemas en matemáticas.*Revista Educación*. Costa Rica, Vol. 32, No. 1, pp. 123-138. ISSN 0379-7082. Recuperado el 30 de junio de 2015 del sitio web http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=44032109

Cobb, P. y Bauersfeld, H. (1995). *The emergence of mathematical meaning: interaction in classroom cultures*. In P. Cobb & H. Bauersfeld (eds.). Hillsdale (N.Y.). Lawrence Erlbaum.

Cobb, P., Yackel, E. y McClain, K. (2000). *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms*. In P. Cobb, E. Yackel& K. McClain (eds.). London. Lawrence Erlbaum.

D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* México, Número especial, pp. 177-195. ISSN 1665-2436, ISSN-e 2007-6819. Recuperado el 10 de junio de 2015 del sitio web http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33509909

Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Investigaciones en Matemática Educativa II*. En F. Hitt (eds.), Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V., pp. 37-65.

Duval, R. (2006a).A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics.*Journal of Educational Studies in Mathematics.*Vol. 61, No. 1-2, pp. 103-131.

Duval, R. (2006b).Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española. España, Vol. 9, No. 1, pp. 143-168. ISSN 1138-8927. Recuperado el 15 de junio de 2015 del sitio web http://www.usc.es/dmle/pdf/GACETARSME_2006_9_1_05.pdf

Ellerton, N. F. y Clarkson, P. C. (1996). Language factors in mathematics teaching and learning. In A. J. Bishop *et al.* (eds.), *International handbook of mathematics education*, pp. 987-1034. Dordrecht. Kluwer Academic Press.

Ernest, P. (1993). Mathematical activity and rhetoric: a social constructivist account. In I. Hirabasash, N. Nohda, K. Shigematsu& F. Lin (eds.), *Proceedings of the 16th/ International conference for the psychology of mathematics education*, pp. II-238-245. Japan. University of Tsukuba.

García, A. (2010). Aprendizaje basado en problemas: aplicaciones a la didáctica de las ciencias sociales en la formación superior. *Ponencia en el II Congrés Internacional de DIDACTIQUES.* Girona, Francia. Recuperado el 21 de marzo de 2015 del sitio web http://www.udg.edu/portals/3/didactiques2010/guiacdii/ACABADES%20FINALS/374.pdf

García, I. (2012). Semiótica y didáctica. Relaciones pensamiento/semiosis/mundo en la construcción de aprendizajes significativos en el aula preescolar. *Revista Omnia*. Venezuela, Vol. 18, No. 2, pp. 11-24. ISSN 1315-8856. Recuperado el 30 de junio de 2015 del sitio web http://www.redalyc.org/pdf/737/73723402002.pdf

Godino, J. D. (1996). Mathematical concepts, their meaning, and understanding.In L. Puig& A. Gutiérrez (eds.), *Proceedings of the 20th/ Conference of the international group for* *the psychology of mathematics education*, pp. 417-424.Valencia. Universidad de Valencia.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22*(2/3), pp. 237-284. Recuperado el 10 de junio de 2015 del sitio web http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/04_enfoque_ontosemiotico.pdf

Guevara, G. (2010). Aprendizaje basado en problemas como técnica didáctica para la enseñanza del tema de recursividad. *Intercedes: Revista Electrónica de las Sedes Regionales de la Universidad de Costa Rica*. Vol. 11, No. 20, pp. 142-167. ISSN 2215-2458. Recuperado el 30 de junio de 2015 del sitio web http://www.intersedes.ucr.ac.cr/ojs/index.php/intersedes/article/view/250/249

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación* (quinta edición). México. McGraw-Hill.

Hitt, F. (1994). Educación matemática y uso de nuevas tecnologías. *Perspectivas en Educación Matemática*, pp. 21-42. Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Kieran, C., Forman, E. y Sfard, A. (2001). Learning discourse: sociocultural approaches to research in mathematics education.*Educational Studies in Mathematics*.No. 46, pp. 1-12.

Mestre, U. y Fuentes, H. (2010). Propuesta didáctica centrada en la resolución de problemas para el proceso docente de las ciencias básicas. *Revista Didasc@lia: Didáctica y Educación.* Cuba, Vol. 1, No. 1, pp. 39-48. ISSN 2224-2643. Recuperado el 30 de junio de 2015 del sitio web http://runachayecuador.com/refcale/index.php/didascalia/article/view/243/201

Pimm, D. (1995). *Symbols and meanings in school mathematics*. London. Routledge.

Ramírez, O., Romero, C. y Oktac, A. (2013). Coordinación de registros semióticos y las transformaciones lineales en el plano. *Memorias del I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe (I CEMACYC).* Santo Domingo, República Dominicana. pp. 537-547. Recuperado el 10 de junio de 2015 del sitio web http://www.centroedumatematica.com/memorias-icemacyc/175-446-1-DR-C.pdf

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London. The Falmer Press.

Vile, A. y Lerman, S. (1996). Semiotics as a descriptive framework in mathematics domain.In L. Puig& A. Gutiérrez (eds.), *Proceedings of the 20th/ Conference of the international group for the psychology of mathematics education*, pp. 395-402. Valencia. Universidad de Valencia.