REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen V Número 2 Fecha: Julio-Diciembre de 2017

ISSN: 2395-955X

ISSN: 2395-955X

A UN ÉPSILON DE LA DEFINICIÓN

Angelina Alvarado Monroy

Universidad Juárez del Estado de Durango, México

aalvarado@ujed.mx

Para citar este artículo:

Alvarado, A. (2017). A un épsilon de la definición. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. V, No. 2. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año V, No. 2, Julio-Diciembre de 2017, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: https:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

A UN ÉPSILON DE LA DEFINICIÓN

Angelina Alvarado Monroy
Universidad Juárez del Estado de Durango, México
aalvarado@ujed.mx

Palabras clave: Definición, tecnología digital, construcción social del conocimiento

Resumen

Desde la investigación realizada en los últimos años, se ha podido documentar que, al habilitar a los estudiantes en la definición matemática, logran desarrollar mayor flexibilidad para resolver problemas. Este artículo aborda la necesidad de incluir actividades que promuevan su aprendizaje como proceso/concepto en los diferentes niveles educativos. Ciertamente es un desafío, dado que, en matemáticas resulta difícil introducir un nuevo concepto desde una aproximación no estructural. Sin embargo, es posible anclar su definición sobre las bases de los estudiantes y lograr que sean ellos quienes a través de su razonamiento logren su construcción, así como dotar y extraer su significado. Para ilustrar lo anterior, se mostrarán ejemplos en los cuales se utilizarán la tecnología digital y la estructura social como aliados para la construcción de la definición de un concepto en matemáticas.

Abstract

Based on the research carried out during the last years, it has been possible to document that by enabling students in the definition, they develop greater flexibility to solve problems. This paper addresses the need to include activities that promote their learning as a process/concept in the different educational levels. It is certainly a challenge, since in mathematics it is difficult to introduce a new concept from a non-structural approach. However, it is possible to anchor its definition on the basis of the students and, with an appropriate design, to make them through their reasoning achieve its construction, as well as endowing and extracting their meaning. To illustrate the above, we will show some examples, located at different educational levels. Digital technology and social structure will be used as allies to approximate the construction of the definition of a concept in mathematics.

Keywords: Definition, Digital technology, Social Construction of Knowledge

Introducción

El proceso de definir en matemáticas no está considerado como objeto de estudio, ni en el currículo de educación básica, ni en el de educación media superior. No obstante, entender el papel de las definiciones es de las tareas más importantes que enfrentan los alumnos durante su ingreso a la educación superior, dado que, justo «lo que hace diferente al pensamiento matemático avanzado del elemental, son las definiciones y demostraciones formales» (Tall *et al*., 2001). La definición, la resolución de problemas y la demostración están estrechamente ligados. La comprensión y el manejo parcial la definición es de las principales causas por las que los estudiantes no avanzan en construir una demostración (Alvarado, 2015) y en resolver un problema.

En resolución de problemas y en tareas de argumentación o demostración, hay una primera fase de interpretación en la cual es necesario leer (comprender, interpretar y extraer significado) los términos, notación, palabras de enlace, conceptos y símbolos matemáticos empleados para poder entender el problema y la clase de solución o razonamiento universal requerido. La comprensión lectora en matemáticas, requiere una exigencia de rigor que sobrepasa las posibilidades de trabajo comprensivo, para alguien que no está preparado para comprender y extraer significado de las definiciones de los conceptos en juego.

Sin lugar a dudas, es necesario generar espacios en el aula para estudiar la definición, procurando hacer comprensible su significado. Ciertamente es un desafío, dado que en matemáticas (particularmente en la enseñanza universitaria) resulta difícil pensar en introducir un nuevo concepto desde una aproximación no estructural, no es sencillo anclar la definición de un nuevo concepto sobre las bases de los estudiantes y lograr que sean ellos quienes a través de su razonamiento logren construirlo.

Esta investigación, la guía la pregunta: ¿es posible aproximarnos a la definición de conceptos desde una vía no estructural? Esto conduce de manera natural a otras preguntas:

¿Cómo conjugar de forma más equilibrada, la transición desde 'describir' hacia 'definir' y aproximar a los estudiantes, cada vez más, a comprender la necesidad de emplear definiciones formales?

En 'conceptos abstractos' ¿Es posible transitar desde las diferentes formas intuitivas y conocimiento proveniente de la experiencia previa de los estudiantes, con una narrativa que permita el anclaje?

¿Es posible iniciar explorando la imagen del concepto (Tall y Vinner, 1981) hasta llegar a construir la definición del concepto, con el apoyo de la discusión de ideas y del lenguaje matemático disponible?

El propósito de este artículo es mostrar algunos ejemplos para apoyar el ingreso de la definición como objeto de estudio en el aula. En los ejemplos exhibidos se utilizan tanto recursos tradicionales (lápiz y papel), como tecnología digital. La estructura social recomendada para la implementación en el aula, al igual que los recursos, son aliados para una aproximación no estructural a la construcción de la definición de un concepto en matemáticas. En el transcurso de la investigación, realizada por la autora, en colaboración con otros investigadores, durante la última década, se ha podido documentar que, al habilitar a los estudiantes en la definición desde tal aproximación, logran desarrollar mayor flexibilidad para resolver problemas, así como para leer, comprender y construir demostraciones. La mayoría de las actividades propuestas se han analizado rigurosamente identificando las acciones que favorecen la construcción de las definiciones de los conceptos. Con la finalidad de presentar el mayor número de ejemplos de actividades no se presenta un análisis profundo, pero se hace referencia a las fuentes para profundizar.

Referente teórico

La transición al nivel superior es difícil para los estudiantes, dado que, pasan «desde describir hasta definir, desde convencer hasta demostrar en forma lógica basados sobre las definiciones» (Tall 1991, p.20). Existen discrepancias entre las definiciones formales que los estudiantes son capaces de citar y los criterios que utilizan realmente en el trabajo práctico. Ellos, transitan «desde una posición en la cual los conceptos tienen bases intuitivas fundadas en su experiencia, hasta una [posición] donde los conceptos son especificados por definiciones formales y sus propiedades reconstruidas a través de deducciones» (Tall, 1992, p. 495).

«La clasificación de cualquier conjunto de conceptos conlleva implícita o explícitamente la definición de los conceptos involucrados, mientras que definir conceptos en cierto sentido automáticamente desarrolla de manera gradual su clasificación» (de Villiers et al., 2009, p. 191).

Para tener acceso al conocimiento matemático es necesario que los objetos sean representados de diferentes formas (*e.g.* gráfica o geométrica, numérica, analítica o algebraica, pictórica, lenguaje verbal, lenguaje simbólico, etc.), y el aprendiz pueda transitar de manera congruente entre ellas. Es común que se confunda al objeto matemático con su representante, lo cual suele ocurrir cuando no se da la aprehensión conceptual del mismo (Duval, 1999).

Muchas de las dificultades que enfrentan los estudiantes en matemáticas, son debidas al manejo inadecuado de las definiciones. Para Edwards y Ward (1997) los estudiantes de matemáticas avanzadas, aún aquellos que serían considerados exitosos basándose en sus calificaciones, tienen dificultades para entender el papel que juegan las definiciones en matemáticas en general. También tienen dificultades particulares para entender la clasificación filosófica de las definiciones matemáticas, así como, para utilizarlas en la realización de tareas matemáticas. Ellos señalan que los estudiantes, aparentemente, pueden entender el papel de las definiciones formales en matemáticas sin comprenderlo realmente. Muchos estudiantes no categorizan las definiciones matemáticas como lo hacen los matemáticos. Más aún, no las usan en este sentido, aun cuando pueden enunciarlas y explicarlas correctamente. Los autores muestran casos en los que la definición del concepto entra en conflicto con la imagen del concepto y finalmente gana la imagen del concepto.

Esto último, se ha constatado en un estudio exploratorio con estudiantes de semestres avanzados de Licenciatura en Matemáticas Aplicadas (Alvarado, 2015). En entrevista con una estudiante que enfrenta conflictos en las tareas para demostrar, ella comenta: «Aunque estudio las definiciones, los teoremas y las demostraciones que vimos en clase, en el examen no sé cómo puedo usar las definiciones para lo que pide el profesor, y al final, termino mezclando todo y no me siento segura. Es mejor cuando se trata de hacer operaciones y sacar un resultado.» En contraste con otra estudiante que muestra soltura en este tipo de tareas: «Al principio de la licenciatura me costó mucho trabajo la parte abstracta, porque durante el bachillerato era muy buena con lo operativo, pero al iniciar la licenciatura empecé a trabajar otro tipo de matemáticas. Algo que pienso que me ha ayudado, es que cuando hay una nueva definición, trato de buscar diferentes ejemplos para entenderla. Siempre separo y trato de tener claro lo que debo probar y lo que se da por hecho.»

La estructura social contribuye al aprendizaje de las definiciones, dado que el conocimiento base compartido les permite incorporar habilidades y sutilezas para deconstruir o construir definiciones y utilizarlas para realizar demostraciones y resolver problemas (Alvarado y González, 2016). En este sentido, las actividades colaborativas cobran relevancia, la principal distinción entre la cooperación y la colaboración, es que al cooperar se tienen roles independientes, mientras que al colaborar se adquieren roles dependientes. El trabajo colaborativo se caracteriza porque parte de un objetivo común para los estudiantes, favorece la comunicación, coordinación y apoyo entre pares, existe una responsabilidad compartida en las acciones, al igual que se tiene conciencia del trabajo de los otros. Otros rasgos son que: se tiene una fuente de retroalimentación común, los roles están entrelazados de modo que producen conocimiento compartido y el éxito o fracaso es común (Nussbaum, 2016). Como se verá en algunas de las actividades propuestas en este trabajo, la tecnología digital es facilitadora en la construcción colaborativa del conocimiento.

Metodología

En los ejemplos de actividades mostradas en este artículo para introducir a los estudiantes al manejo de la definición en matemáticas. Se utilizaron hojas de trabajo en las que se presenta un concepto, una situación, un objeto, una construcción en un ambiente de geometría dinámica (DGS por sus siglas en inglés), se exploraba en ellos (situación, objeto, construcción, etc.) y en una discusión en pequeño grupo los estudiantes trataban de construir la definición de los conceptos implicados, o bien, diferentes representantes de las definiciones tratadas. Posteriormente, los estudiantes organizaban sus acuerdos para comunicarlos en una discusión con todo el grupo y mediada por el profesor. En la implementación de las actividades, el objetivo era que los estudiantes lograran extraer información relevante de las definiciones tratadas, para generar un buen número de representantes de la misma, o bien, que de su experiencia y conocimiento previo negociaran la definición de un concepto.

A los profesores que participaron, previamente se les mostraron los recursos y las formas de organización. Ellos estaban conscientes de su responsabilidad para promover el intercambio de ideas y la discusión, para asegurarse que los alumnos entendían la tarea, cuestionarles sobre sus intentos de solución y, en caso necesario, sugerirles el uso de otra estrategia. También, asumieron que debían regular el proceso, observando sus avances y dificultades para intervenir oportunamente y al finalizar la sesión organizar contenidos, sintetizar ideas, definiciones y resultados aceptados por todos.

Muestra e instrumentos

Participaron cinco grupos de estudiantes de los niveles secundaria y licenciatura. Primero trabajaron en equipo y después, se produjo una interacción con el profesor.

Con las actividades presentadas para diferentes niveles educativos (Tabla 1) se pretende apoyar a los estudiantes a establecer la diferencia entre ‘definir’ y ‘describir’. De la misma manera que se pretende educar progresivamente para que las definiciones formen parte de su experiencia y de sus esquemas conceptuales. También, se busca presentar elementos de reflexión a través de ejemplos conflictivos que les permitan obtener las definiciones adecuadas e identificar los riesgos de las definiciones imprecisas. Finalmente, se tiene por objetivo fomentar la comprensión de las definiciones de objetos matemáticos por su caracterización de invariantes y sus representaciones.

Tabla 1. Actividades propuestas para favorecer la enseñanza- aprendizaje de la definición.

Actividad	Objetivos	Nivel Educativo
1. Reconstrucción de la definición de cuadrilátero.	Construir la definición de cuadrilátero desde las representaciones informales (diagramas, explicaciones, gestos o ejemplos prototípicos) de los estudiantes.	Se implementó con grupos de primer grado de secundaria y primer semestre de licenciatura
2. Construcción de la definición de parábola desde una construcción guiada en un DGS.	Construir la definición de parábola como un lugar geométrico a partir de la emergencia de la necesidad de tal definición.	Primer semestre de licenciatura
3. Construcción de la parábola desde círculos concéntricos y rectas paralelas.		Estudiantes para profesores
4. Desde el texto de la definición precisa de hipérbola construirla en un DGS.	Que los estudiantes logren extraer significado de la definición de hipérbola en su representación escrita para lograr una representación geométrica dinámica.	Primer semestre de licenciatura
5. Simulación participativa para la construcción social de la definición de Quilate en una joya de oro.	El objetivo es que los estudiantes encuentren la relación entre el quilataje y porcentaje de oro, y, en consecuencia, construyan el significado (la definición) de la marca K en una joya de oro.	Primer grado de secundaria
6. a) Construir ejemplos en correspondencia con la definición de número feliz y b) transferir el conocimiento de la definición para resolver una situación (encontrar la clave para abrir una puerta).	Que el estudiante sea capaz de extraer significado de una definición nueva para construir numerosos ejemplos que la doten de significado.	Primer semestre de licenciatura
7. De ejemplos para anclar a ejemplos sofisticados para dotar de significado las definiciones de operación binaria y la estructura algebraica grupo.	Que el estudiante genere ejemplos no prototípicos y dinámicos para dar sentido a definiciones abstractas.	Cuarto semestre de Licenciatura

En todas las actividades presentadas se favorecen la discusión y negociación en pequeños grupos y posteriormente en todo el grupo. En las discusiones con pares se activa su conocimiento previo para construir conocimiento formal. En la discusión grupal el profesor provoca elementos de reflexión a través de ejemplos conflictivos o debilidades percibidas en los pequeños grupos. Tales elementos son los que les permiten obtener las definiciones adecuadas y formalizar el conocimiento compartido generado.

Resultados

Actividad 1. Reconstrucción de la definición de cuadrilátero

En la implementación de la actividad en ambos grupos (nivel secundaria y licenciatura) el comportamiento ha sido muy similar. Incluso en el grupo de secundaria se propicia una discusión más rica. Esto puede atribuirse a que en nivel básico el cuadrilátero aparece continuamente en escena. En términos generales, la definición la construyen a través de la descripción de propiedades visuales: cuatro lados (rectas, líneas, segmentos) figura (símbolo, imagen), figura cerrada, para algunos estudiantes figura ya incluye que sea cerrada, cuatro vértices (picos, unión de segmentos).

En las interacciones, los alumnos se expresan de manera espontánea y, eso permite observar cómo se pone de manifiesto que la formación de muchos de los conceptos matemáticos en juego, no se han incorporado a partir de una definición. Más aún, son elementos primarios que se han formado, como la mayoría de los conceptos cotidianos, a través de la vinculación de ejemplos con su uso en diferentes contextos. Este es un hecho que debe tenerse en cuenta en la enseñanza de la matemática, cuando pedimos que los alumnos se expresen de manera correcta y cuando tienen deficiencias para 'definir' en sentido matemático, ya que este proceso es contraintuitivo y no espontáneo y dista de los procesos cotidianos de pensamiento.

Entre lo explorado se aprecia que las propiedades de paralelismo y de perpendicularidad, se entienden como las dos únicas posibilidades en una figura, es decir, si dos lados no son paralelos entonces son perpendiculares. Piensan en igualdad de lados y para disuadir se activan los contraejemplos del rectángulo y del romboide.

Las principales producciones escritas derivadas de la discusión en los equipos son las siguientes:

I) Definiciones ambiguas: Son todas aquellas figuras geométricas cerradas formadas por 4 lados; cualquier figura cerrada con 4 lados; es una figura geométrica con 4 lados, es una figura con cuatro vértices.

II) Definición parcial/incluye sólo paralelogramos: Es una figura geométrica de 4 lados rectos que son paralelos.

III) Definición correcta (económica): Polígono con 4 lados.

IV) Definición incoherente: Una figura geométrica donde el perímetro de la base está formado por cuatro lados iguales (en forma de un cuadrado).

La definición convenida con todo el grupo, finalmente, es la de «figura geométrica plana, cerrada y simple formada por cuatro segmentos de recta».

Claramente en la socialización se aprecia la función de los ejemplos y no ejemplos (Figura 1), para transmitir la necesidad a los estudiantes de contar con definiciones que determinen de manera unívoca el concepto matemático, para que no haya lugar a ambigüedades. La comprensión por parte de los estudiantes de la función que cumplen las definiciones en el pensamiento matemático, los prepara para la transición hacia el pensamiento deductivo basado explícitamente en las definiciones.

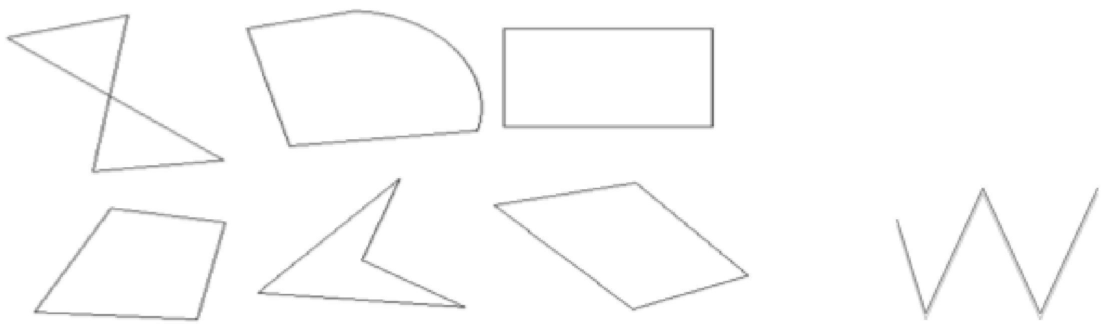


Figura 1. Algunos dibujos presentados en el pizarrón durante la socialización de definiciones construidas de cuadrilátero al interior de los equipos.

Podemos concluir que la definición convenida en ambos grupos no es diferente. En contraste con la definición que en primer grado de secundaria se presenta, de acuerdo a la profesora del grupo explorado:

«Un cuadrilátero es un polígono que tiene cuatro lados. Los cuadriláteros tienen distintas formas, pero todos ellos tienen cuatro vértices y dos diagonales. En todos los cuadriláteros la suma de los ángulos interiores es igual a 360º.»

Esta definición de cuadrilátero necesita del conocimiento previo de la definición de polígono:

«Figura geométrica plana limitada por una línea poligonal cerrada que no se corta a sí misma. Los segmentos que forman la poligonal son los lados del polígono y los puntos de enlace de éstos los vértices.»

Naturalmente es una definición para la cual es necesario definir antes 'línea poligonal', lo que no sucede. Incluso se da la definición de 'polígono' y después se usa de manera muy natural con alguna representación semiótica pobre (algunos dibujos).

En relación con esto, Vinner (2011) habla de cómo se forman los conceptos a través de ejemplos en el contexto cotidiano y muestra cómo a un niño se le enseña el concepto de "silla", señalándole varias sillas en diferentes contextos y diciéndole: 'silla'. Esto mismo es lo que sucede con términos como 'segmentos' y 'rectas', 'polígonos' y 'figuras'.

Actividad 2. Construcción de la definición de parábola desde una construcción en un DGS

Una tarea previa a la actividad es discutir sobre lo que entienden por mediatriz y en que contexto la han utilizado. En uno de los equipos encuentran familiaridad con «encontrar el centro de una circunferencia a partir de una cuerda» y luego de una discusión primero en equipo y después en todo el grupo lograr la definición del concepto de mediatriz.

Posteriormente se les presentan los pasos para realizar la construcción en un DGS:

Parte I. a) Dibujen un punto arbitrario *F*; b) Dibujen una recta arbitraria *l* que no pase por el punto *F*; c) Con la herramienta punto sobre objeto, dibujen un punto *Q* sobre la recta *l*; d) Dibujen el segmento *FQ* y tracen su mediatriz *m*; e) Tracen una perpendicular a *l* que pase por *Q* y llámenla *t*; f) Marquen el punto de intersección de *t* con *m*, y nómbrenlo *P*.

Parte II. Manipular la construcción para encontrar propiedades

Muevan Q y observen que elementos de la construcción dependen de él.

Cuestionarlos para encontrar una propiedad común de todos los puntos del camino que recorre *P* al mover *Q*. Definir la forma resultante usando esta propiedad.

En esta tarea se dedica tiempo para la manipulación de la construcción. Su observación permite identificar cuáles son los elementos independientes y los dependientes, así como la trayectoria descrita por el punto *P* (elemento dependiente), cuando se mueve el punto *Q* (independiente) y sus propiedades. También tiene lugar, la verificación de su observación sobre la trayectoria que sigue el punto *P* al trabajar con las herramientas traza y lugar geométrico. Finalmente, la experimentación y conceptualización los lleva a tratar de definir esta cónica como lugar geométrico a partir de la experimentación.

Resumiendo, el trabajo desarrollado en uno de los equipos en su interacción, se da cuenta de que este acercamiento resultó atractivo dado que, en los meses previos, en la clase de geometría analítica, tuvieron contacto con la representación verbal (o escrita) y la algebraica de la parábola con énfasis en la segunda representación, seguida de una lista de ejercicios para cuya solución había que hacer uso de ella. También se tenía una representación visual, pero construida de una manera no transparente y probablemente artificial para el alumno.

Los estudiantes sólo han tenido una sesión previa de exploración del DGS. El trabajo en este ambiente les motiva y se muestran emocionados con las construcciones logradas (Figura 2).

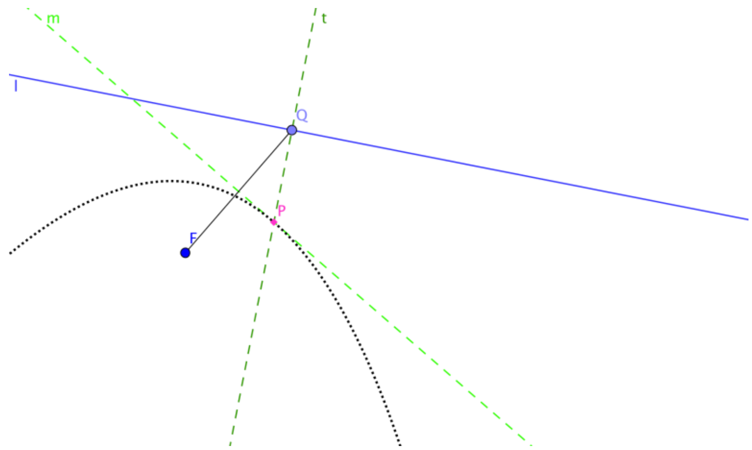


Figura 2. Construcción guiada realizada por los estudiantes.

En la exploración de la construcción se percibe primero que *P* es un punto que depende del movimiento del punto *Q*, sobre la recta *l*, y además que con dicho movimiento *P* sigue la trayectoria de una parábola. Esto lo visualizan sin llegar a activar la herramienta traza (huella de *P*). También, el movimiento les permite la exploración de 'posiciones especiales', «se llegan a juntar *P* y *Q*» y se dan cuenta del potencial del movimiento para visualizar propiedades lo que les permite encontrar que cuando están alineados *F*, *P* y *Q*, *P* es el punto medio entre el foco y el punto sobre la directriz (recta *l*).

Además, tratan de visualizar otras propiedades, «la distancia de la intersección [*P*] es directamente proporcional a esos puntos [*F* y *Q*]», es decir, la distancia de *P* a *F* crece en la misma razón que la distancia de *P* a *Q* y esto se justifica porque el punto *P*, al estar en la mediatriz equidista del punto fijo *F* (foco) y de *Q*. También, se puede decir que como *Q* está en *l* y en la perpendicular que pasa por *P*, entonces *P* equidista de *F* y de la recta *l*.

Se observa que las acciones para manipular los puntos móviles les permiten experimentar y verificar propiedades invariantes, así como descartar las que a 'ojo' parece que se cumplen y no es así.

Enseguida se presenta una parte de la tarea para que puedan extraer significado de la definición de mediatriz para encontrar la propiedad que satisfacen los puntos de la parábola. Para ello a los alumnos se les plantea la pregunta: Si *P* está en la mediatriz del segmento *FQ*, ¿qué propiedad tiene respecto a *Q* y a *F*?

Se aprecia que para medir la distancia de un punto a una recta, lo hacen a través de una perpendicular a la recta que pase por el punto. Además, están de acuerdo en que la distancia es la medida del segmento sobre la perpendicular. Dado que la perpendicular pasa por *P* y *Q*, estos se consideran extremos del segmento. Como además deben medir la distancia entre dos puntos recuerdan la fórmula.

Mediante el cambio de posiciones del punto *Q* extraen significado de la construcción y observan sus propiedades. Así, observan que para ciertas posiciones del punto *P*, su distancia a la recta *l* es la misma que de *P* a *F*, pero en otras posiciones como cuando se acerca a los 'extremos' de la parábola, no se visualiza esta propiedad tan claramente y esto les hace dudar. Sin embargo, centrar su atención en trazos auxiliares, como en los triángulos que se forman con los vértices *F, P y Q* les permite resolver su duda y visualizar la propiedad de equidistancia de *P* a *F* y de *P* a *Q* y, en consecuencia, de *P* a la recta *l*.

Antes han averiguado otra propiedad, que es consecuencia de lo anterior, que *P* es el punto medio de *F* y *Q* cuando *P* es el vértice de la parábola, es decir, cuando los tres puntos están alineados. Esta observación la encontramos en casi todas las interacciones de los equipos.

Finalmente, logran en todos los equipos identificar la propiedad del conjunto de números y definir la parábola como un conjunto de puntos *P*, que se encuentran a la misma distancia de *Q* (de la recta) que de *F*. Se extiende su conocimiento en la interacción en gran grupo y se identifican los elementos que conforman la parábola y algunas de sus propiedades.

Actividad 3. Construcción de la parábola desde círculos concéntricos y rectas paralelas

Esta actividad está basada en Gilboa, Dreyfus y Kidron (2011) y fue implementada con resultados similares. Es una alternativa a la actividad 2 (Tabla 1), dado que se puede trabajar tanto a lápiz y papel como en un DGS. Desde el trabajo con la construcción surge la necesidad de construir la definición de la parábola como el conjunto de puntos que satisface una condición. A continuación, se detallan las partes de la actividad.

Parte I. El estudiante trata con la noción de lugar geométrico en el contexto de la circunferencia y de la mediatriz.

Parte II. En la Figura 3 existen círculos con un centro común *M* y rectas paralelas. La distancia entre dos rectas vecinas es 1 unidad. Cada recta, excepto la que pasa por *M* es tangente a una circunferencia.

a) Numere las circunferencias desde 1 hasta 8, empezando con 1; b) Denote la recta gruesa por *l* y numere las rectas sobre el centro desde 1 hasta 12; c) Marque los puntos de intersección entre la recta *n* y la circunferencia *n*, *n=1, …,8*; d) ¿Qué forma crees que pasa por los puntos marcados?; e) Justifica.

Parte III. Se cuestiona a los estudiantes para encontrar una propiedad común de los puntos marcados. Se agregan más puntos y se define la forma resultante usando esta propiedad.

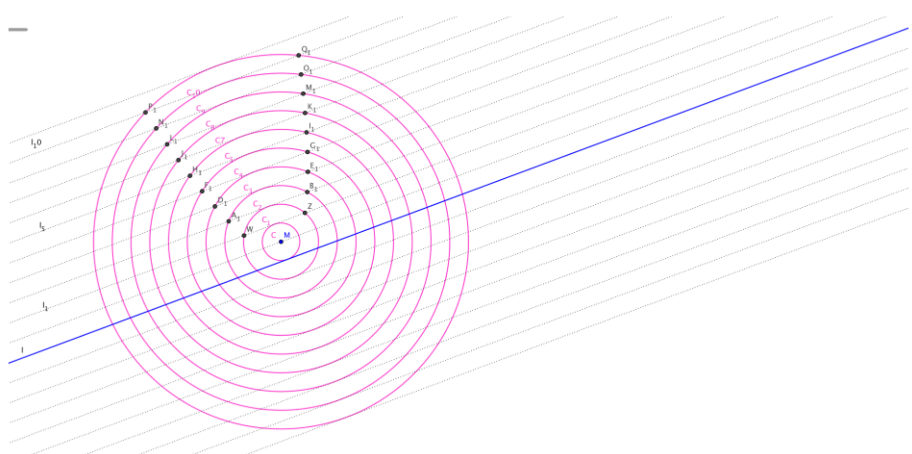


Figura 3. Construcción de la parábola sobre círculos concéntricos y rectas paralelas.

A medida que los estudiantes van marcando más puntos empiezan a relacionar con 'la gráfica de una ecuación de segundo grado', o encuentran que 'parece una parábola' y una pregunta natural es si se trata realmente de una parábola como las que ellos conocen. Como previamente lograron convenir en que 'un lugar geométrico es un conjunto de puntos que tienen una propiedad común'. Empiezan a buscar 'algo en común' que tengan los puntos marcados. Luego de una discusión entre pares en el equipo de tres estudiantes, piensan en trazar un segmento perpendicular a la recta l y con extremo en un punto de los marcados, encuentran que este segmento mide lo mismo que la distancia del punto marcado al centro M, «porque cada círculo va aumentando su radio en uno».

Más adelante, cuando se abre la discusión con todo el grupo, el profesor aprovecha para llevarlos a definir la distancia entre un punto y una recta. Trazan una perpendicular a la recta l que pasa por el centro de todas las circunferencias, el punto M. Ahí observan que «divide a la gráfica a la mitad, […] la hace simétrica». Dada la propiedad que encuentran que satisface cada punto marcado, marcan un punto más que no es posible marcar siguiendo las instrucciones de la actividad. «Hay un punto más que puede cumplir, […] está en la recta que la vuelve simétrica. Mira, haz un segmento con este punto, el centro (M) […] y también perpendicular a la recta (l), igual que los otros». Algunos estudiantes no entienden bien, ya que, hasta el momento, por la construcción han encontrado distancias enteras. «La mitad de este [segmento] es también un punto que está a 0.5 de distancia del M y de la recta (l), ya ven que sí». Como vemos han encontrado el vértice de la parábola, esto lo exponen y se extiende en el grupo completo buscando más puntos que cumplan. Así han logrado conectar algunas representaciones de la parábola como: ecuación de segundo grado, su gráfica representación gráfica y como lugar geométrico.

Actividad 4. Desde el texto de la definición precisa de hipérbola construirla en un DGS

En esta tarea los estudiantes debían construir la hipérbola a partir de la definición: "Se llama hipérbola al lugar geométrico de los puntos del plano tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es una constante (se representa por 2a)." Ellos debían entregar como producto la explicación de los pasos para lograr la construcción.

Esta tarea resultó complicada para algunos estudiantes. Cerca de la mitad de estudiantes del grupo logran extraer información de su definición como lugar geométrico y emprenden la tarea de construir la hipérbola, lográndolo con éxito.

Comienzan dibujando los dos puntos fijos (focos), luego extraen que la característica de los puntos que están en el lugar geométrico solicitado es «que la diferencia de sus distancias hasta éstos» debe ser constante y vinculando este hecho con la construcción previa de la elipse realizan las asociaciones siguientes: Cantidad constante con radio de una circunferencia; La "suma de las distancias a los focos" (constante) con que el radio de la circunferencia sea mayor que la distancia entre focos; y diferencia de las distancias con que el radio de la circunferencia sea menor que la distancia entre focos.

En la construcción de la hipérbola se percibe la influencia del trabajo previo realizado en la actividad 2 (Tabla 1) y una actividad similar con la elipse.

A continuación, identifican los principales elementos y tratan de verificar que el punto móvil P cumple con la propiedad requerida. Para ello proponen tres estrategias: 1) sobreponiendo vectores para calcular la diferencia utilizando el método del triángulo o del paralelogramo; 2) conociendo las coordenadas de los puntos para poder calcular las distancias con la fórmula correspondiente; y 3) utilizando en el DGS, distancia y longitud y calcular. Finalmente deciden utilizar la tercera opción.

Desde la manipulación en el DGS, descubren que el punto *P* cumple con la propiedad de que la diferencia entre las distancias a los focos es igual al radio de la circunferencia y por tanto es una cantidad constante y con esto dan por concluida la tarea, ocultando los trazos que no son necesarios. Hay que hacer notar que para ellos era importante verificar la propiedad de punto *P*, más que visualizar la trayectoria que define con ayuda de las herramientas del software, traza y/o lugar geométrico.

Al tratar de escribir los pasos para describir el procedimiento que siguieron para la construcción de la hipérbola, organizan sus ideas clarificando la tarea y el proceso mediante el cual fue resuelta.

Esta revisión de los pasos da lugar a ciertas exploraciones y a generar situaciones del tipo ‘que sucedería si’ … el radio de la circunferencia auxiliar fuera igual a la distancia entre los focos. Esto surge durante la discusión como una necesidad de cubrir todas las posibilidades para consolidar lo aprendido, dado que ya se tiene que: cuando el radio es mayor apoya la construcción de la elipse y cuando es menor la de la hipérbola y cuando es igual da lugar a un punto; que corresponde al centro de la circunferencia.

A la par que se retoman los pasos que se siguieron para la construcción, van repitiendo el procedimiento mostrando dominio sobre la construcción, al buscar un acomodo para una mejor visualización identificando puntos libres y dependientes.

Posteriormente, visualizan la trayectoria y concluyen el listado de los pasos para realizar la construcción. Un ejemplo de una producción escrita preparada para la discusión se presenta en la Figura 4.

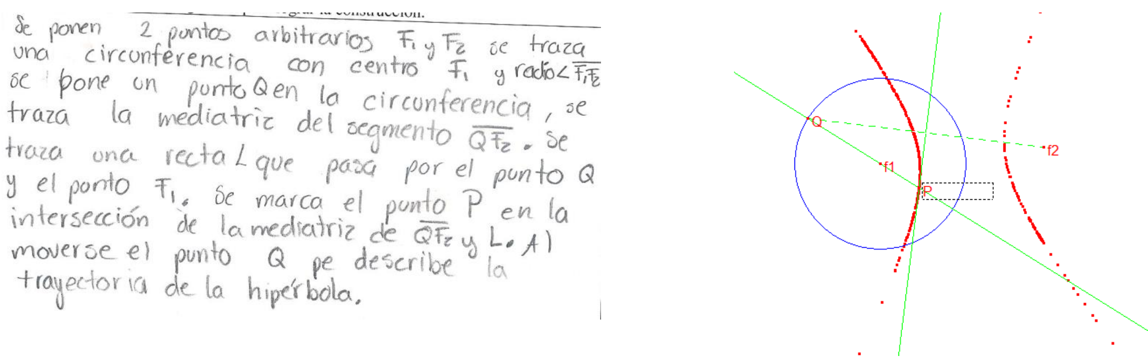


Figura 4. Explicación del procedimiento de la hipérbola a partir de su definición formal.

Finalmente, se les pide que reproduzcan la construcción y ubiquen los siguientes elementos de la hipérbola a partir de la descripción que se les da: eje principal o real, eje secundario o imaginario, centro, vértices, distancia focal y radios vectores del punto. Tarea que realizan con éxito en grupo.

Actividad 5. Simulación participativa para la construcción colaborativa de la definición de Quilate

La actividad se apoya de una simulación diseñada en Netlogo para HubNet. Se tiene un espacio grupal (Figura 5) controlado por el profesor y espacios individuales para los estudiantes (desde su computadora) los espacios individuales (Figura 6) están conectados al espacio grupal mediante una red local. Cada estudiante es un agente de cambio en el modelo y representa un gramo de oro o de plata según decida (Figura 7).

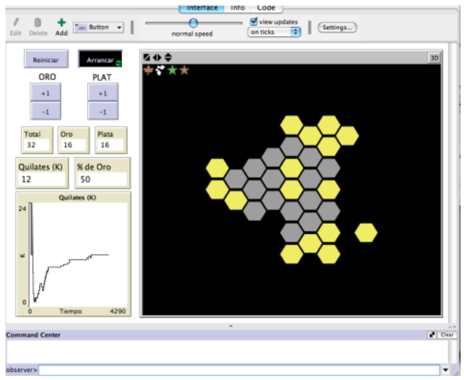
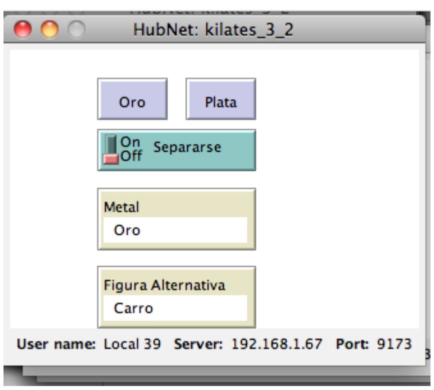


Figura 5. Espacio grupal de la simulación Quilataje en Netlogo.

El objetivo es que los estudiantes encuentren la relación entre el quilataje y el porcentaje de oro en una joya, y construyan el significado (y en consecuencia la definición) de la marca K en la joyería.



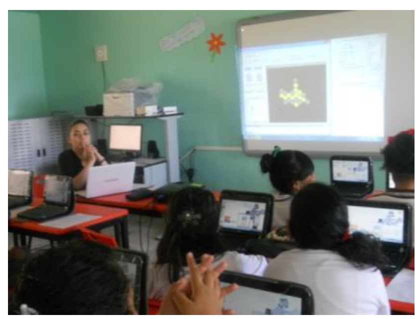


Figura 7. Un grupo durante la implementación.

Figura 6. Pantalla del estudiante.

La simulación es altamente participativa y a través de las diferentes iteraciones se conforman diferentes escenarios, que permitieron que los estudiantes identificaran la relación entre los datos obtenidos (cantidad de oro, cantidad de plata, porcentaje de oro y quilataje) y construyeran la definición de quilate.

La idea de ser todos oro, o bien, ser todos plata, les permitió acotar el problema identificando que el intervalo de variación es de 0 *K* a 24 *K*. También cabe destacar que los estudiantes después de identificar tal intervalo acuerdan en grupo, limitar el acceso a 24 usuarios (gramos de oro o plata) para realizar de manera más eficiente y comprensiva los retos de conformar joyas.

Este ambiente permitió la utilización adecuada de la tecnología para generar conectividad personal y grupal y así promover la construcción social del aprendizaje con la participación de todos los estudiantes. Al ser agentes activos que repercuten en el comportamiento de la simulación, se facilita la construcción del concepto y ha permitido la autorregulación y, en consecuencia, que evalúen la calidad de sus respuestas.

En esta actividad, se ha encontrado un ejemplo de trabajo colaborativo genuino. Se da la comunicación y coordinación entre pares, a fin de lograr los retos u objetivos comunes (conformar joyas de 10*K*, 12*K*, 18*K*, etc.). Se observa la interdependencia entre pares («si tú dejas de trabajar yo no puedo continuar», «si sigues agregando 'hexágonos' no vamos a formar la joya de los 10*K*»). Se da el apoyo entre pares y la responsabilidad en las acciones individuales, así como la conciencia de las acciones de los otros. Los roles están entrelazados, de modo que producen conocimiento compartido y el éxito o fracaso es común al igual que el objetivo.

Finalmente, los estudiantes llegan a enunciar la definición como: «El Quilate se representa con la letra *K* y mide la parte de oro en una joya. Un *K* es 1/24 parte de la joya en oro».

Actividad 6. Números felices

Esta actividad ha sido ampliamente documentada en Alvarado y González (2014) y se describe enseguida:

Parte I: Se presenta la definición*:* Un entero positivo con la propiedad de que al sumar los cuadrados de sus dígitos sucesivamente se obtiene como total de la suma 1, se dice que es un *número feliz.*

Enseguida se pide a los estudiantes que: a) Proporcionen ejemplos de números felices y justifiquen, b) intenten definir número primo feliz, y c) proporcionen al menos dos ejemplos de números primos felices.

Parte II: Después de ver el vídeo, del capítulo de una conocida serie, mostrado por el profesor (disponible en http://www.youtube.com/watch?v=ee2If8jSxUo), se pide a los estudiantes que contesten el acertijo que ahí aparece: a) ¿qué número sigue en la serie 313, 331, 367,…?, b) ¿Qué características tienen en común los números de la serie?, y ¿Qué número sigue? Justifiquen.

Después de revisar nuevamente el vídeo, deben contestar lo siguiente: ¿Recuerdan la definición de primo feliz? Anótenla

Prueben que 313 es número primo feliz. ¿Qué pueden decir acerca de 331 y 367? Justifiquen.

Volviendo a la serie 313, 331, 367, … ¿Qué número sigue? ¿Coincide tu respuesta con la dada antes?

Parte III. Finalmente, como transferencia del conocimiento construido, se pide a los alumnos que diseñen una rutina con algún software para comprobar si un número es o no feliz.

En esta actividad en la parte I, los estudiantes generaron una gran cantidad de números felices. Primero los ejemplos triviales, luego ejemplos aislados, posteriormente ejemplos relacionados con otros números (*e.g.* probar con los primos inducidos porque el 13 es número feliz) y finalmente ejemplos genéricos al aplicar propiedades ‘descubiertas’: si un número es feliz, cualquier número con un reacomodo de sus cifras también lo es: «Mira el 313 cumple [con ser número feliz] y el 133 pues también y […]».

También encontramos que realizan una serie de conjeturas acerca del proceso intermedio de sumas reiteradas de los cuadrados de los dígitos. Entre ellas, que si en el proceso intermedio aparece un 5 se produce un ciclo y tanto el número inicial en cuestión, como los números intermedios de las sumas, no pueden ser números felices.

[1] 29, 2 por 2; 9 por 9; 4+81, es 85. Mira se va repitiendo; 8 por 8, 64+25, 89; 64+81, 145; [aparece 5 y ya no es feliz]

[2] ¡Otra vez salió 81!

[3] Ah! Es 14. Ponle 14 y luego, 17, ya regresa. [De 145, 12+42 =17]

[4] El 35 ya dijimos que no.

[5] ¡Ah! Entonces los que tengan un 5 no cuentan: 45, 55, 65

[6] Bueno. ¡Hasta ahorita! Todos los que tengan 5 son cíclicos

Con esta conjetura descartan un buen número de números felices.

En la parte II, logran completar la serie ofreciendo dos respuestas la característica de los números de la serie es que son felices y deciden aportar tres respuestas derivadas de la discusión en pequeños grupos: «376 es el siguiente porque en la serie son números felices consecutivos aparte en los 2 primeros números sus 2 últimos dígitos se intercambian 313⇒331» y que «379 es primo y feliz, es el que sigue» y que los números de la serie «están entre 300 y 400, están en orden ascendente, los dos primeros sus dos últimas cifras conmutan. Que son felices». Y que el número que sigue es el «376 por las razones anteriores». En la discusión macro analizan las contribuciones y toman acuerdos para elegir como respuesta que el número que responde la cuestión en el 379.

Para la actividad de transferencia del conocimiento construido, los estudiantes proponen una rutina, en una hoja electrónica de cálculo, para verificar si un número es feliz, es decir, construyen una función, que les devuelve la suma de los cuadrados de los dígitos (Figura 8).

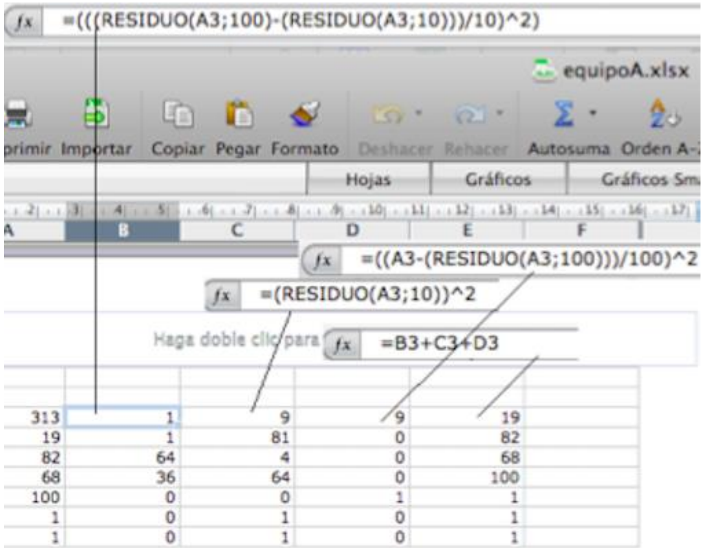


Figura 8. Rutina para determinar si un número es feliz.

Con esta rutina reafirman cada vez más sus conjeturas al probar con números de tres cifras y posteriormente extienden su rutina a números de cuatro dígitos. Esta actividad fue muy estimulante para los estudiantes, lograron engancharse y se generó una discusión académicamente rica y productiva, emulando, con las debidas proporciones, el trabajo que realiza un matemático.

Actividad 7. De ejemplos para anclar a ejemplos sofisticados, para dotar de significado las definiciones de operación binaria y grupo.

En álgebra abstracta se trabaja con ciertas ‘estructuras básicas’ (grupos, anillos, campos) que generalmente son conjuntos y con sus elementos se pueden realizar operaciones para obtener un tercer elemento también del conjunto. Además, se supone que estas operaciones algebraicas están sujetas a ciertas reglas que se indican explícitamente en un conjunto de postulados que definen la estructura.

La aproximación estructural típica es enunciar la definición que aparece enseguida, luego presentar un par de ejemplos prototípicos y posteriormente pasar a los teoremas y a su demostración:

Definición. Un conjunto no vacío *G* se dice que forma un *Grupo* si en *G* está definida una operación binaria * (operación matemática entre dos elementos definida sobre un conjunto dado) tal que:

1) $a, b \in G$ implica que $a*b \in G$ (cerradura)

2) $a, b, c \in G$ implica que $a*(b*c) =(a*b) *c$ (ley asociativa)

3) Existe $e \in G$ tal que $a*e=e*a=a$ para todo $a \in G$ (existencia del elemento neutro)

4) Para todo a$\in$ G existe un a-1 $\in$ G tal que a*a-1=a-1*a=e (existencia de inversos en G).

Como alternativa de esta aproximación se sugiere en esta propuesta:

Parte I. Explorar ejemplos para el anclaje en conocimiento previo (discusión en micro). Realizar una lista de operaciones matemáticas conocidas y algunas características o propiedades que recuerden.

De manera natural, los estudiantes activan, como conocimiento previo, el conjunto de los enteros con la operación +, *, etc.

Parte II Discutir sobre qué conjuntos o dominios es posible realizar (definir) las operaciones (discusión grupal).

En esta parte el profesor apoya y formula preguntas para pensar en otros conjuntos y operaciones.

Parte III. Trabajo en un DGS: Definir una operación * sobre una cónica. (Construcción en los equipos).

1. Preparar el dominio y los elementos auxiliares

a) Dibujar una cónica (parábola, elipse, hipérbola) y denote con *C*

b) Localice un punto *E* sobre la cónica *C*.

c) Dibuje una recta *d* que no intersecte a la cónica y que no sea paralela a la tangente a *C* por el punto *E*.

2. Operación (Figura 9): a) Considere dos puntos sobre *C* y denote por *M* y *N* respectivamente. b) Pensemos en operar *M* y *N* como sigue:

Caso 1) Si *MN* corta a *d*, sea *L* su punto de intersección y *M***N* es igual al punto de intersección entre la recta *LE* y la cónica *C*.

Caso 2) Si *MN* es paralela a *d*, entonces *M***N* es el punto de intersección de la recta que pasa por *E* y es paralela a *d* con la cónica *C*.

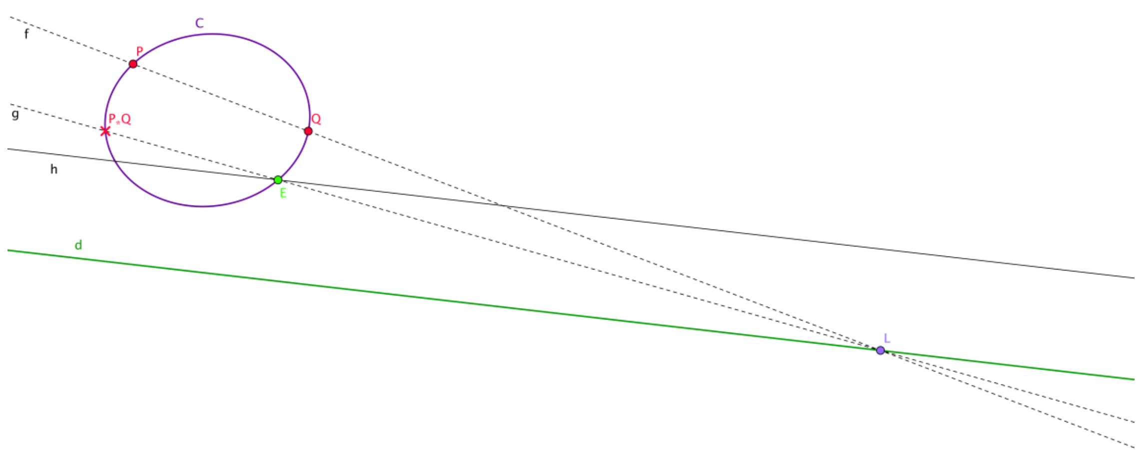


Figura 9. Operación * definida sobre el conjunto de puntos de la elipse.

Parte IV. Transferencia (Discusión grupal)

El profesor hace algunas preguntas útiles para evaluar y saber si se está dando la comunicación con los estudiantes. En la discusión en los equipos se explora para encontrar la relación entre * definida sobre la cónica y las operaciones que ejemplificaron en la parte I. Los estudiantes al poder manipular la construcción en pequeños grupos lograron verificar las propiedades de cerradura, asociativa, encontrar el elemento neutro (E) y el inverso para cada punto sobre la elipse. Finalmente, pueden concluir que este es un ejemplo geométrico de un *grupo*. Más aún, lograron identificar que la operación * es conmutativa y el profesor aprovecha la oportunidad para introducir la definición de *grupo abeliano*. También se dan situaciones del tipo 'que pasaría si' trabajamos sobre otras cónicas (parábola, hipérbola) como dominio (Lugo, 2006).

Se aprecia, cómo en este contexto, cobra significado una definición abstracta que les cuesta trabajo a los estudiantes entender y hacer formalmente operable, como se ha podido documentar en un estudio exploratorio, interesado en observar el desempeño de los estudiantes en torno a la definición y la demostración matemática, con un grupo que cursaba la materia de álgebra abstracta (Alvarado, 2015).

Conclusiones

Desde un análisis de la implementación de las actividades presentadas en este artículo se ha podido documentar que el abordaje de las definiciones ha favorecido en los estudiantes el desarrollo de formas de comprensión acerca del concepto/proceso. Esto es relevante, dado que, aunque las definiciones de los conceptos sean introducidas en el aula desde el nivel básico, los estudiantes en un nivel avanzado (universitario) aún siguen produciendo definiciones parciales. Esto es atribuible a que no hay espacios durante todo su trayecto formativo en los cuales se le promueva la enseñanza-aprendizaje de el proceso de definir y se tenga la oportunidad de distinguir cuándo una definición se considera 'buena' en matemáticas.

En relación con lo anterior, durante las interacciones en pequeños grupos se ha observado que para los estudiantes realmente representa un reto desarrollar comprensión acerca del concepto u objeto a definir. Constantemente se exhiben inconsistencias e interpretaciones erróneas, así como un uso inadecuado del lenguaje matemático. No obstante, en la discusión poco a poco se va refinando el lenguaje por la necesidad de una comunicación efectiva y en consecuencia se van superando las limitaciones.

Puede verse en la simulación participativa de la actividad 5 (Tabla 1), el uso de DGS en las actividades 2, 4 (Tabla 1) y el uso de hoja electrónica de cálculo en la actividad 6 (Tabla 1) que la tecnología puede ser un gran facilitador en el constructivismo colaborativo. Es un medio que facilita la comunicación entre los estudiantes, media para que ocurra la coordinación entre pares y se llegue a un objetivo común.

La estructura social contribuye al aprendizaje de las definiciones, dado que el conocimiento base compartido les permite incorporar habilidades y sutilezas para deconstruir —descomponer analíticamente y reconstruir— o construir definiciones y utilizarlas para realizar demostraciones (Alvarado y González, 2016) y resolver problemas.

La interacción da oportunidad a los alumnos de construir su conocimiento y de expresar sus ideas. A través de las discusiones entre ellos y con el profesor, se organiza una mejor producción académica.

Para el aprendizaje de la definición, es necesario hacer concreto el conocimiento a través de elementos simples y posteriormente apoyar a la transición hacia lo abstracto. Tal proceso, requiere en gran medida del pensamiento crítico y para éste es importante la autorregulación. Aquí en este trabajo se puede ver que los ejemplos y no ejemplos pueden ser determinantes para que el estudiante pueda ver si está entendiendo (por ejemplo, en la actividad 6).

Finalmente, entender la definición como concepto y como proceso no es tarea exclusiva de la matemática. También existe una necesidad de fortalecimiento en otras disciplinas, un ejemplo de éxito puede verse en Alaniz y AMC (2016). En este video en el fragmento de 12:24 hasta 14:59 minutos se introduce como un nuevo concepto la 'viscosidad' (medida de la resistencia de un fluido para moverse) y se intenta explicarlo con ejemplos cercanos: mover a una persona, una hoja de papel, etc. En este fragmento se puede observar que los elementos considerados para el mensaje son simples, comunes y disponibles para todos los estudiantes (mayonesa, salsa cátsup, salsa picante, aceite y una carrera). Es concreto ya que todos lo pueden tener en la cocina de sus casas, también es emocionante por la carrera y el humor de los actores. Además, explica el concepto de manera clara. En Alaniz (2016) se presentaron los resultados de un estudio (analizado con regresión logística) que compara dos formas de aproximarse a la definición a través del recurso del video: la tradicional o estructural y la de aproximarse utilizando el humor. La diferencia fue significativa concluyendo la importancia de explorar la posibilidad de integrar en la práctica el uso de las emociones.

Referencias bibliográficas

Alaniz, S. & AMC (2016) ¿La ciencia es cosa seria? Estudio sobre el impacto del humor en el aprendizaje de las ciencias. *Taller de herramientas para la divulgación científica*. CIMAT, Guanajuato, agosto.

Alaniz, S. (2016). Deriva Continental y Tectónica de Placas (video). *Academia Mexicana de Ciencias*. Disponible en https://www.youtube.com/watch?v=bH0b4z0vc58

Alvarado, A. (2015). *El estatus de la demostración matemática en el aula: de una noción paramatemática al diseño de una ingeniería didáctica*. Tesis doctoral inédita, Universidad de Salamanca, España.

Alvarado, A., Carmona, G., López, A & Mata, A. (2014). Construcción del significado de quilataje con Netlogo. *Uso de Tecnología en Matemática Educativa. Investigaciones y propuestas*. 8(1), 8-15.

Alvarado, A. & González, M.T (2016). Construcción social de los procesos de definir y demostrar. *Educação Matemática Pesquisa*. ISSN 1983-3156, 18(2), pp. 527-549.

Alvarado, A. y González, M. T. (2014). Definir, buscar ejemplos, conjeturar… para probar si un número es feliz. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1(5) p. 5-24.

De Villiers, M., Govender, R., & Patterson, N. (2009). Defining in geometry. In T. V. Craine & R. Rubenstein (Eds.), *Understanding geometry for a changing world* (pp. 189– 203). Reston: NCTM.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México: Pitagora Editrice Bologna - Grupo Editorial Iberoamérica.

Edwards, B. S., & Ward, M. B. (2004). Surprises from mathematics education research: Student (mis) use of mathematical definitions. *The American Mathematical Monthly*, 111(5), 411-424.

Gilboa, N., Dreyfus, T., & Kidron, I. (2011). A construction of a mathematical definition– the case of parabola. En B. Ubuz (Ed.). *Proceeding of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 20, pp. 425-432).

Lugo, S. (2006). *Estructuras Algebraicas Sobre Cónicas*. Tesis de Licenciatura. Universidad Juárez del Estado de Durango, México.

Nussbaum, M. (2016). *Hacia una práctica constructivista en el aula*. Pontificia Universidad Católica de Chile. Curso disponible en: https://www.coursera.org/learn/aulaconstructivista#syllabus

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12,* 151-169.