REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen VI Número 2 Fecha: julio-diciembre de 2018

ISSN: 2395-955X

CÁLCULO DE ÁREAS MEDIANTE EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES

Elvira Borjón Robles, Mónica del Rocío Torres Ibarra, Heriberto Morales de Ávila

borjonrojo@hotmail.com, mtorres@matematicas.reduaz.mx, bkm23m@hotmail.com

Universidad Autónoma de Zacatecas, México

Para citar este artículo:

Borjón, E, Torres, M, Morales, H. L. (2018). CÁLCULO DE ÁREAS MEDIANTE EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. VI, No. 2. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año VI, No. 2, Julio-Diciembre de 2018, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: https:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

CÁLCULO DE ÁREAS MEDIANTE EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES

Elvira Borjón Robles, Mónica del Rocío Torres Ibarra, Heriberto Morales de Ávila

borjonrojo@hotmail.com, mtorres@matematicas.reduaz.mx, bkm23m@hotmail.com

Universidad Autónoma de Zacatecas, México

Palabras clave: áreas, visualización matemática, aproximación, teorema del valor medio.

Resumen

La presente investigación tiene por objetivo ofrecer una alternativa para el aprendizaje del cálculo de áreas, distinta a la que se presenta en los cursos tradicionales de cálculo integral, que se trabaja en la licenciatura en matemáticas. Promueve una forma aproximada, dinámica, interactiva y práctica que utiliza implícitamente el teorema del valor medio para integrales como un proceso al límite. Es una propuesta didáctica que consta de una construcción dinámica desarrollada en el software GeoGebra y un instrumento en Microsoft Word, que toma como base el perímetro de una figura acotada por una curva y generada a partir diferentes representaciones, para calcular su área aproximada transformándola a un rectángulo.

Keywords: areas, mathematical visualization, interactivity, approximation.

Abstract

This research has a target offer an alternative for the learning calculation of areas, different from of traditional courses of integral calculus are presented and are taught in the mathematics in university degree. Promotes a way approximate, dynamic, interactive and practical, using a form implicitly of the mean value theorem for integrals, as a limit process. Is a didactic proposal composed by a dynamic construction developed in GeoGebra software and an instrument in Microsoft Word, which takes as base the perimeter of figure limited by a curve and generated from different representations, to calculate the approximate area transforming into a rectangle.

Introducción

Dada la problemática manifiesta por diversos investigadores (Artigue, 1998); Zimmermann y Cunningham, 1991), acerca del proceso de enseñanza aprendizaje del cálculo de una variable, específicamente en lo relacionado con el concepto de integral, Turégano (1998) propone:

> *Que los estudiantes puedan aprender (de forma intuitiva) conceptos de cálculo sin el dominio previo o simultáneo de las usuales habilidades algorítmicas, utilizando la visualización a través del ordenador para dar significado al concepto de integral definida y a sus propiedades mediante la idea de área bajo una curva.*
>
> *(Turégano, 1998, p. 234)*

Coincidimos con Turégano en el sentido de promover el desarrollo de la intuición en los alumnos a través de diseños apoyados de tecnología, que les permitan visualizar los conceptos expuestos en el aula, de modo que ellos puedan asimilarlos no solo por su descripción o manejo algorítmico, sino más bien apoyados en sus precepciones mentales; según Martínez (2014) trabajar con imágenes y gráficas mejora la comprensión de conceptos abstractos y facilita la resolución de problemas.

Por su parte, Cantoral y Cabañas (2006) plantean un tratamiento de la noción de área en actividades de la vida cotidiana, involucrando el concepto de conservación de área, entendida como transformaciones o movimientos en construcciones vinculadas a regiones planas, donde los objetos pueden cambiar o mantener su forma sin que el área se altere. Mostrando con esto su preocupación por dar alternativas para mejorar el aprendizaje del concepto de área desde el punto de vista geométrico.

También Borjón y Torres (2010) proponen el manejo de la definición de integral de Riemann, por medio de la visualización matemática, con el objetivo de que el alumno cuente con un acercamiento al concepto de integral a través de la manipulación de un programa realizado en el ambiente TI Voyage 200, en el que se trabaja con áreas de diferentes figuras, de forma que el alumno desasocie la forma (cóncava o convexa) de las mismas al comportamiento y mecanismo de obtención del área.

Por otra parte, Martínez (2014) trabaja algunos métodos visuales de integración, en el que se utiliza la simetría de las funciones, poniendo énfasis principalmente en la visualización.

Así pues, nuestra investigación tiene por objetivo utilizar la visualización matemática, apoyada en una app desarrollada en GeoGebra, para propiciar el desarrollo de la intuición en el alumno respecto del cálculo de áreas con el uso implícito del teorema del valor medio para integrales; incluso a realizar planteamientos alternativos de cálculo de áreas. Específicamente trabaja con un archivo dinámico del software GeoGebra que acompañado de un instrumento en Microsoft Word, promueva la aproximación de áreas acotadas por una curva en un intervalo cerrado $[a, b]$.

En suma, en este trabajo promovemos el cálculo de áreas en forma aproximada, dinámica, interactiva y práctica, utilizando implícitamente el teorema del valor medio para integrales mediante un proceso al límite. Así mismo ofrecemos una forma alternativa de calcular áreas, distinta a la que se presenta en los cursos tradicionales del cálculo integral.

Referente Teórico

Zimmermann y Cunningham (1991) describen la visualización matemática como “el proceso de formar imágenes (mentalmente, con lápiz y papel, o con ayuda de tecnología), usando tales imágenes efectivamente para un descubrimiento y comprensión matemática”. En este sentido, entendemos por visualización la exteriorización de imágenes mentales con que los alumnos logran encaminarse hacia la conceptualización, que va más allá de la simple percepción, en concordancia con Hitt (2003), quien afirma:

> *La percepción la tomaremos como la función por la que la mente de un individuo organiza sus sensaciones y se forma una representación interna de*

> *los objetos externos, en cambio, la visualización tiene que ver con un conocimiento directo e intuitivo que se realiza inconscientemente.*
>
> *(Hitt, 2003, pág. 207)*

Para lograr propiciar esta visualización a la que nos referimos, hacemos uso de software libre de geometría dinámica, en la idea de que este contribuirá al desarrollo de la intuición para exteriorizar, por medio de múltiples representaciones, las imágenes mentales asociadas al cálculo de áreas, utilizando implícitamente resultados como el teorema del valor medio para integrales, de acuerdo a la idea que plantea Hitt (2003):

> *La visualización matemática de un problema desempeña un papel importante, y tiene que ver con entender un enunciado mediante la puesta en juego de diferentes representaciones de la situación en cuestión y ello nos permite realizar una acción que posiblemente puede conducir hacia la solución del problema.*
>
> *Hitt (2003, pp. 218)*

En la misma investigación se identifica que para Hitt al igual que nosotros es importante el uso de la tecnología para lograr la visualización de un problema, cuando menciona:

> *La tecnología, desde este punto de vista, servirá como herramienta fructífera para la construcción de conceptos matemáticos más profundos que se reflejen en procesos exitosos por parte de los estudiantes en la resolución de problemas.*
>
> *Hitt (2003, pp. 218)*

Guzmán (1996), nos proporciona otra definición de lo que se entiende por visualización en matemáticas, la cual refuerza nuestra teoría:

> *Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de problemas. Esta forma de actuar con atención explícita a las posibles representaciones concretas en cuanto revelas las relaciones abstractas que al matemático interesan constituye lo que denominamos visualización matemática.*
>
> *(Guzmán, 1996, p. 15)*

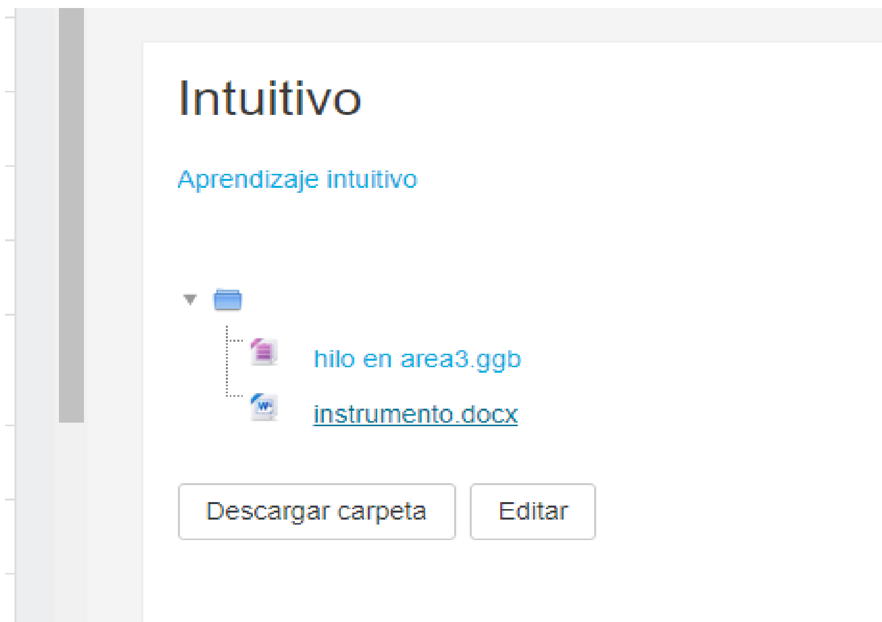
Teniendo en cuenta las diversas formas de expresar lo que se entiende por visualización Matemática (Zimmermann y Cunningham, 1991; Hitt, 2003; Guzmán, 1996), fijamos nuestra posición respecto de lo que entenderemos por visualización matemática en este trabajo como: *el proceso de formar imágenes mentales y exteriorizarlas a través del papel y dispositivos electrónicos que trabajan mediante software de geometría dinámica, con la finalidad de conceptualizar objetos matemáticos o resolver problemas específicos; desarrollando con ello la intuición en el alumno.*

Por otra parte, el contenido matemático involucrado en esta investigación está sustentado en la obtención de áreas de figuras planas no euclidianas y el teorema del valor medio para integrales, el cual incluimos como parte del marco teórico, para cualquier referencia:

> Si f es una función continua en $[a, b]$ entonces existe un número c entre a y b, tal que $\int_a^b f(t)\,dt = f(c)(b-a)$
>
> *(Purcell, Varberg y Rigdon, 2007, p. 254)*

Metodología

El trabajo se experimentó con un grupo de cinco estudiantes del tercer semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas. El escenario para el desarrollo fue en el centro de cómputo de la misma, donde cada alumno contaba con un equipo de cómputo con el software (GeoGebra 5.0 y Microsoft Word 2010) previamente instalado, así una cuenta de usuario y acceso a internet (para su autentificación a la plataforma Moodle), que le permitieron descargar y trabajar con la app desarrollada y el instrumento de apoyo, para posteriormente subir en la misma plataforma sus respuestas.



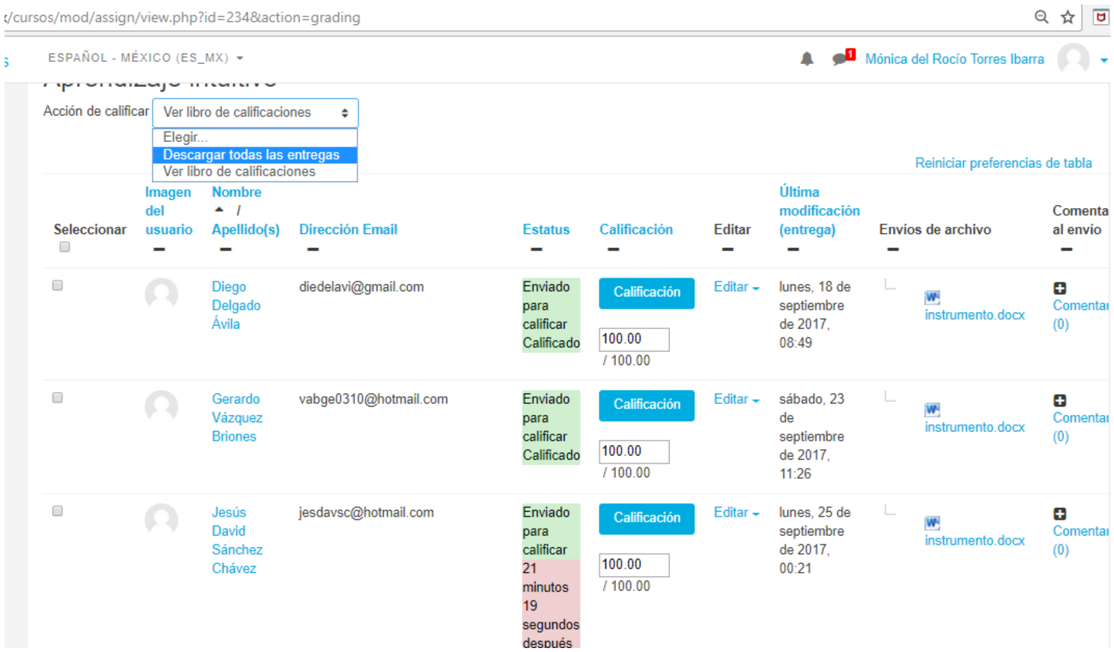


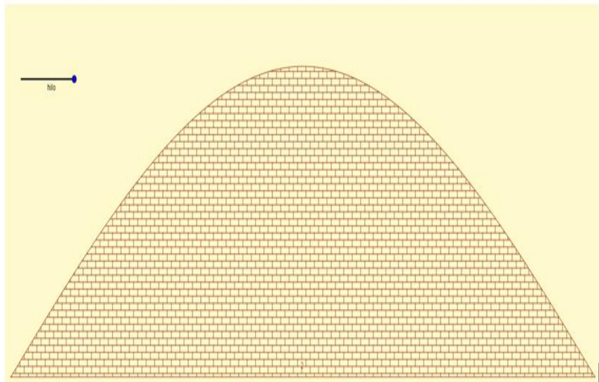
Figura 1. Vista de la plataforma para carga y descarga de archivos.

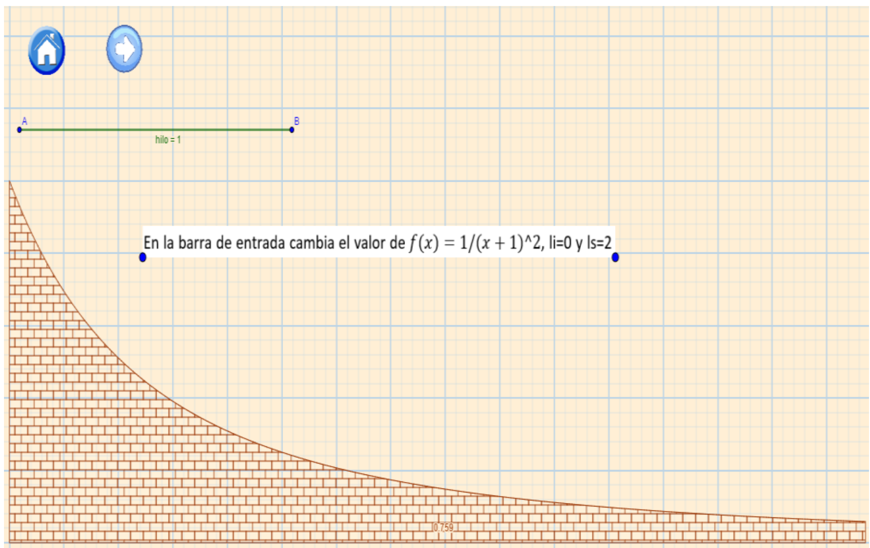
Se inicia con la representación de la situación a resolver, (en una representación geométrica, algebraica y pictórica, respectivamente) las cuales les proporcionan como herramienta un hilo virtual que permite recorrer el contorno de la figura a través de un cierto número de segmentos de línea, cuya longitud se conserva en el perímetro de un rectángulo, posteriormente se le presenta una representación aritmética y geométrica de la situación, con las cuales deberá trabajar en una representación tabular y algebraica que le permitirá hacer una relación de los valores obtenidos con el área de la figura en cuestión, para posteriormente hace una comparación con el área real y obtener sus propias conclusiones.

Problemática

Se pide al alumno que encuentre el área acotada por una curva de tres situaciones planteamientos, en el primero se le proporciona una representación geométrica, en el segundo una representación algebraica y en el tercero una representación pictórica, contando para su solución como única herramienta un hilo, como se muestra en la figura 2:

Descripción: Se quiere construir una pared como la que se muestra en la siguiente imagen, para cotizar su construcción nos piden el tamaño del área que ocupa, para tomar esta medida contamos con un hilo que nos permitirá aproximarla





Describe la forma en la que encontrarías el área de una nube que se proyecta en el piso (si no conoces una fórmula que genere su figura).

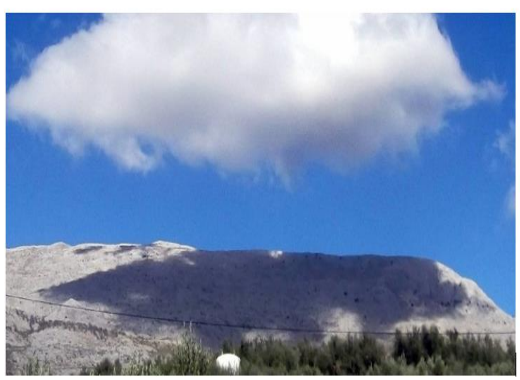


Figura 2. Representación de las tres situaciones planteadas.

Para su solución, se solicita a los alumnos que abran el programa desarrollado y utilicen el hilo virtual que les proporciona; con éste podrán recorrer a través de segmentos, el contorno de la figura y obtener una longitud del hilo necesario para recorrerlo, enseguida deberán determinar los valores (base y altura) que les permitan construir un rectángulo cuyo perímetro se alcance a cubrir con la cantidad del hilo utilizado, el programa presenta la figura y realiza los cálculos del área correspondiente, para que ellos determinen si esta es la más aproximada al valor buscado.

Planteamiento 1. En este se pide al alumno calcular el área acotada por la curva, utilizando el programa en GeoGebra y el hilo virtual que subdividirán en una determinada cantidad de segmentos que los aproximen a la curva en cuestión.

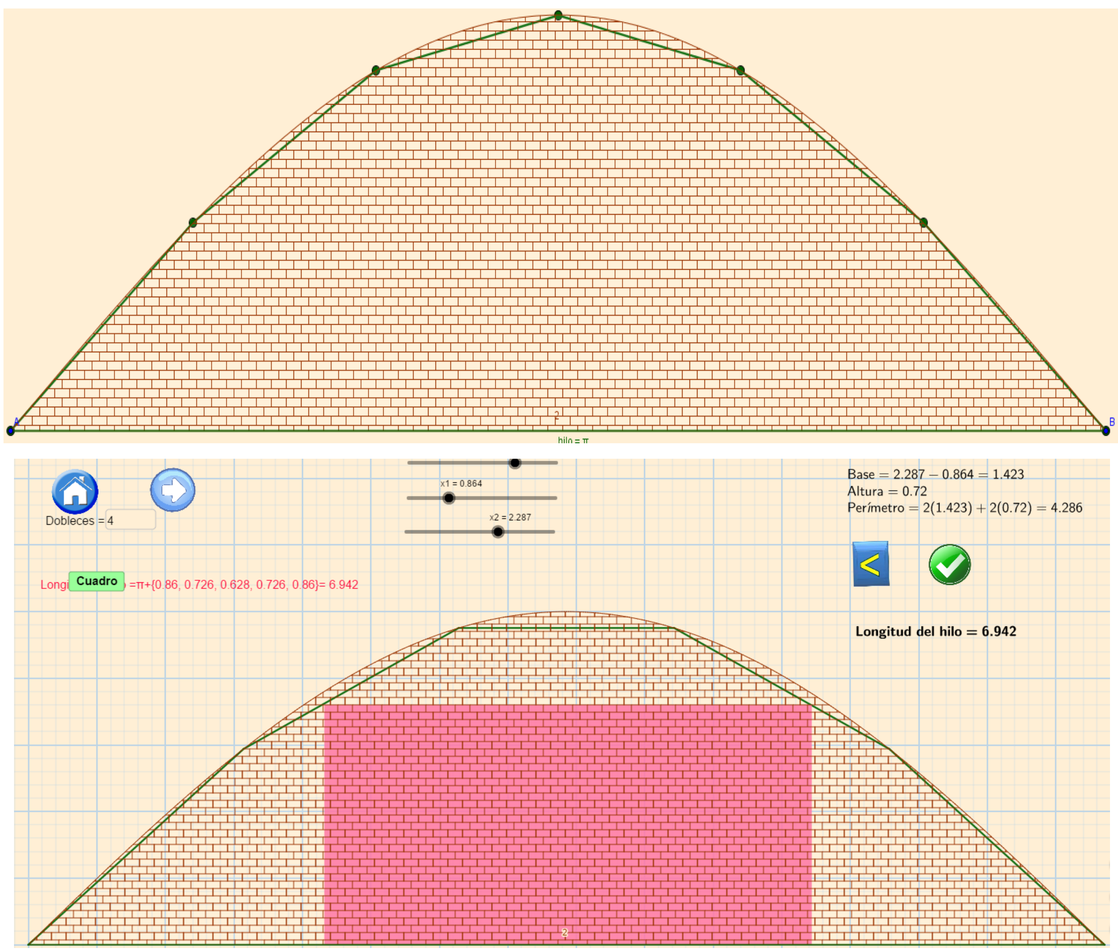


Figura 3. División del hilo virtual en n segmentos y determinación del área del rectángulo de apoyo.

Al mismo tiempo, el instrumento creado en Microsoft Word con 12 items, entre instrucciones y preguntas, los estudiantes van creando las imágenes mentales a través de diferentes representaciones manejadas, las cuales al final les permite plantear una solución a la situación presentada.

Planteamiento 2. Determinar el área acotada por la función $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}, x \in [0,2]$. En esta situación los alumnos deberán interactuar con el programa mediante la barra de entrada, para especificar la función que establece la curva y sus respectivos límites, las instrucciones para su realización están contenidas en cinco instrucciones del instrumento de trabajo.

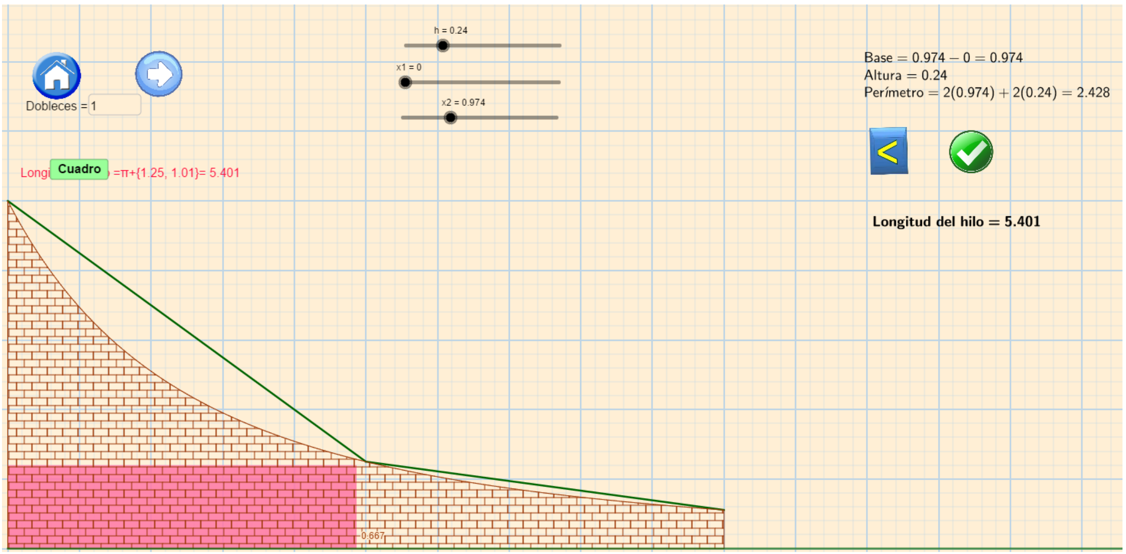


Figura 4. Representación de la segunda situación.

Planteamiento 3. A partir de las herramientas utilizadas en los planteamientos anteriores, los alumnos deberán buscar una estrategia para calcular el área de la sombra de una nube proyectada sobre el suelo, figura de la cual no se conoce una fórmula, y en la cual en 2 items deberán establecer una estrategia de solución y realizar una construcción que lo simule.

Figura 5. Figura presentada en la situación 3 del instrumento.

Puesta en escena

Se trabajó en dos sesiones de 90 minutos cada una, en un primer momento, los alumnos se loguean en la plataforma Moodle para descargar dos archivos: el instrumento (Microsoft Word) que contenía la secuencia de instrucciones y preguntas y la app desarrollada (en GeoGebra) para la simulación de las situaciones problema.

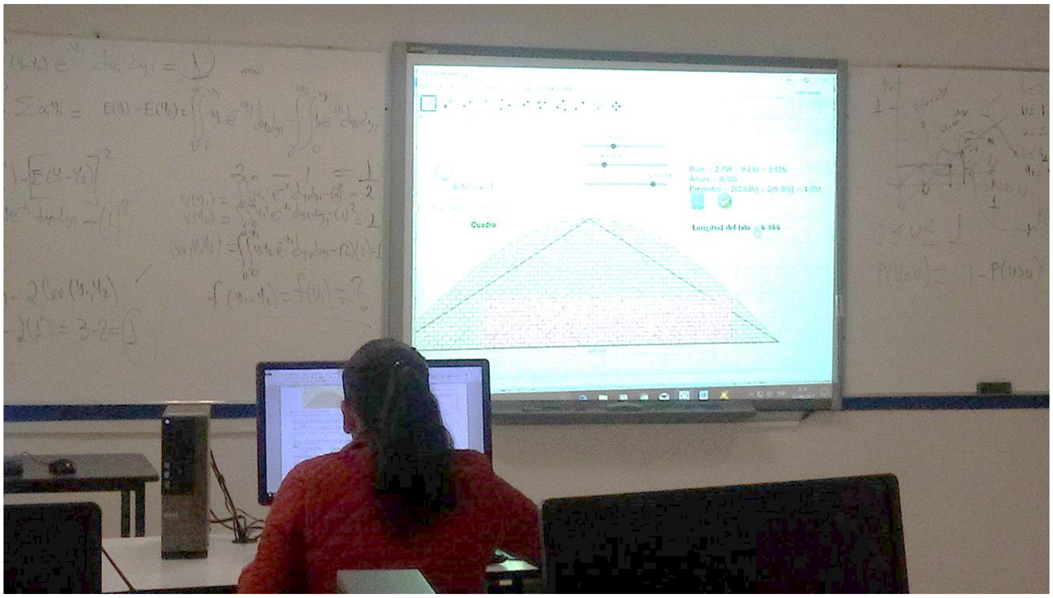


Figura 6. Alumnos trabajando en la situación.

En un segundo momento, guiados por el instrumento, los alumnos siguiendo las indicaciones del instrumento, ejecutan la actividad con el GeoGebra, del que se desprende la exteriorización en diferentes representaciones de lo que visualizan, al tiempo que van completando los cuestionamientos del mismo instrumento; finalmente suben a la plataforma sus respuestas y construcciones realizadas.

En un último momento, las investigadoras descargan el concentrado de archivos trabajados por los alumnos y proceden a la realización del análisis de resultados.

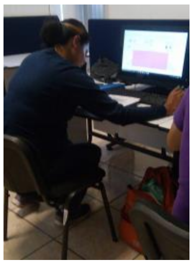
Resultados

La primera sección del instrumento estaba encaminada a la comprensión del manejo del app desarrollado, se esperaba que se dieran cuenta que para que el hilo se ajuste a la curva en cuestión, deberían realizar un determinado número de dobleces sobre la curva, lo cual se logró de manera uniforme por todos los alumnos, como se muestra en la siguiente figura:

1. Mueve el hilo y trata de adaptarlo al contorno, ¿qué sucede? **El hilo toma el valor de la base.**
2. Como el hilo no es flexible, para poder adaptarlo se requiere hacer algunos dobleces ¿Cuál será el número mínimo de dobleces que le debemos hacer al hilo para rodear la figura? 1 a este número le llamaremos n
3. Activa el botón de la aplicación, observarás que el hilo se coloca en la base de la figura, si $n = 1$, ¿cuál es la longitud del hilo? π el hilo se hace más grueso, ¿cuál es su longitud? **6.866** ¿por qué? **Porque es la suma de ambas partes del hilo.**

Figura 7. Tipo de respuestas de la fase de adaptación al instrumento utilizado.

Posteriormente, con la manipulación del app desarrollado en GeoGebra para cada una de las situaciones, se esperaba que se dieran cuenta de que el área que se calcula es menor que el área exacta, lo cual se logró completamente, emitiendo respuestas como las que se presentan a continuación:



B A1. RI No R2. Porque aun así hay un área notable sin tomar en cuenta.
M A2. R1. Si R2. porque al aumentar los dobleces el hilo se aproxima mas al contorno.
M A3. R1. Si R2. porque a medida que hacemos mas dobleces, aproximamos el hilo al contorno "curvo" que tiene la figura original
M A4. R1. Si R2. Porque entre mas dobleces tenga el hilo, tendrá mejor aproximación en la figura.
B A5. R1. No R2. Porque aun queda bastante área que tomar en cuenta

Figura 8. Respuestas en las que se muestra la relación entre áreas.

Por otra parte, se espera también que den muestras de un acercamiento del proceso al límite, lo cual se muestra cuando se les pide que planteen formas alternativas para la obtención del resultado a la problemática planteada. En sus respuestas se observa que sus imágenes mentales si les permiten este acercamiento.

A1.cuando n tiende a infinito

A2. Con un límite

A3. podría haber una aproximación casi exacta pero para ello se necesitaría el límite de las áreas, y derivadas _porque a medida que n crece la figura que forma el hilo tiene a ser la figura original.

A4. cada vez que se Propone un n muy grande, las aproximaciones van siendo mejores pero nunca será exacta

A5. No como formula de la elipse a con la de la parábola

Figura 9. Respuestas en torno a procesos alternativos de solución.

Finalmente, en relación a los métodos propuestos y utilizados para la solución de los planteamientos, pudimos encontrar que para ellos el método es bueno pero su precisión no lo es tanto (ver figura 10); lo cual era lo que se pretendía.

A1. Es una buena forma de aproximarse a un área y la longitud de una curva.

A2. que es un poco impresiza

A3. que en general puede aproximarse el área de cualquier figura casi de forma exacta por medio de figuras de las cuales ya podríamos conocer su área.

A4. Esta forma es muy buena manera de aproximación, ya que cada vez que los valores van siendo más grandes, la aproximación va siendo mejor

A5. Pues que es útil pero no exacto

Figura 10. Conclusiones acerca del método utilizado.

Cabe mencionar también que no hubo mayor problema cuando se plantea un cambio de representación para el planteamiento de la situación, más aun, cuando se les pide encontrar el área de una sombra, en la que no existe una fórmula o un plano de referencia, recurren a éste método de aproximación para la obtención del área, como se observa en la figura 11, y sus construcciones se basaron en el mismo (ver figura 12) de manera muy precisa.

Tomando puntos del extremo de la sombra, luego con el realizo el perímetro del polígono dado por esos puntos, al final construyo un rectángulo con ese perímetro y veo su área.

Colocaria segmentos de tal moso que se aproximaran al contorno de la nube, y construiría un rectángulo de modo que no sobrepasara el perímetro

Marcaría todos los puntos del polígono sobre el piso, después con un hilo mediría la longitud entre todos esos puntos, y así formaría un cuadro que tuviera la misma longitud que la nube, así calcularía el área del cuadro y obtendría una aproximación del área de la nube.

Si tengo una figura la cual resulta complicado saber su área por medio de una formula o por medio de la triangulación, entonces lo que haría seria por medio de segmentos tratar de cubrir el contorno de la figura, es decir tratar que la diferencia entre el contorno y cada segmento no sea muy grande, después con la suma de esos segmentos, se determinaría de alguna manera el perímetro aproximado y por medio de figuras que ya conocemos (cuadrado) trataríamos de encontrar o al menos de dar una aproximación del área de la figura

Tomaría de base un cuadrado o rectangulo en la sombra de la nube que abarque la mayor parte de esta

Figura 11. Métodos para la obtención del área de una figura hipotética.

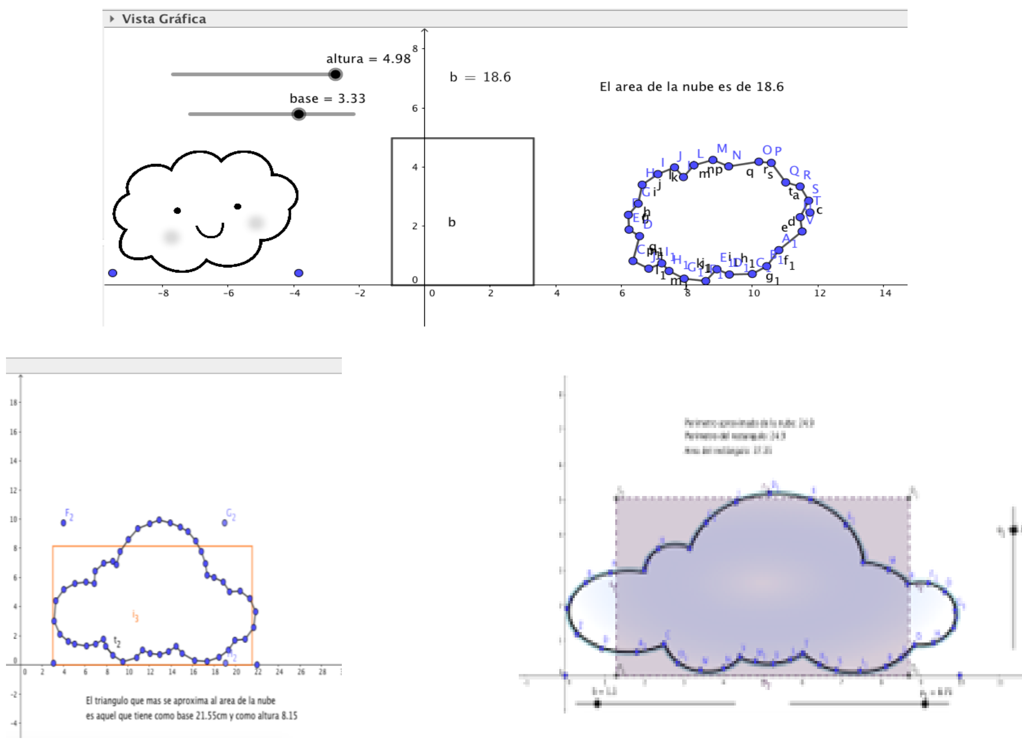


Figura 12. Planteamientos de solución implementados por los alumnos a la situación 3.

Con todo lo anterior, podemos decir que los objetivos planteados en la presente investigación en torno a la visualización se lograron, de la siguiente manera:

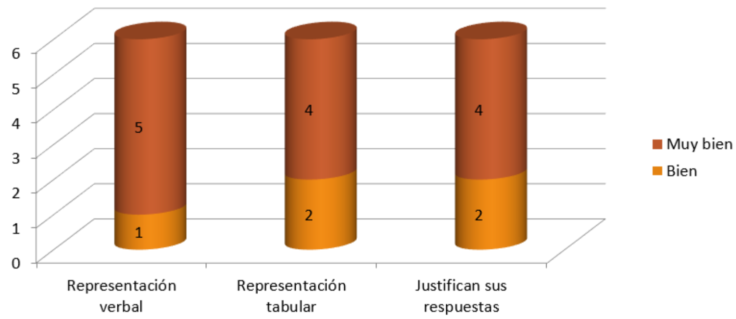


Figura 13. Gráfica de manipulación de la situación 1.

Conclusiones

Se logró que los alumnos calcularan áreas de forma aproximada con la app que se les proporcionó llegando incluso a describir el proceso general.

Se identificó que los alumnos entienden el límite como un proceso de aproximación, afirmando que "se acerca mucho pero no se alcanza"

Aprendieron el proceso que se ofreció, llegando a calcular con GeoGebra de manera independiente el área de una figura plana.

Cuando proponen la solución del tercer problema se evidencia que implícitamente están aplicando el teorema del valor medio para integrales.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 1, núm. 1, pp. 40-55.

Cabañas, G., Cantoral, R. (2007). La integral definida: Un enfoque socioepistemológico. En C. Dolores, Martínez, G., Farfán, R., Carrillo, C., López, I. y Navarro, C. (Eds.). *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula.* México: Ediciones Díaz de Santos, 9 – 32.

Guzmán, M. (1996), *El rincón de la pizarra: ensayos de visualización en análisis matemático*. Madrid, España: Pirámide.

Martínez F. (2014). Recursos para el cálculo visual de integrales. *Educación Matemática*. Vol. 26, No. 1.

Martínez de la Rosa, F. (1996). Recursos para el cálculo visual de integrales. *Educación Matemática*, vol. 26, núm. 1, pp. 153-169. Grupo Santillana: México Distrito Federal, México

Purcell y Varberg (2007). *Cálculo*. 9ª Edición, Pearson, México.

Turégano (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las ciencias*. No. 16 V. 2 p. 234.

Zimmerman, W., Cunningham, S. (1991). What is the mathematical visualization? *Visualization in Teaching and Mathematics*. Mathematical Association of America Notes. p. 3.