REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen VI Número 2 Fecha: julio-diciembre de 2018

ISSN: 2395-955X

ISSN: 2395-955X

EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO QUE MUESTRA EL FUTURO PROFESOR CUANDO USA GEOGEBRA EN SUS CLASES

Marleny Hernández Escobar, Gonzalo Zubieta Badillo

marlenylesly@hotmail.com, gzubieta@cinvestav.mx

CINVESTAV-IPN, México

Para citar este artículo:

Hernández, M., Zubieta, G. (2018). El conocimiento especializado que muestra el futuro profesor cuando usa GeoGebra en sus clases. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. VI, No. 2. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año VI, No. 2, Julio-Diciembre de 2018, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: https:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO QUE MUESTRA EL FUTURO PROFESOR CUANDO USA GEOGEBRA EN SUS CLASES

Marleny Hernández Escobar, Gonzalo Zubieta Badillo

marlenylesly@hotmail.com, gzubieta@cinvestav.mx

CINVESTAV-IPN, México

Palabras clave: Conocimiento Especializado, Futuro Profesor, Geometría, GeoGebra.

Resumen

Este trabajo es un estudio de caso donde se indaga mediante video grabaciones el conocimiento especializado de una futura profesora de secundaria que integra el uso de GeoGebra en el salón de clases para la enseñanza de la geometría, la finalidad es investigar y categorizar de qué manera el uso del recurso computacional interviene en la comprensión de la construcción de la mediatriz y de la bisectriz en un triángulo. En relación con el marco del conocimiento del profesor, se utilizan las categorías de los subdominios del modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

Key words: Specialized knowledge, future teacher, geometry, GeoGebra.

Abstract

This work is a case study where the specialized knowledge of a future high school teacher that integrates the use of GeoGebra in the classroom to teach geometry is investigated through video recordings, the purpose is to investigate and categorize how the use of computational resources is involved in understanding of the construction of the perpendicular bisector and the bisector in a triangle. In relation to the knowledge framework of the teacher, the categories of the subdomains of the specialized knowledge model of the mathematics teacher are used.

Introducción

Este trabajo explora sobre el conocimiento especializado del futuro profesor (matemático y didáctico del contenido) cuando utiliza GeoGebra en el aula, debido a que, el conocimiento de la herramienta es fundamental para poder diseñar actividades y pensar en sus posibilidades en el aula, pero también es necesario un conocimiento de la materia a impartir, consideramos que ambos conocimientos se intersecan, en el sentido de que se necesita un conocimiento de la herramienta para enseñar el contenido matemático, y que el conocimiento de la herramienta incide en el conocimiento del objeto matemático y su enseñanza-aprendizaje.

El interés del estudio es el futuro profesor cuando usa GeoGebra para la enseñanza de las matemáticas, en el contexto que muestra una práctica caracterizada por la exploración del alumno en situaciones problemáticas. Hemos elegido GeoGebra porque converge con un tratamiento geométrico favoreciendo el trabajo en resolución de problemas y la comprensión de conceptos y procedimientos matemáticos (Saidón, Bertúa y Morel, 2010). Asimismo, es una herramienta con potencial para transformar el aula de matemáticas, en el sentido de modificar la enseñanza de prácticas tradicionales a investigativas (Carrillo, 1998).

Utilizamos algunos de los subdominios del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) propuestos por Carrillo, Climent, Contreras, Montes, Escudero-Ávila, y Flores-Medrano (2014) como fundamento teórico y práctico en el diseño de las actividades implementadas en este trabajo.

Partimos de la consideración de que en el conocimiento del profesor para la enseñanza de la matemática más relativo al propio contenido matemático, pueden considerarse dos dominios principales: conocimiento del contenido (MK) y conocimiento didáctico del contenido (PCK). Nos interesa el carácter especializado del conocimiento del profesor de matemáticas, entendiendo que no debe restringirse a un subdominio del conocimiento matemático sino a todos sus subdominios. Por lo tanto, asociamos la especificidad de dicho conocimiento el referido a la enseñanza de la matemática y lo que debe reflejarse en el conocimiento del profesor en su conjunto.

Referente teórico

El Marco Teórico de este estudio se basa en el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, en adelante MTSK (Mathematics Teacher's Specialised Knowledge) (Carrillo, Climent, Contreras, y Muñoz-Catalán, 2013).

La Figura 1, representa el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Carrillo, et al., 2013), no incluimos la parte central del modelo que corresponde a creencias por no ser parte del presente estudio.

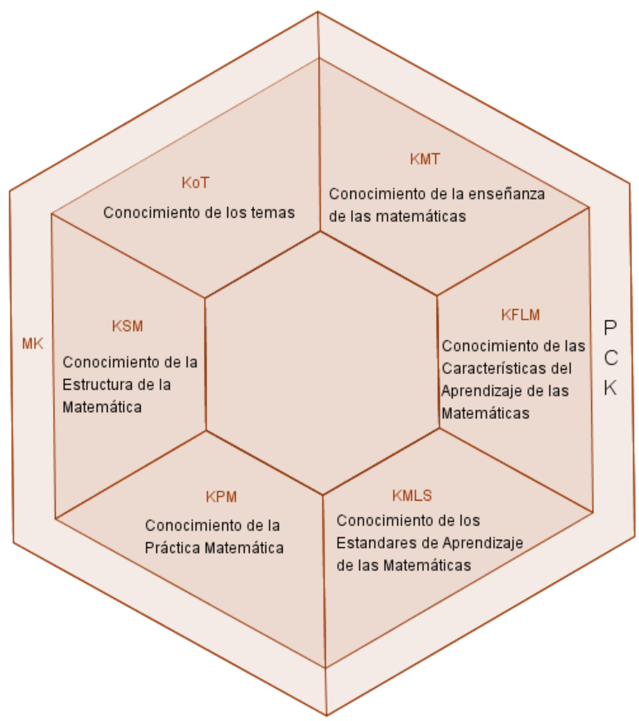

Figura 1. Subdominios del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas

Utilizamos el MTSK como modelo teórico debido a que se diferencia del conocimiento en pedagogía y psicología general, del conocimiento especializado del docente de otras asignaturas y del conocimiento especializado de otro profesional de la matemática, siendo una herramienta metodológica que admite analizar distintas prácticas del futuro profesor de matemáticas y permite interpretar su conocimiento especializado a través de sus categorías.

El MTSK es un elemento que ayuda a organizar una reflexión (colectiva o individual) sobre el conocimiento para enseñar matemáticas haciendo uso de conocimientos prácticos donde el futuro docente sea consciente de los conocimientos que posee o que le faltan, a través de diseños de tareas con una estructura específica y la ejecución de las mismas para formar un entorno de aprendizaje con el análisis de sus errores, además tiene que ver con su intervención en el aula integrando las diferentes formas con las que se interactúa de cara a la enseñanza.

En este documento damos cuenta de la observación realizada del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) que posee el futuro docente para la enseñanza de las matemáticas y de qué forma este conocimiento se modifica cuando se diseñan, se aplican y se resuelven actividades con el uso de GeoGebra que orientan la tarea educativa, a través del análisis y la investigación.

La estructura del modelo teórico del MTSK se desarrolla con base en los dominios que se describen a continuación:

Dominio de Conocimiento Matemático (MK)

Dominio fundamental en el futuro profesor debido a que es el conocimiento de la propia disciplina que se enseña, considera tres subdominios que lo componen y le dan sentido:

1) Subdominio de Conocimiento de los Temas Matemáticos (KoT). Es un conocimiento profundo que consiste en conocer los contenidos matemáticos que se enseñarán (conceptos, procedimientos, hechos y reglas entre otros) y sus significados de manera fundamentada.

Dentro de este subdominio se consideran las siguientes categorías:

a. Conocimiento de los procedimientos matemáticos asociados a un contenido. En esta categoría se emplea el conocimiento práctico del trabajo matemático, es decir el saber hacer, puesto que es importante para el profesor conocer los procedimientos asociados a contenidos específicos, conjuntamente, con el conocimiento matemático suficiente para reconocer los procesos que se necesitan para algún contenido.

b. Conocimiento de las propiedades y sus fundamentos atribuibles a un contenido matemático. Esta categoría se refiere al conocimiento sobre propiedades específicas del contenido matemático y los fundamentos que le dan sentido y significado.

c. Conocimiento de registros de representación asociados a un contenido matemático. Se considera el conocimiento acerca de modelos que pueden ser atribuidos a un tópico. Se ven estos como fenómenos que sirven para generar conocimiento matemático, pero también, se considera el conocimiento que el profesor tiene acerca de usos y aplicaciones de un tópico que ya fue enseñado.

d. Conocimiento de la fenomenología asociada a un contenido matemático. Se refiere al conocimiento sobre la fenomenología de los conceptos (Freudenthal, 1983), conocimiento que debe ser considerado importante para el futuro docente, debido a su "amplia variedad de contextos en los que situar el contenido, así como aspectos epistemológicos ligados a la matemática que permitan al profesor comprender los significados que pueden atribuirse a un contenido" (Carrillo, Contreras y Flores, 2013, p.196).

2) Subdominio de Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM). Este subdominio tiene sus bases en lo descrito por (Ball, Thames, Phelps 2008) como Conocimiento del horizonte matemático, este conocimiento de las matemáticas permitirá al futuro profesor reflexionar sobre algún contenido para trabajar la matemática desde un punto de vista integral y estructurado para comprender y desarrollar conceptos avanzados desde una perspectiva elemental y conceptos elementales mediante una visión avanzada.

Para este subdominio se proponen categorías de análisis:

a. Conexiones de Complejización en las cuales se relacionan los contenidos enseñados con contenidos posteriores, una visión de la matemática elemental desde un punto de vista avanzado se refleja en la proyección de los contenidos enseñados como potenciadores para contenidos a enseñar en un futuro (Klein, 1957).

b. Conexiones de Simplificación en las cuales se relacionan los contenidos enseñados con contenidos anteriores, es decir, la enseñanza de la matemática avanzada desde un punto de vista elemental se refleja en la retrospección de los contenidos enseñados potenciados por los previos (Klein, 1957).

c. Conexiones de Contenidos transversales, son conexiones que tienen distintos contenidos y pueden relacionarse por alguna cualidad común y por los modos de pensamiento asociados a dichos temas.

d. Conexiones Auxiliares consideradas cuando un objeto matemático sirve como auxiliar de otro.

3) Subdominio de Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM). Este subdominio contempla cómo es construida la matemática y destaca la importancia de que el docente conozca las formas de proceder para llegar a resultados y características de un trabajo matemático sabiendo cómo se explora y cómo se genera conocimiento a través de establecer relaciones, correspondencias y equivalencias.

Para este subdominio se consideran las siguientes categorías.

a. Prácticas ligadas a la Matemática en General. Esta categoría considera un tipo de conocimiento que se relaciona con el desarrollo de las matemáticas independientemente del concepto abordado, es decir, se debe conocer el significado de una condición necesaria y una condición suficiente o las cualidades de una definición, este conocimiento provee estructuras lógicas de pensamiento que ayudarán al futuro docente a entender el funcionamiento de diversos aspectos matemáticos adecuados para comunicárselos a los estudiantes, mejorando el entendimiento de fenómenos cotidianos.

b. Prácticas ligadas a una Temática en Matemáticas donde tiene sentido considerar un tipo de razonamiento asociado específicamente a un tópico concreto, es decir, existe un tipo de conocimiento sobre matemáticas usado independientemente del concepto abordado.

Dominio de Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)

Este conocimiento incluye los conocimientos que el profesor tiene sobre los temas enseñados con regularidad, es decir, todas las formas de representación (ilustraciones) y formulación (ejemplos y explicaciones) que configuran que el contenido sea comprensible para otros al considerar los siguientes subdominios.

1) Subdominio de Conocimiento de las Características del Aprendizaje (KFLM). Este conocimiento permitirá al futuro profesor adquirir una mayor conciencia del ambiente escolar en el que se desarrollan las prácticas docentes para poder abordar los temas de una forma más personalizada y ajustada con las necesidades de los alumnos de secundaria.

Para este subdominio se consideran las siguientes categorías.

a. Conocimiento de teorías de aprendizaje asociadas a un contenido matemático. Se refiere al conocimiento que tiene el profesor acerca de los modos de comprensión asociados a la naturaleza misma del contenido matemático.

b. Conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático, esta categoría engloba conocimientos sobre los errores, obstáculos y dificultades asociados a la matemática en general y a temas concretos, es decir, las características y procesos de aprendizaje asociadas directamente con las características matemáticas y no pedagógicas del contenido.

c. Conocimiento de las formas de interacción de los estudiantes con el Contenido Matemático. Se refiere al conocimiento que tiene el profesor acerca de los procesos y estrategias de los estudiantes, tanto los típicos como los no habituales, se categorizan aquí los conocimientos sobre el lenguaje formal o informal, además de las figuras usadas comúnmente por los estudiantes de secundaria al abordar un determinado contenido.

d. Conocimiento de los principales intereses y expectativas de los estudiantes al abordar un contenido matemático. Es el conocimiento que tiene el futuro profesor sobre las concepciones que pueden existir en un determinado tema, aquí se considera que la elección de las estrategias están en función de la adecuación para el grupo de estudiantes al que se les imparte la clase.

2) Subdominio de Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática (KMT). Este subdominio incluye el conocimiento de recursos, materiales (dibujos, modelos manipulables, diagramas, lenguajes hablados o símbolos escritos), modos de

presentar el contenido y el potencial que puede tener para la instrucción de un concepto o procedimiento matemático.

Se consideran las siguientes categorías para este subdominio:

a. Conocimiento de teorías de enseñanza asociadas a un contenido matemático. Son los conocimientos sobre la potencialidad que pueden tener ciertas actividades, estrategias o técnicas didácticas asociadas a un contenido, además del conocimiento de representaciones para la instrucción, correspondientes a teorías de enseñanza.

b. Conocimiento de los recursos materiales o virtuales de enseñanza asociados a un contenido matemático. Son los conocimientos que el futuro docente tiene para identificar las potencialidades, las limitaciones y las repercusiones que tendría el uso de algún recurso como medio para presentar un contenido matemático.

c. Conocimiento de estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido matemático. Este conocimiento involucra los conocimientos del futuro profesor sobre la potencialidad de actividades, estrategias o técnicas para enseñar un contenido matemático, así como las limitaciones, o los obstáculos que deberán superarse para que la estrategia sea exitosa.

3) Subdominio de Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS). Aquí se considera el conocimiento que el futuro profesor tiene acerca de lo que está estipulado que aprenda un estudiante de secundaria y su nivel conceptual, para poder dar una ubicación temporal y contextual al contenido abordado.

Para este subdominio se consideran las siguientes categorías de conocimiento.

a. Contenidos Matemáticos que se requieren Enseñar. Es el conocimiento que el futuro profesor tiene referente a lo que se espera que el estudiante aprenda en un determinado nivel escolar, puede ser adquirido mediante la consulta de un documento rector que indique cuáles son esos contenidos.

b. Conocimiento del Nivel de Desarrollo Conceptual y Procedimental esperado. Son los niveles de abstracción para un tópico en un determinado momento escolar, es decir, la profundidad con la que debe ser abordado un determinado contenido matemático, en relación con un periodo escolar determinado.

c. Secuenciación de diversos temas. Son los conocimientos y las capacidades previas que se tienen para aprender un nuevo contenido en términos de lo que los estándares marcan que se debe conocer antes de impartir un determinado contenido y lo que aportará éste en temas posteriores.

El análisis del MTSK que posee el futuro profesor permitirá saber dónde se está y hacia dónde se quieren orientar los esfuerzos, de esta manera puede haber cambios importantes en la forma de ver, entender y llevar a cabo la enseñanza, debido a que es necesario pensar e investigar sobre las características de la formación inicial del profesor, la integración del conocimiento que el futuro docente requiere para su labor docente y el conocimiento matemático, es precisamente lo que conforma el conocimiento especializado.

El foco de nuestro trabajo es indagar el conocimiento especializado del futuro profesor de matemáticas cuando usa GeoGebra en sus prácticas docentes.

Metodología

El objetivo en el que se centra este estudio es identificar qué conocimiento respecto a los subdominios del MTSK se evidencia en la práctica de una futura profesora que usa GeoGebra en el aula de matemáticas, es un estudio de caso porque examina una situación única, sin intención de generalizarla, de acuerdo con Cohen, Manion & Morrison (2004), los estudios de caso son ejemplos (instance) específicos que frecuentemente están diseñados para ilustrar un "principio más general" (p. 181) y con ellos pueden investigar situaciones que informan acerca de "las interacciones dinámicas y el desarrollo de eventos, relaciones humanas y otros factores en un ejemplo único" (p. 181), y hacer "declaraciones teóricas […] [que] deben estar respaldadas con evidencia" (p. 182).

El foco de interés gira en torno a los recursos matemáticos y didácticos que varios profesores ponen en juego para enseñar a sus estudiantes la construcción de mediatriz y bisectriz en primer grado de secundaria (SEP, 2011). Analizamos las sesiones en las que la futura profesora usa Geogebra en el laboratorio de cómputo. Para obtener la información la técnica elegida fue la observación no participativa, en ese sentido, Stake (1999) argumenta que el investigador registra lo que acontece a través de la observación con la finalidad de ofrecer una "descripción […] incuestionable" para, posteriormente, analizarla (p. 61, cursivas en el original). Por los argumentos antes mencionados, la observación se realizó mediante video-grabaciones (una cámara dirigida, hacia lo que hizo y dijo el profesor), reforzadas con audio-grabaciones y notas de campo.

El análisis que según Stake (1999) consiste en darle sentido a los datos recopilados, dejando de lado nuestras impresiones, estuvo centrado en las prácticas docentes de una futura profesora de la Licenciatura de Educación Secundaria con Especialidad en Matemáticas que cursaba el séptimo semestre en la Escuela Normal Superior de México (ENSM), fue elegida por su trabajo con el uso de GeoGebra en el aula con un tema de geometría.

El tema que desarrolló la futura docente durante 6 sesiones en dos grupos fue: El trazo y análisis de las propiedades de la mediatriz y la bisectriz en un triángulo, ubicado en el bloque 1 de primer grado de secundaria en el eje forma espacio y medida (SEP, 2011).

Resultados

La finalidad del estudio fue caracterizar y comprender el conocimiento especializado del futuro profesor cuando realizaba sus clases de geometría con el uso de GeoGebra en el nivel básico (secundaria), no se trató de una generalización del conocimiento especializado sino más bien de una profundización en el conocimiento que se mostró al enseñar el trazo y análisis de las propiedades de la mediatriz y la bisectriz en un triángulo.

Los datos se obtuvieron por medio de la observación no participante de clases que fueron videograbadas y para el análisis de los datos se consideró el modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) (Carrillo et al., 2013).

La mayoría de evidencias encontradas en las sesiones de clases observadas corresponden al KoT en algunas categorías, acompañadas de KMT en la categoría ejemplos para la enseñanza y KFLM respecto a fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje.

Después de la transcripción de las sesiones de clase, se extrajeron las unidades de información que nos sirvieron para realizar el análisis del conocimiento sobre la construcción de la mediatriz y la bisectriz en triángulos con el modelo analítico MTSK. En las sesiones únicamente se analizaron las intervenciones de la profesora y de los alumnos en las que existió alguna explicación con el uso de GeoGebra. A continuación describimos el conocimiento del futuro profesor en cada uno de los subdominios.

Conocimiento de los temas (KoT)

Se evidenció en el análisis el conocimiento de los temas (KoT) en las categorías: procedimientos, conocimiento de las propiedades y sus fundamentos atribuibles a un contenido matemático.

El futuro profesor enuncia lo que son las rectas perpendiculares, él indica “son aquellas rectas que se hallan en un mismo plano formando así, cuatro ángulos rectos; en otras palabras las rectas perpendiculares aluden a dos rectas secantes que forman cuatro ángulos congruentes o cuando al cortarse forman ángulos iguales de 90 grados” y define a la mediatriz como “una recta perpendicular que pasa por el punto medio”.

Ejemplo de ello se observa en el siguiente fragmento, extraído de la transcripción de las video grabaciones:

Futuro profesor: A ver, alguien que me apoye a entregar estas hojas de trabajo *[entregando las hojas a un estudiante]*.

Estudiantes: *Yo […]*

Futuro profesor: ¿Qué es la mediatriz? *[señalando a un alumno que levantaba la mano]*.

Estudiante: Es perpendicular.

Futuro profesor: ¿Y pasa por dónde?

Estudiante: Por el punto medio.

Futuro profesor: Por el punto medio … es perpendicular al segmento, pero pasa por el punto medio *[camina hacia el estudiante que respondió y entrega una tarjeta de participación]. […]*

Futuro Profesor: *[toma una escuadra, la apoya en el pizarrón y traza un triángulo]* ¿Cómo trazo las mediatrices de ese triángulo? *[coloca en los vértices del triángulo trazado en el pizarrón las letras ABC]*.

Estudiante: Se abre el compás en BC.

Futuro Profesor: ¿Será la abertura de este tamaño? *[apoya el compás en el vértice B y usa una abertura igual al segmento BC]* ¿Y luego?

Estudiante: Marca un arco como de arriba y como de abajo.

Futuro Profesor: *[traza dos arcos]* ¿Y luego?

Estudiante: Y luego se apoya en C y traza de lado a lado

Futuro Profesor: *[Toma la escuadra y la apoya sobre las intersecciones de los arcos]* Trazo una línea recta.

Estudiantes: Una recta perpendicular que pasa por el punto medio.

Notamos que el futuro docente traza un triángulo y dadas las respuestas de sus estudiantes toma con el compás una distancia BC la cual usa como radio para construir en el pizarrón arcos de circunferencia con centros B y C intersecándose dichos arcos en dos puntos (D y E), concluyendo que la recta DE es una recta perpendicular a $\overline{BC}$, debido a que, forma ángulos de 90 grados, muestra un conocimiento relacionado a la construcción de la mediatriz, además, por las condiciones de la construcción la recta perpendicular pasa por el punto medio de $\overline{BC}$, obteniendo así la mediatriz, considerada por los estudiantes de secundaria como la recta perpendicular que equidista de los extremos de un segmento, esto nos indicó que el futuro profesor conocía el contenido de la sesión que impartió, debido a que consideró la equidistancia de los extremos del segmento (como lugar geométrico). Como se muestra en el siguiente episodio:

Futuro profesor: ¿Qué es la mediatriz?

Estudiante: Yo, yo, es una recta perpendicular que equidista de los extremos de un segmento [*mirando sus apuntes de la clase anterior*]

Futuro profesor: ¿Quién me dice como trazo una mediatriz?

Estudiante: Me apoyo en un punto A y abro mi compás hasta un punto B para trazar arcos.

Las intervenciones en las sesiones de clase son descriptivas, el futuro docente se apoya en hojas de trabajo que entrega a cada uno de sus alumnos con indicaciones que deben ser consideradas para la solución de las actividades, además de ello al inicio de cada clase explica, de forma general, en el pizarrón y considera las respuestas dadas por algunos estudiantes.

El futuro docente durante el desarrollo de su clase define a la bisectriz como "El lugar geométrico de los puntos que equidistan de los dos lados de un ángulo", además indica que al dibujar la bisectriz se divide a un ángulo en dos partes iguales.

El futuro docente concretiza las definiciones. Da una explicación previa de las definiciones antes de entregar la hoja de trabajo. Aparece la construcción de la mediatriz con regla y compás en lápiz-y-papel como la recta perpendicular a un segmento que pasa por su punto medio con la consecuencia de que cualquier punto sobre esa recta equidista de los extremos del segmento correspondiente.

Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)

Para este futuro profesor la enseñanza de un contenido a través del doblado de papel como procedimiento docente facilita en sus estudiantes la visualización de figuras geométricas y la comprensión de conceptos, atrae el interés de los estudiantes y apunta a que asimilen una idea más clara porque genera una justificación de los procesos usados para construir lo solicitado (Figura 2).

Figura 2. Uso de doblado de papel para identificar la mediatriz.

Al analizar las primeras sesiones de clase, encontramos indicios de su conocimiento sobre ejemplos para la enseñanza, muestra de ello lo observamos cuando el futuro profesor menciona: "como este cuadrado se cortó por su diagonal obtenemos dos triángulos con dos lados iguales, cada uno con un ángulo de 90 grados y por lo tanto dos ángulos de 45 grados, por consiguiente es un triángulo rectángulo isósceles" (Figura 3), además, cada ejercicio lo acompaña de preguntas para analizar las propiedades de sus trazos y así llegar a la definición requerida, usa una notación matemática adecuada al nivel de sus estudiantes, lo anterior lo atribuimos a su interés por abordar el contenido de manera visual y con instrucciones para las construcciones.

Figura 3. Uso del doblado de papel como estrategia de enseñanza.

Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM)

El futuro profesor evidencia cierto conocimiento sobre este subdominio en la categoría fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje, específicamente sobre errores y dificultades relacionados con la construcción en el momento en que los alumnos encuentran las bisectrices de un triángulo y usan el punto de intersección como el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo dado (Figura 4). Considera que estos errores pueden ser comunes en los estudiantes y que se equivocan porque no están conscientes de que los lados del triángulo circunscrito deben ser tangentes a la circunferencia solicitada y por lo tanto no se cumplen las condiciones de que sea una figura inscrita o circunscrita (Figura 5).

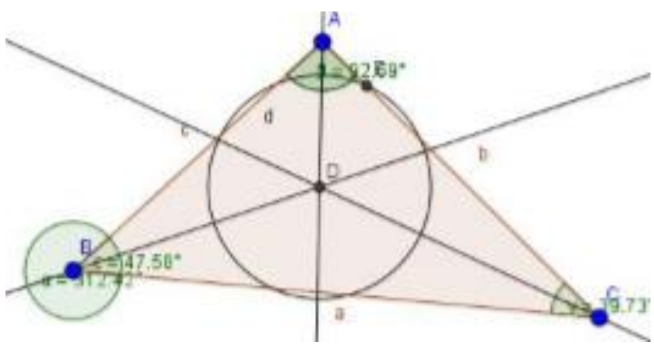

Figura 4. Construcción incorrecta de la circunferencia inscrita.

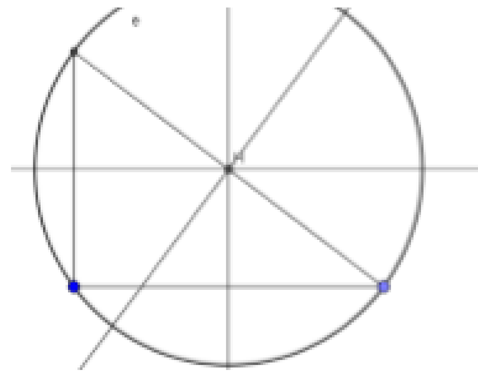

Figura 5. Construcción de la circunferencia circunscrita.

En la elaboración de la planificación el futuro docente utilizó para el diseño de sus actividades las fases del modelo de Van Hiele (1986).

El uso del software GeoGebra permitió al futuro profesor dar movimiento a sus construcciones (a diferencia de lápiz-y-papel) acción que ayudó a los alumnos a observar que las circunferencias de un radio menor a la mitad del segmento dado no se cortaban y no podían trazar la mediatriz. Los alumnos de secundaria pusieron en juego su lenguaje común mientras adquirieron un lenguaje matemático, además, el uso de GeoGebra les permitió realizar la construcción solicitada con todos los elementos revisados en el aula con lápiz-y-papel.

Al finalizar la primera y tercera de estas sesiones los alumnos con la ayuda de Geogebra construyeron las mediatrices y bisectrices de un triángulo, visualizaron las definiciones de las rectas, caracterizaron los puntos notables correspondientes a dichas rectas en el triángulo y dieron las condiciones para trazar la circunferencia inscrita y circunscrita, respectivamente.

En el análisis del MTSK de las distintas sesiones se han detectado indicios de conocimiento de todos los subdominios del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) y del Conocimiento Matemático (MK), a excepción del Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM).

De estos indicadores, los más relacionados con Geogebra corresponden a los subdominios del Conocimiento de los Temas (KoT), Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas

(KMT) y del Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM).

Conclusiones

La necesidad de conocimiento en estos subdominios para el uso de Geogebra parece claro (conocimiento de la propia herramienta como recurso de enseñanza y el aprendizaje ligado a ella, y el conocimiento del contenido ligado a cómo se expresa y trabaja matemáticamente la herramienta).

Las mayores dificultades que encuentra el docente al usar Geogebra en el aula es el conocimiento que posea del software y su potencialidad. El conocimiento de distintas actividades o ejemplos en el que pueda emplear Geogebra podría entenderse como el conocimiento que tenga de distintos ejemplos o actividades en cualquier otro medio que no sea el digital si no tuviera la limitación de poder transformar ese ejemplo al formato digital con el software siendo por ello necesario el conocimiento del uso del mismo relativo a los contenidos estudiados (rectas y puntos notables en un triángulo).

El conocimiento especializado fue detectado al reflexionar, no sobre la construcción en sí, sino sobre la acción del futuro profesor al usar instrumentos geométricos además de usar GeoGebra para ayudar a los alumnos a seguir sus razonamientos. Consideramos que el conocimiento que se mostró fue en relación con las explicaciones acerca de la construcción de la mediatriz como la recta perpendicular a un segmento que pasa por su punto medio, con base en las ideas vertidas por Carrillo et al. (2013) sobre los distintos subdominios, todo el conocimiento que se instrumentó durante las clases fue especializado, por ser propio de su futura profesión.

Observamos que el conocimiento matemático es el que subyace en la base del conocimiento especializado del futuro profesor. La relación que notamos entre el conocimiento de las características del aprendizaje (KFLM) y el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) es tan cercana que la distinción entre los conocimientos que pertenecen a uno y otro subdominios podría parecer complicada o innecesaria, sin embargo, los resultados de este estudio han permitido valorar la potencialidad que tiene realizar esta distinción, en tanto que permite interpretar y comprender más profundamente la naturaleza del conocimiento del futuro docente desde dos perspectivas o formas de conocer el contenido matemático, como contenido a aprender y como un contenido a enseñar. Las conclusiones sobre la caracterización del KMT permitieron profundizar más sobre esta relación.

Consideramos que el contexto de diseño, justificación y discusión de actividades para el aula es un entorno propicio para la exploración del KFLM, puesto que el futuro profesor requiere de utilizar el KFLM para diseñar tareas y anticipar posibles procesos de los resolutores, además de que la discusión con sus tutores, la reflexión entre pares y la necesidad de una comunicación escrita propia del entorno virtual demandan del futuro profesor argumentaciones que justifiquen el diseño y la toma de decisiones sobre éste.

Observamos también que no es indispensable que el futuro profesor centre su atención en los estudiantes como actores principales del proceso de aprendizaje para obtener evidencias de este conocimiento, éstas son también reconocibles en reflexiones sobre la construcción del diseño y las características específicas del contenido a abordar.

Cuando el futuro profesor está consciente de su conocimiento especializado puede adquirir un bagaje de conocimiento sobre estudios científicos y evidencias empíricas que le proporcionen información sobre fortalezas y debilidades asociadas con el aprendizaje, las formas más comunes de interacción con el contenido, así como los intereses y expectativas que existen sobre un contenido, además, por supuesto, de poder reconocer teorías de aprendizaje que le permitan observar distintas formas de comprender un contenido y construir una idea propia acerca del proceso de aprendizaje.

Referencias bibliográficas

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.

Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME* 8, 2985-2994. Middle East Technical Universitiy: Ankara, Turquía.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., Montes, M., Escudero-Ávila, D., y Flores-Medrano, E. (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas*. Universidad de Huelva Publicaciones: Huelva, España.

Carrillo, J., Contreras, L.C. y Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina & I. Segovia, I. (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro,* (pp. 193-200). Granada: Editorial Comares.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2004). *Research methods in education*. USA: RoutledgeFalmer.

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematics Structures. Dordrecht: Reidel.

Klein, F. (1957). Vorlesungen Über Höhere Geometrie. Dritte auflage bearbeitet . New York: Chelsea Publishing company.

Saidón, L.M., Bertúa, J., y Morel, J.O. (2010). Un escenario dinámico de exploración matemática. Unión. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 22, 157-167.

Secretaría de Educación Pública. (2011). *Programas de Estudio 2011*. Guía para el maestro. Matemáticas. México: SEP.

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos* [estudios de caso]. Madrid, España: Morata.

Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight*. Londres: Academic Press.