CB-844

TAREAS DE VARIACIÓN Y ACUMULACIÓN PARA UNA PRIMERA CONCEPTUALIZACIÓN DEL CÁLCULO

Eddie Aparicio Landa – Landy Sosa Moguel
alanda@correo.uady.mx, landy.sosa@gmail.com
Universidad Autónoma de Yucatán, Universidad Autónoma de Guerrero, México

Núcleo temático: Investigación en Educación Matemática
Modalidad: CB
Nivel educativo: Superior
Palabras clave: Cálculo, variación, acumulación, tareas

Resumo

Se presenta un trabajo en el que se tuvo como objetivo, analizar en qué medida se favorece una adecuada articulación entre las ideas de variación y acumulación en la introducción al estudio formal del cálculo escolar en educación superior, ello mediante tareas de interpretación y representación de lo variable en un ambiente contextual y de simulación dinámica computacional. Se asumió como premisa fundamental que la conceptualización de los saberes en cálculo está estrechamente relacionada con el carácter empírico y situacional del conocimiento matemático, sin embargo, en la enseñanza aprendizaje se continúa excluyendo prácticas, actividades, y en general, contextos socioculturales entorno al desarrollo de tales nociones. A partir de los datos recabados del trabajo realizado por diez estudiantes se pudo identificar que ellos fueron capaces de establecer relaciones adecuadas entre algunas formas de variación y formas de acumulación, esto, mediado por la naturaleza icónica-dinámica de la situación variacional planteada, así como de la actividad de representación geométrica.

Presentación

Diversos investigadores (Schwarzenberger, 1980, Tall & Vinner, 1981; Tall 1990, 1993; Eisenberg & Dreyfus, 1991; Thompson, 1994; Artigue 1995; Dreyfus, 1999; Muñoz 2007; Mahir, 2009; Aparicio & Cantoral, 2014) indican que una de las principales problemáticas en la enseñanza aprendizaje del cálculo es la poca o nula conceptualización de éste. Grebe (2013), expone que tradicionalmente las definiciones formales de diferenciación e integración se basan en lo algebraico y que el uso de las interpretaciones geométricas solo es para ayudar a su entendimiento, limitando no solo el acceso a la dimensión conceptual de los saberes, sino también, al desarrollo de un pensamiento variacional, siendo ambos aspectos fundamentales en el aprendizaje y uso adecuado de los conceptos del cálculo.

ISBN 978-84-945722-3-4

Asimismo, curricularmente el cálculo se ha organizado y difundido en dos partes: cálculo diferencial y cálculo integral, induciéndose la idea equívoca de que el cálculo versa sobre los conceptos de derivada e integral, más que en el estudio y establecimiento de relaciones funcionales entre variación y acumulación de lo variable. Ejemplo de ello es cuando escolarmente el Teorema Fundamental del Cálculo es tratado como una técnica de integración y el argumento con el cual se concibe a la integral definida en dos de sus formas más usuales de representación: operación inversa de la derivada y, el método de determinación del área bajo una curva para funciones continuas sobre intervalos cerrados (Cabañas & Cantoral, 2007), reduciéndose la conceptualización de dicho teorema y del cálculo en general.

En nuestra opinión, favorecer la conceptualización del cálculo demanda analizar formas de organizar y socializar escolarmente los saberes más allá de lo exclusivamente matemático, lo estático y lo algorítmico, se requiere tratar con las ideas y relaciones entre variación y acumulación de lo variable para posibilitar la comprensión del cálculo, pues su estudio escolar centrado en lo memorístico, repetitivo y la aplicación de técnicas de derivación e integración algebraica, ha sido poco eficiente para conceptualizar.

Gray & Tall (1994), Cordero (2003), citados en Muñoz (2007), consideran que el estudio de la integral e integración, debiera centrarse en la idea de acumulación, más que en la función derivada o en la suma de Riemann. Thompson & Silverman (2008) refieren que será precisamente en el entendimiento de la acumulación donde, de manera coherente, los estudiantes vean la conexión entre la razón de cambio de cantidades y la acumulación de esas cantidades. Schnepp & Nemirovsky (2001), sugieren que en lugar de aprender cálculo partiendo de la diferenciación hacia la integración, se debe aprender acerca de la diferenciación en relación con la integración, y viceversa. Esto es, cuando los estudiantes discutan la integración, deben reconocer que la acumulación siempre ocurre con una cierta razón de cambio, y que esta razón es el valor de la función siendo integrada. Complementariamente, cuando se discuta la diferenciación se debe reconocer que la razón de cambio es acumulativa y lo que se ha acumulado hasta cierto instante, es el valor de la función siendo diferenciada.

ISBN 978-84-945722-3-4

Es en este contexto que el propósito con este trabajo fue analizar en qué medida, mediante tareas de interpretación y representación de lo variable en un ambiente contextual y de simulación dinámica computacional, se favorece una adecuada articulación entre las ideas de variación y acumulación.

Marco conceptual

Conceptualmente el cálculo es un cuerpo de conocimientos (herramientas matemáticas) útiles para cuantificar los cambios en situaciones o fenómenos de variación continua presentes en la naturaleza, sin embargo, en la escuela se ha ocultado, por un lado, la importancia de la relación variacional para representar y cuantificar cambios. La derivada y la integral mayormente son presentadas como procesos relacionados inversamente. Por otro lado, se excluyen contextos socioculturales que medien el desarrollo de una forma variacional de pensar (Aparicio & Cantoral, 2006).

Radford (2003, p.41) señala que en un proceso de objetivación interviene la creatividad para darse cuenta de algo, en vinculación con los esfuerzos reflexivos y mediadores, orientados a la consecución del objetivo de una actividad. Para él, la naturaleza reflexiva es una relación entre la conciencia individual y una realidad construida culturalmente, mientras que la naturaleza mediadora son los medios que orientan el pensamiento y posibilitan a los individuos tomar conciencia de, y comprensión de la realidad cultural.

Radford & Puig (2007, p. 148) utilizan la idea de " embedment principle" para enlazar los mecanismos cognitivos (percepción, abstracción, simbolización), con las prácticas sociales, los signos y artefactos que ellos median, y con base en ello, dar cuenta del papel que tienen las situaciones culturales en procesos de construcción de significados. Cantoral (2004, p.1), refiere que el desarrollo y el estudio del pensamiento y lenguaje variacional es un medio para entender los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten significados cuando emplean diferentes estructuras y lenguajes variacionales.

Así, en este estudio se reconoce un entramado de lo cognitivo con lo social, asociado a la naturaleza conceptual del cálculo, asumiéndose en consecuencia que la conceptualización de los saberes en cálculo está estrechamente relacionada con el carácter empírico y situacional del conocimiento matemático, en donde lo *situacional* implica una relación tríadica entre un

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

contexto, una *actividad humana* y *lo matemático*. El contexto es lo que posibilita estudiar el pensamiento y la acción de los individuos cuando éstos construyen su conocimiento bajo condiciones y circunstancias socioculturales específicas. La actividad humana es donde el conocimiento matemático adquiere significados propios, una historia e intencionalidad, favoreciéndose versiones diferentes de una misma noción matemática (Cordero, 2005). Finalmente, en lo matemático se inscribe la especificidad de las acciones matemáticas que componen una situación y de las cuales se logra, o es posible abstraer un aprendizaje o conocimiento matemático concreto, es decir, es la expresión socio cognoscente de un conocimiento matemático formalmente instituido o en vías de instituirse.

En la Tabla 1 se representa lo *situacional* del conocimiento matemático desde una perspectiva social de la construcción de dicho conocimiento y como una relación tríadica entre *contexto, actividad humana y lo matemático*, en el campo conceptual del cálculo.

Lo situacional		
Contexto	*Actividad humana*	*Lo matemático*
Situación variacional	Cuantificar lo cambiante	Variación y acumulación como nociones matemáticas

Tabla 1. Lo situacional en el estudio de la construcción social del conocimiento matemático en cálculo

Método

En el estudio participaron diez estudiantes de nuevo ingreso a estudios superiores. Su participación fue voluntaria y sin algún beneficio o prejuicio académico en sus actuales o posteriores cursos. Sus conocimientos matemáticos incluían un curso de cálculo diferencial de variable real. Se conformaron en cinco binas para la realización de tareas relacionadas con la interpretación y representación de lo variable en simulación dinámica computacional. Los recursos disponibles fueron la proyección de dos simulaciones y hojas de trabajo. El tiempo total empleado para concluir las tareas fue de sesenta minutos.

En las dos simulaciones se representaba una situación de variación y acumulación de un líquido en dos recipientes A y B. Fue así por considerar que visualmente es más perceptible el hecho de que el acumulado de una variable tiene consigo una rapidez de acumulación y

ISBN 978-84-945722-3-4

viceversa (toda rapidez de cambio en la variable genera un tipo de acumulado). No obstante, por la importancia de favorecer la naturaleza intrínseca de la relación inversa entre rapidez de cambio y acumulación, las tareas se enmarcaron en dos etapas cognoscitivas: una para favorecer visual y cualitativamente el reconocimiento de un estado en el que dos acumulados distintos ocurren con una rapidez constante empero, con valores distintos (primera simulación), y la otra para reconocer un estado en el que dos acumulados iguales ocurren con una rapidez variable (segunda simulación).

El trabajo de los estudiantes estuvo centrado en analizar, representar y relacionar la variación y acumulación en cada par de recipientes para cada una de las dos simulaciones antes descritas. En la imagen 1 se muestra el tipo de simulación presentada para la primera etapa cognoscitiva, y en la imagen 2, lo presentado para la segunda etapa.

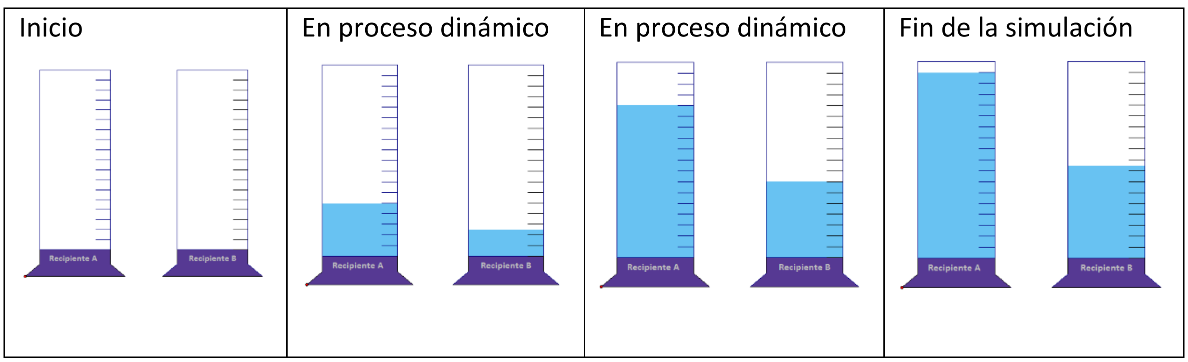


Imagen 1. Primera etapa cognoscitiva. Simulación con dos acumulados de rapidez constante

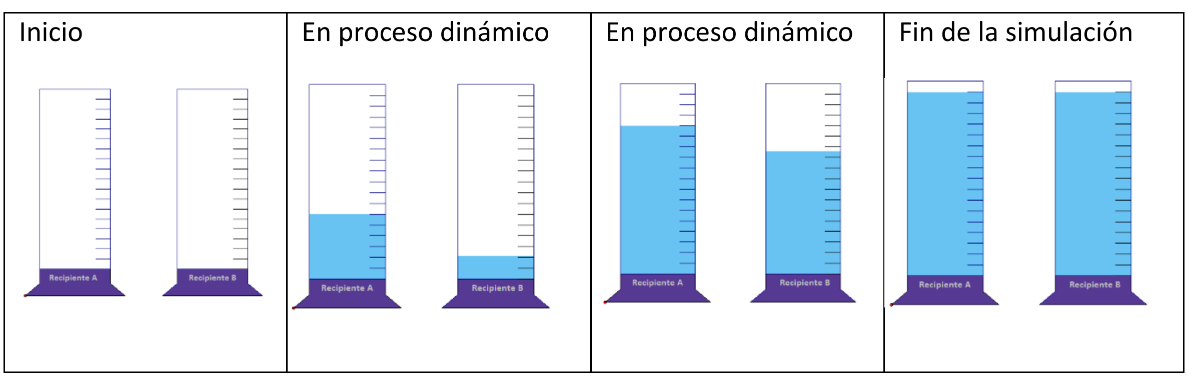


Imagen 2. Segunda etapa cognoscitiva. Simulación de dos acumulados con rapidez variable.

En la Tabla 2 se muestran las tareas planteadas a los estudiantes.

ISBN 978-84-945722-3-4

Instrucción. Observen las simulaciones uno y dos, del llenado de dos recipientes A y B, para realizar las siguientes tareas.

1. Para cada recipiente en las dos simulaciones, bosquejar las gráficas que representen:
   a) la rapidez de llenado;
   b) la acumulación.
2. Supongan que se pueden realizar otras dos simulaciones como la uno y dos:
   a) Para la nueva simulación 1, supóngase que la rapidez de llenado en cada uno de los dos recipientes está dada por las siguientes funciones:

$$f_1(t) = 3 \qquad \text{y} \qquad f_2(t) = 5$$

   Determinar las funciones y sus respectivas gráficas de la cantidad acumulada de líquido para cada recipiente.

   b) Para la nueva simulación 2, supóngase que la rapidez de llenado en cada uno de los dos recipientes está modelada por las siguientes funciones:

$$g_1(t) = 2t \qquad \text{y} \qquad g_2(t) = t^2$$

Tabla 2. Tareas de análisis, representación y relación de variaciones y acumulaciones

Una adecuada conjunción cognoscitiva de las tareas supondría el desarrollo de las nociones de variación y acumulación y su relación inversa.

Datos y resultados

Para la tarea 1 de la primera simulación, los estudiantes fueron capaces de establecer una relación entre la rapidez de llenado y cantidad acumulada (altura alcanzada por el líquido en los recipientes). La rapidez es referida con la expresión "llenado". Por ejemplo, dijeron que ambos recipientes tienen un llenado constante. Algunos asocian una función lineal al comportamiento de llenado en ambos recipientes y establecen que la rapidez en un recipiente (recipiente A) es el doble que la del otro (recipiente B). En general las gráficas dadas son adecuadas, empero con errores (ver anexo).

Para la tarea 1 de la segunda simulación, se reconoce que en uno de los recipientes hay una rapidez constante y lenta (recipiente A), mientras que en el otro (recipiente B), se presenta una rapidez exponencial. Las gráficas dadas en general son adecuadas, empero, también se detectaron errores respecto a la inclinación (valor de las pendientes).

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

En el inciso *a*) de la tarea 2, cuatro binas lograron establecer una relación entre variación y acumulación, bosquejan adecuadamente dicha relación mediante gráficas y reconocen que a variación constante le corresponde una acumulación lineal. Para el inciso b) de la tarea 2, solo dos binas lograron generalizar adecuadamente sus relaciones, dando gráficas adecuadas y el resto, su conceptualización si bien adecuada y sus relaciones también, tuvieron dificultades para generar las gráficas, dado que no había sistema numérico y se trataba de funciones exponenciales en ambos casos.

De los datos recabados se identifica que lo situacional de un proceso de construcción social de conocimiento matemático, favorece que mediante la actividad humana de cualificar y cuantificar lo variable en un contexto específico de interpretación y representación gráfica de lo cambiante, mediado por lo icónico-dinámico computacional, se establezcan relaciones matemáticas funcionales tales como la relación inversa entre variación y acumulación, accediendo así a un primer acercamiento al campo conceptual del cálculo.

No obstante, cabe decir que los errores de graficación detectados en las gráficas de los estudiantes, sugiere dificultades conceptuales para representar gráficamente y en forma adecuada, relaciones variacionales. Lo que refuerza expuesto por Grebe (2013), cuando menciona que el uso de las interpretaciones geométricas en la enseñanza del cálculo, solo es para ayudar al entendimiento de los conceptos de derivada e integral.

Conclusión

Se considera que la relación tríadica de lo situacional en la construcción social de conocimiento matemático, también podría servir como guía para organizar escenarios de aprendizaje matemático en contextos funcionales, ya que cognitivamente posibilita articular nociones matemáticas con elementos contextuales de significación social a partir de una actividad humana matemática específica. Pensamos, por ejemplo, el caso de la modelación gráfica, pues si bien no fue una tarea explícita para los estudiantes, es claro que el significado y uso dado a la gráfica por parte de ellos fue el de un modelo variacional, más que el de organizar o presentar (visualmente), información.

Referencias bibliográficas

ISBN 978-84-945722-3-4

Aparicio, E. & Cantoral, R. (2006). Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9*(1), 7 – 30.

Aparicio, E. & Cantoral, R. (2014). The Social Construction of Mathematical Continuity: A Socioepistemological. *Baskent University Journal of Education 1*(1), 123 – 135.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, y P. Gómez (Eds). Ingeniería didáctica en educación matemática, capítulo 6, pp. 97 – 140. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cabañas, G. & Cantoral, R. (2007). La conservación en el estudio del área. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano, capítulo 11, pp. 199 – 226. España: Ediciones Díaz de Santos, Clame AC.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17*(1), 1 – 9.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una Socioepistemología de la integral. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8(3), 265 – 292.

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. Educational studies in mathematics 38 (1-3), 85 – 109.

Eisenberg, T. & Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in Mathematics. En W. Zimmerman & S. Cunningham (Eds.), Visualization in teaching and learning mathematics, pp. 25–37. Washington, DC, USA: The Mathematical Association of America.

Grebe, A.V. (2013). A geometric approach to calculus. Intenational Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44(5), 721 – 732.

Mahir, N. (2009). Conceptual and procedural performance of undergraduate students in integration. Intenational Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 40(2), 201 – 211.

Muñoz, G. (2007). Rediseño del cálculo integral escolar fundamentado en la predicción. En C. Dolores, G. Martínez, R. M. Farfán, C. Carrillo, I. López y C. Navarro (Eds.). Matemática Educativa. Algunos aspectos de la Socioepistemología y la visualización en el aula. pp. 27-76. Madrid, España: Ediciones Díaz de Santos.

Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the sprouting of signs: A semiotic – cultural approach to students' type s of generalization. Mathemtical thinking and Learning, 5(1), 37 – 70.

Radford, L. & Puig, L. (2007). Syntax and meaning as Sensuous, Visual, Historical forms of Algebraic Thinking. Educational Studies in Mathematics, 66(2), 145 – 164.

Schnepp, M., & Nemirovsky, R. (2001). Constructing a foundation for the fundamental theorem of calculus. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), The roles of representation in school mathematics, yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp. 90–102. Reston, VA: NCTM.

Schwarzenberger, R. (1980). Why Calculus Cannot Be Made Easy. The Mathematical Gazette, 64(429), 158 – 166.

Tall, D. (1993). Students' Difficulties in Calculus. Proceedings of Working Group 3, ICME-7, Quebec, Canada, pp. 13 - 28. Recuperado de:

ISBN 978-84-945722-3-4

https://pdfs.semanticscholar.org/0a98/a317d021c28987f24f1189a9f994ee7be97c.pdf el 15 de marzo de 2016.

Tall, D., Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics 12, 151-169.

Thompson, P. W. (1994b). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. Educational Studies in Mathematics, 26, 229 –274.

Thompson, P. W., & Silverman, J. (2008). The concept of accumulation in calculus. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics, MAA Notes, Vol. 73, pp. 43–52. Washington, DC: Mathematical Association of America.

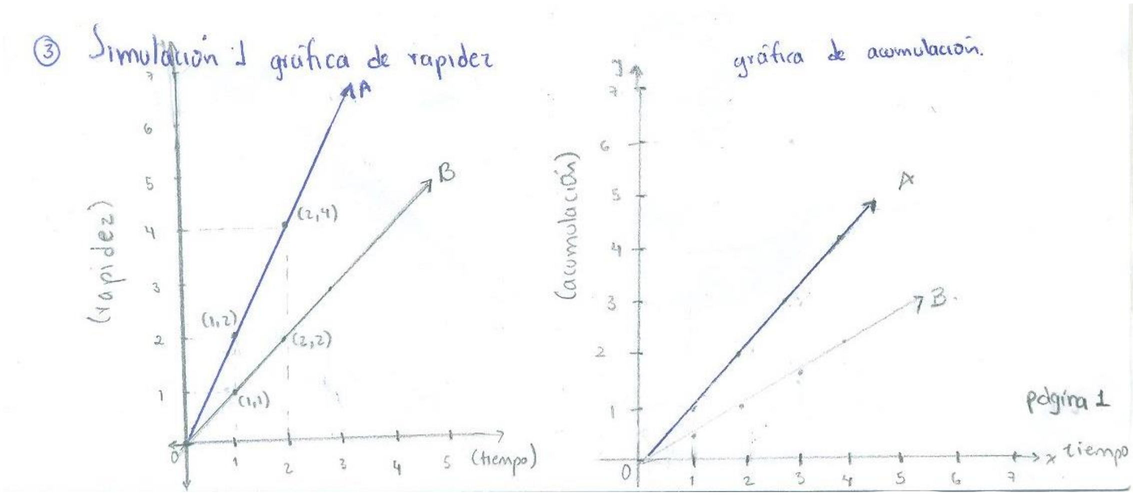
TAREAS DE VARIACIÓN Y ACUMULACIÓN PARA UNA PRIMERA CONCEPTUALIZACIÓN DEL CÁLCULO

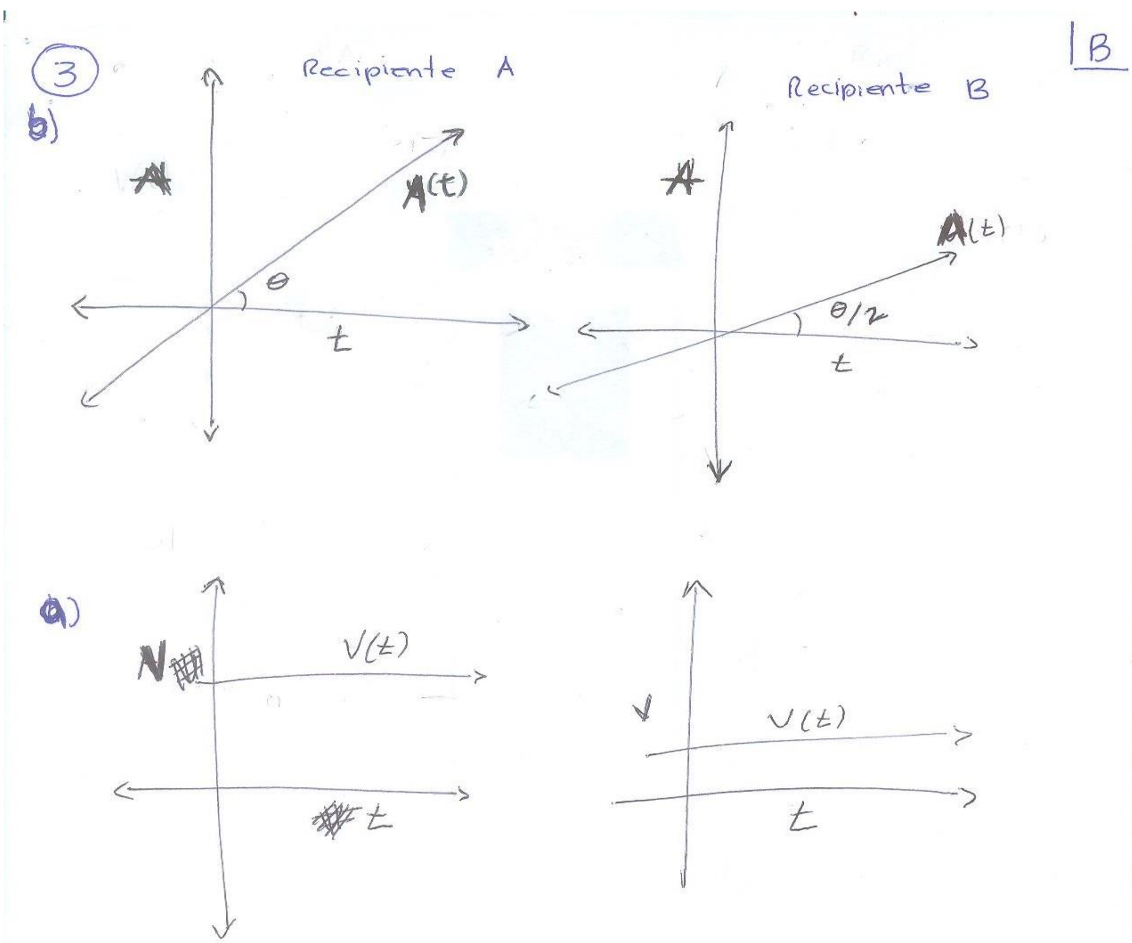
ANEXO

Relación de gráficas realizadas por estudiantes en las tareas

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

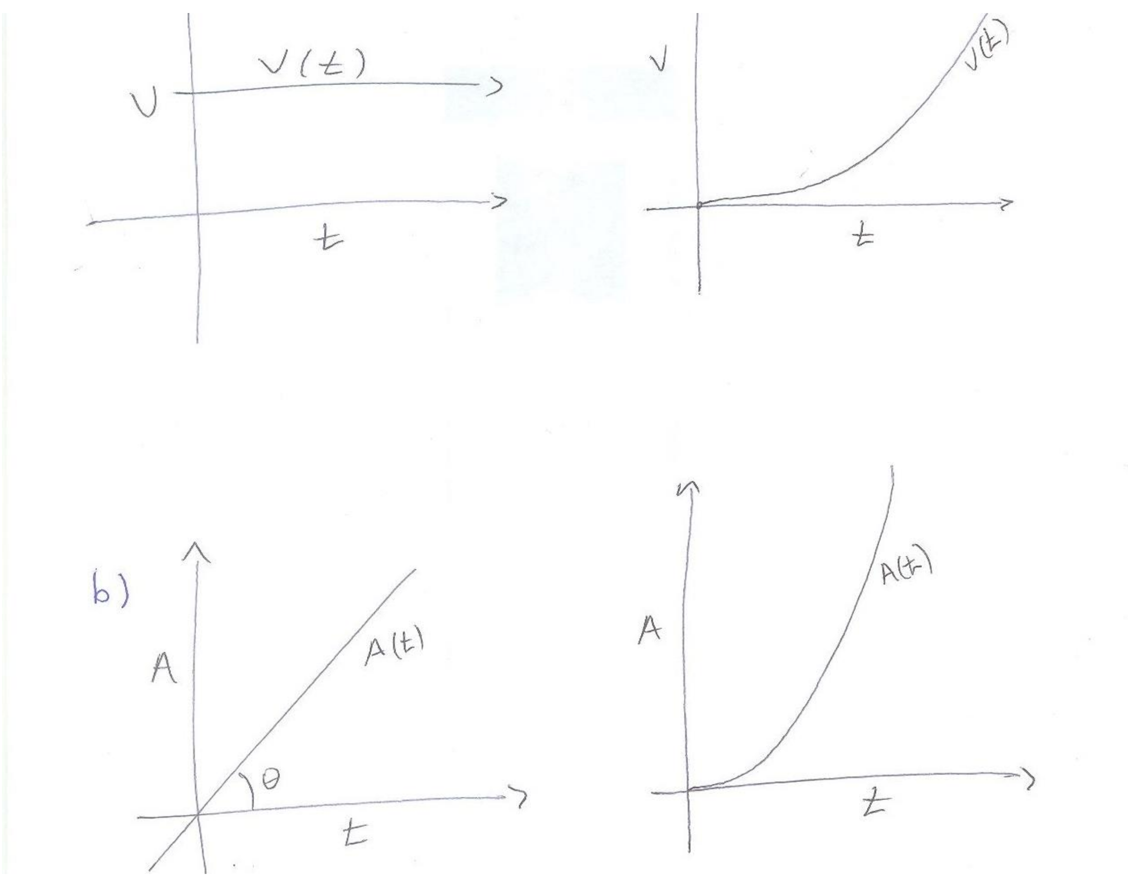
Tarea 1, Simulación 1.





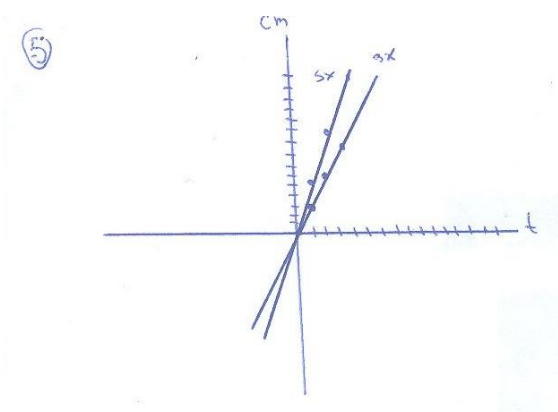
ISBN 978-84-945722-3-4

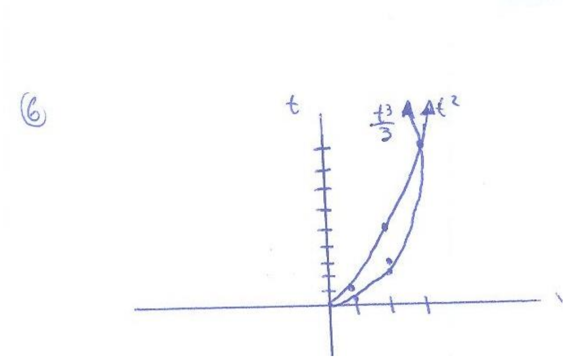
Tarea 1, Simulación 2.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Tarea 2, Inciso a)





VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4