

LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE SUCESIÓN NUMÉRICA EN ESTUDIANTES DE ENSEÑANZA SECUNDARIA OBLIGATORIA

José Mariano Bajo Benito-José María Gavilán Izquierdo-Gloria Sánchez-Matamoros García.

jbajo@us.es – gavilan@us.es-gsanchez@us.es

Colegio San José SS.CC. Universidad de Sevilla. España

Núcleo temático: Investigación en Educación Matemática.

Modalidad: CB.

Nivel educativo: Medio o secundario (12 a 15 años).

Palabras clave: Sucesiones numéricas, Enseñanza Secundaria, Esquemas, Progresiones, Modos de representación.

Resumen

La comprensión del concepto de sucesión numérica presenta dificultades para los estudiantes de Enseñanza Secundaria Obligatoria (E.S.O.) (14-16 años). Este hecho unido a que este concepto es la base de otros conceptos matemáticos como límites, derivadas, integrales justifica su relevancia y por tanto nuestro estudio para caracterizar la comprensión del concepto de sucesión numérica en E.S.O.

Las aportaciones de Piaget y García en relación al desarrollo de un esquema a través de los niveles intra, inter y trans, nos proporciona información sobre la comprensión del concepto de sucesión numérica a través del uso que los estudiantes hacen de los modos de representación, los elementos matemáticos y las relaciones que se establecen entre ellos en la resolución de tareas matemáticas.

Nuestra metodología es cualitativa usando como datos dos cuestionarios de distinta naturaleza. A partir del análisis conjunto de los dos cuestionarios contestado por cada estudiante, nos permitió inferir el nivel de comprensión del esquema del concepto de sucesión como lista numérica a partir de la caracterización de los niveles. Los resultados nos han permitido identificar algunos indicadores de comprensión del concepto de sucesión numérica, como son el uso de las progresiones y el uso de los modos de representación.

Introducción

Investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje del cálculo infinitesimal en estudiantes de enseñanza secundaria obligatoria, muestran la dificultad en la comprensión de estos conceptos. Estas dificultades pueden provenir, como resalta Artigue (1995), del uso mecánico de algoritmos, sin hacer hincapié en la comprensión conceptual.

La relevancia del estudio de las sucesiones se pone de manifiesto en diferentes trabajos, así una buena comprensión del concepto de sucesión es fundamental para la comprensión del concepto de límite (Mamona-Downs, 2001; Roh, 2008), y para la comprensión de la sucesión de sumas parciales, en relación a las series numéricas (Codes y González-Martín, 2017).

Por otro lado en relación con los modos de representación, diferentes investigaciones (Cañadas, 2007; González, Medina, Vilanova y Astiz, 2011; Przenioslo, 2006), muestran que para la comprensión del concepto de sucesión numérica, es fundamental establecer relaciones entre las distintas representaciones de dicho concepto, y en particular la necesidad de profundizar en las relaciones entre los modos algebraico y numérico.

Esta comunicación forma parte de un trabajo de investigación más extenso, sobre la caracterización de la comprensión del concepto de las sucesiones numéricas. En esta investigación mostramos el uso de dos indicadores para caracterizar algunos aspectos de la comprensión del concepto de sucesión numérica. El primero, relativo a la relación entre los conceptos sucesión numérica y progresión. El segundo, relativo a los modos de representación.

Marco Teórico

Para caracterizar la comprensión del concepto de sucesión numérica, hemos adoptado como marco teórico la teoría APOS (Arnón et al, 2014) sobre el desarrollo de un esquema. En dicho marco se define un esquema “*como la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente y que pueden ser empleados en la solución de una situación problemática*” (Trigueros, 2005, p. 11).

Un esquema es una herramienta para comprender como se estructura el conocimiento y su desarrollo (Arnón et al, 2014). En relación al desarrollo de un esquema, la teoría APOS, basándose en las aportaciones de Piaget y García (1983) considera que, se desarrolla pasando por tres niveles: intra, inter y trans.

Los niveles se caracterizan a través del uso que los estudiantes hacen de los modos de representación (numérico, algebraico y gráfico), los elementos matemáticos y las relaciones que se establecen entre ellos en la resolución de tareas matemáticas:

Intra: uso de elementos matemáticos de forma aislada en algún modo de representación, sin establecer relaciones. Un individuo en el nivel intra del desarrollo de un esquema se centra en acciones, procesos y objetos individuales sin relacionarlos.

Inter: uso de elementos matemáticos de forma correcta en algunos modos de representación y establecimiento de relaciones en el mismo modo de representación. Este nivel está

caracterizado por la construcción de relaciones y transformaciones entre los procesos y los objetos que constituyen el esquema.

Trans: uso de elementos matemáticos de forma correcta en todos los modos de representación y establecimiento de relaciones entre elementos matemáticos. Los estudiantes en este nivel han construido el objeto cognitivo y son conscientes de las relaciones que se establecen entre diferentes modos de representación llegando a la síntesis de los modos de representación. La estructura coherente subyacente de su esquema le ayudará a utilizar este esquema en nuevas situaciones.

En este trabajo nos centramos en caracterizar algunos indicadores de los niveles de comprensión del concepto de sucesión numérica, en particular, los modos de representación, y el papel que desempeña el concepto de progresión (aritmética o geométrica).

Metodología

En este apartado describiremos los participantes y contexto, instrumentos de recogida de datos y procedimiento de análisis de nuestro trabajo.

Participantes y contexto

Los participantes en esta investigación son 105 estudiantes de 2º ciclo de Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO), (14-16 años), de un instituto de la ciudad de Sevilla: A estos estudiantes se les había introducido el concepto de sucesión numérica, estrategias para buscar regularidades numéricas en sucesiones de números enteros y fraccionarios, y progresiones aritméticas y geométricas como casos particulares de sucesiones (BOE, 5 del 5 de enero de 2007, p. 756) y (BOJA, 2007).

Instrumentos de recogida de datos

Como instrumentos de recogida de datos, usamos dos cuestionarios. Un primer cuestionario con cuatro tareas, y un segundo cuestionario diseñado para cada estudiante, a partir de las respuestas dadas al primer cuestionario, para profundizar en aquellas respuestas que no habían sido explicadas.

Las tareas fueron diseñadas, a partir de la revisión de la literatura, considerando los elementos matemáticos que constituyen el concepto de sucesión numérica y las relaciones que se podían establecer entre ellos.

En esta comunicación, nos vamos a centrar en la tarea 1 (figura 1), en las que se pone de manifiesto diferentes características de la comprensión en estudiantes de secundaria, a través del uso que hacen de los modos de representación, y del concepto de progresión.

TAREA 1

Dadas las siguientes expresiones algebraicas, identifica cuales de ellas son sucesiones numéricas, justificando cada respuesta:

a) $a(n) = \frac{1}{5-n}$ b) $a(n) = \frac{1}{n^2+1}$ c) $a(n) = \sqrt{1-n}$

d) $a(n) = 3n-2$ e) $a_1 = 1, a_2 = 3$ f) 16, 8, 4, 2, 1, ...

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Figura 1: tarea 1 del primer cuestionario.

La tarea 1 es similar a una tarea de Przenioslo (2006), adaptada para nuestro trabajo, donde hemos suprimido algunas representaciones por no ser relevantes para nuestra investigación. A continuación mostramos los elementos matemáticos necesarios para la resolución de la tarea 1 (figura 2), estos elementos matemáticos pueden estar representados en los diferentes modos de representación. Por tanto, la resolución de una misma tarea por parte de distintos estudiantes, puede poner de manifiesto el uso de los mismos elementos matemáticos en distintos modos de representación.

ELEMENTOS DE SUCESIONES.

E1 Sucesión (como lista): secuencia de números Reales dispuestos en un orden, es decir, Para todo número natural n existe un número real.

E2 Términos: se definen como los integrantes de la sucesión, el lugar que ocupa lo determina su posición que se denota por un subíndice que pertenece a los números naturales.

E3 Término general: se define como el término que dependiendo de su posición, es decir, subíndice sabemos su valor, y se denota por " a_n " (con n perteneciente a los naturales)

E4 Progresión aritmética: sucesión donde cada término se obtiene del anterior sumándole una cantidad fija que denominamos diferencia.

E5 Progresión Geométrica: sucesión donde cada término se obtiene del anterior multiplicándole una cantidad fija que denominamos razón.

E6 Sucesión Recurrente: una sucesión es recurrente si hay definida sobre ella una ley de recurrencia, es decir, una relación entre un término y los anteriores.

Figura 2: elementos matemáticos de la tarea 1.

Procedimiento de análisis

Para el procedimiento de análisis se consideraron las respuestas de los estudiantes a los dos cuestionarios de forma conjunta. Esto permitió inferir el nivel de comprensión del esquema del concepto de sucesión como lista numérica puesta de manifiesto por cada uno de ellos a partir de la caracterización de los niveles intra, inter y trans.

El procedimiento para analizar los datos se realizó en dos etapas adaptando el esquema de análisis de Sánchez-Matamoros (2004). En la primera etapa, para cada uno de los estudiantes se analizó independientemente cada una de las tareas, obteniéndose una caracterización de la comprensión del concepto de sucesión para cada una de ellas. Y en la segunda etapa, a partir de los resultados obtenidos en la primera, se analizaron de forma conjunta la resolución de todas las tareas por un mismo estudiante. Esto nos permitirá obtener una caracterización de la comprensión del concepto de sucesión numérica movilizadas por los cuestionarios.

Resultados

En esta sección de resultados mostramos dos indicadores de la comprensión del concepto de sucesión numérica, el uso de las progresiones y el uso de los modos de representación.

A continuación vamos a mostrar como el uso que hacen los estudiantes de los elementos matemáticos referidos a las progresiones, y las traslaciones entre los distintos modos de representación, puestos de manifiesto en la resolución de la tarea 1, permiten diferenciar niveles de comprensión del concepto de sucesión numérica.

Uso correcto de los modos de representación y de las progresiones

A continuación mostramos el análisis de las respuestas de un estudiante que hace uso correcto de ambos indicadores.

Mediante la respuesta del estudiante 3b14 al resolver el apartado b) de la tarea 1 del primer cuestionario, podemos comprobar que hace una traslación del modo de representación algebraico al numérico (figura 3) de forma correcta: ya que a través de la expresión algebraica de la sucesión dada en el apartado b), calcula los ocho primeros términos. Además, a través de la respuesta dada en el segundo cuestionario, se pone de manifiesto que este estudiante hace uso correcto de la relación entre progresiones y sucesiones:

Pregunta: Explica la diferencia entre sucesión y progresión

3b14: Una progresión es una secuencia de números en el que para hallar sus términos hay que sumar o multiplicar, en cambio una sucesión sigue una regla por la que se averiguan sus términos.

$a_2 = \frac{1}{2^2+1} = \frac{1}{5} = 0.2$ $a_8 = \frac{1}{3^2+1} = \frac{1}{10} = 0.1$
 $a_4 = \frac{1}{4^2+1} = \frac{1}{17} \approx 0.05$ $a_5 = \frac{1}{5^2+1} = \frac{1}{26} \approx 0.03$
 $a_6 = \frac{1}{6^2+1} = \frac{1}{37} \approx 0.02$ $a_7 = \frac{1}{7^2+1} = \frac{1}{50} = 0.02$
 $a_8 = \frac{1}{8^2+1} = \frac{1}{65} \approx 0.01$

b) Si es una sucesión.

Figura 3: respuesta del estudiante 3b14 al apartado b) de la tarea 1.

De las respuestas se puede inferir que este estudiante considera las progresiones como un caso particular de sucesiones, hecho que confirmamos en el apartado f) al responder de forma afirmativa que es sucesión por ser una progresión (figura 4)

$\left. \begin{array}{l} a_1 = 16 \\ a_2 = 8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_2 = a_1 \cdot r \\ 8 = 16 \cdot r \\ r = \frac{8}{16} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{array}$

f) Si es una progresión porque se van sucediendo los números consecutivamente es una P.G y la razón es $\frac{1}{2}$.

Figura 4: respuesta del estudiante 3b14 al apartado f) de la tarea 1.

Además, en el apartado f) el estudiante 3b14 hace uso de la traslación del modo numérico al algebraico, traslación recíproca del apartado b).

A partir del análisis realizado, se infiere que el estudiante 3b14 hace uso correcto de las traslaciones entre los modos numérico y algebraico. Y además hace uso correcto de las relaciones entre sucesiones y progresiones, viendo las progresiones como un caso particular de sucesión.

Uso correcto de los modos de representación e incorrecto de las progresiones

A continuación mostramos el análisis de las respuestas de un estudiante que hace uso correcto de los modos de representación e incorrecto de la relación entre las progresiones y sucesiones.

En las respuestas del estudiante 3b2 al resolver los apartados de la tarea 1, comprobamos que hace uso correcto de las traslaciones del modo de representación algebraico al numérico (figura 5) de forma correcta: ya que a partir de las expresiones algebraicas y de recurrencia obtiene los primeros términos de cada expresión.

RESOLUCIÓN DE LA TAREA (JUSTIFICANDO CADA PASO)

a) $a_1 = \frac{1}{5-1} = 0,25$ $a_2 = \frac{1}{5-2} = 0,3$ $a_3 = \frac{1}{5-3} = 0,5$
 $a_4 = \frac{1}{5-4} = 1$ $a_5 = \frac{1}{5-5}$

b) $a_1 = \frac{1}{1^2+1} = 0,5$ $a_2 = \frac{1}{2^2+1} = 0,2$ $a_3 = \frac{1}{3^2+1} = 0,1$

c) $\sqrt{1-1} = 0$ $a_2 = \sqrt{1-2} = \text{sin solución}$

d) $a_1 = 3 \cdot 1 - 2 = 1$ $a_2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$ $a_3 = 3 \cdot 3 - 2 = 7$

e) $a_3 = a_{3-1} + a_{3-2}$ $a_4 = a_{4-1} + a_{4-2}$
 $a_2 = a_2 + a_1$ $a_4 = a_3 + a_2$
 $a_3 = 4$ $a_4 = 7$

Figura 5: respuesta del estudiante 3b2 a la tarea 1.

Sin embargo, a pesar de obtener los primeros términos, no responde de forma correcta cuando tiene que identificar las sucesiones que no son progresiones, es decir, no hace un uso correcto de las relaciones entre sucesiones y progresiones.

Para este estudiante las progresiones son los únicos tipos de sucesiones, como podemos comprobar en la respuesta dada al primer cuestionario:

3b2: No es una sucesión ya que la razón de la progresión o la diferencia según sea una PA (progresión aritmética) o una PG (progresión geométrica) no es la misma ya que cambia al hallar el siguiente término.

Para profundizar en esta respuesta del primer cuestionario, en el segundo cuestionario le pedimos que nos aclarase qué quería decir al mencionar la razón o diferencia:

Pregunta: ¿Qué significa que no encuentras la razón o la diferencia en el apartado b)?

3b2: Como del primero al segundo la diferencia es 0,3 y del segundo al tercero es 0,1, la diferencia cambia por lo que no hay ninguna razón o diferencia que cumpla esa progresión.

A partir del análisis realizado, se infiere que el estudiante 3b2 hace uso correcto de la traslación del modo algebraico al numérico. Sin embargo no hace uso correcto de las relaciones entre sucesiones y progresiones, identificando las progresiones con las sucesiones.

Por lo tanto, el solo hecho de usar de forma correcta las traslaciones, en los distintos apartados, del modo algebraico al numérico, no le da la consistencia necesaria para responder de forma correcta a los apartados donde no son progresiones, debido al uso incorrecto de las relaciones entre progresiones y sucesiones.

Conclusiones

A partir de los análisis de esta tarea, hemos obtenido que el uso correcto de ambos indicadores (el primero, relativo a la relación entre los conceptos sucesión numérica y progresión y el segundo, relativo a los modos de representación), permiten diferenciar distintos niveles de comprensión del concepto de sucesión numérica.

A través de esta investigación, podemos dar algunas respuestas a los investigadores que demandan una mayor comprensión del concepto de sucesión numérica, como Mamona-Downs (2001) y Roh (2008), mostrándole unos indicadores para inferir el grado de comprensión del concepto y proporcionando una herramienta para profundizar en las relaciones entre los distintos modos de representación, como nos argumentaba González, Medina, Vilanova y Astiz (2011).

Mediante estos indicadores podemos empezar a considerar para futuras investigaciones subniveles dentro de los niveles (INTRA, INTER o TRANS) considerados por Piaget y García (1983) donde consideraban que cada fase o nivel implican a su vez algunos subniveles siguiendo el mismo orden de progresión.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos, en Gómez, P. (ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, pp. 97-140. Méjico DC: Grupo editorial Iberoamérica.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Berlin, Alemania: Springer.

Boletín Oficial del Estado (2007). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. (BOE nº 5, pp. 677-773). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Boletín Oficial de la Junta de Andalucía (2007). ORDEN de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía. (BOJA nº 171, pp. 23-65). Sevilla: Consejería de Educación.

Cañadas, M. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas*. Granada.

Codes Valcarce, M., González-Martín, A. S. (2017) .Sucesión de sumas parciales como proceso iterativo infinito: un paso hacia la comprensión de las series numéricas desde el modelo APOS. *Enseñanza de las Ciencias*, 35(1),89-110.

Gonzalez, J., Medina, P., Vilanova, S., y Astiz, M. (2011). Un aporte para trabajar sucesiones numéricas con Geogebra. *Revista de Educación Matemática*, 26, 1-19.

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal: A didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 259–288.

Piaget, J. y García R. (1983), *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México, Siglo XXI Editores.

Przenioslo, M. (2006). Conceptions of a sequence formed in secondary schools. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37(7), 805–823.

Roh, K.H. (2008). Students' Images and their Understanding of Definitions of the Limit of a Sequence. *Educational Studies in Mathematics*, 69, pp. 217-233.

Sánchez-Matamoros, G. (2004). *Análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de universidad sobre la noción matemática de derivada (desarrollo del concepto)*. Sevilla.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, 17(1), 5-31.