ANÁLISIS COGNITIVO

M. J. González, P. Gómez, J. L. Lupiáñez

INTRODUCCIÓN

Una vez realizado el análisis de contenido, en el que el foco de atención es el *tema matemático* que se va a enseñar, pasamos a realizar otro análisis en el que el foco de atención es *el aprendizaje del estudiante*. Se trata de hacer una descripción de las expectativas del profesor sobre lo que se espera que el alumno aprenda sobre el contenido matemático en cuestión y sobre el modo en que el alumno va a desarrollar ese aprendizaje.

Esta es una problemática muy compleja que puede enfocarse desde muchos puntos de vista. Aquí haremos una aproximación concreta que pretende dar respuesta a las siguientes cuestiones:

1. establecer las expectativas de aprendizaje que se desean desarrollar en el tema matemático: determinar a qué *competencias* se quiere contribuir, seleccionar los *objetivos de aprendizaje* que se pretenden desarrollar e identificar qué *capacidades* de los estudiantes se ponen en juego,
2. determinar las limitaciones al aprendizaje que surgen en el tema matemático: qué *dificultades* y *errores* van a surgir en el proceso de aprendizaje,
3. expresar hipótesis sobre cómo se puede desarrollar el aprendizaje al abordar tareas matemáticas: especificar, mediante *caminos de aprendizaje*, conjeturas sobre el proceso que seguirán los alumnos al resolver tareas matemáticas.

Pasamos a describir en las secciones 1, 2 y 3 siguientes los organizadores del currículo que vertebran el análisis cognitivo y que acabamos de mencionar: expectativas de aprendizaje (competencias, objetivos y capacidades), errores y dificultades, y caminos de aprendizaje. En dicha descripción establecemos relaciones entre las expectativas de aprendizaje que nosotros utilizamos y las que aparecen en los documentos institucionales colombianos (MEN, 1998b y MEN, 2006). En la sección 4 indicamos un proceso para realizar el análisis cognitivo de un tema de matemáticas escolares. Este proceso se implementará mediante las actividades del módulo.

Universidad de los Andes Centro de Investigación y Formación en Educación - Cife · ugr Universidad de Granada · Grupo FQM-193 PAIDI • Junta de Andalucía · Fundación Carolina · Compartir · fsm · CUNDINAMARCA corazón de Colombia · ICETEX

1. Expectativas de Aprendizaje: Competencias, Objetivos, Capacidades

Las *competencias*, los *objetivos* y las *capacidades* expresan tres niveles distintos de concreción de las expectativas del profesor sobre el aprendizaje del estudiante.

Es importante aclarar, antes de nada, que en cada documento curricular y en cada contexto pueden variar notablemente los significados que se atribuyen a estos términos o pueden usarse otros términos equivalentes. Pero lo importante, y es uno de los propósitos de este módulo, es distinguir tres niveles de expectativas de aprendizaje que, por sencillez, identificaremos con el nombre antes referido, aunque con la clara la intención de que cada profesor pueda llegar a "traducir" estos nombres al lenguaje que se use en su contexto.

A continuación, trataremos de caracterizar estos tres niveles de expectativas y haremos referencia a los correspondientes términos que hemos identificado en los documentos institucionales colombianos (MEN, 1998a; MEN, 1998b; MEN, 2006).

1.1. Competencias y Procesos Generales

Una competencia es una meta a alcanzar tras un proceso de largo recorrido, por ejemplo, al término de la etapa educativa obligatoria o al finalizar la formación universitaria. Las *competencias* suelen referirse a *procesos generales* que se desarrollan a partir de los distintos contenidos del currículo, de forma transversal a todos ellos. En los documentos educativos recientes que nos son más familiares (OCDE, 2004; MEN, 2006; Ministerio de Educación y Ciencia, 2007) encontramos referentes a una idea general de competencia que se concreta en un listado de competencias básicas —también llamadas generales—, una de las cuales es la competencia matemática.

El documento de Estándares (MEN, 2006, p. 12) caracteriza la idea de competencia general como:

> *La noción de competencia… es entendida como saber hacer en situaciones concretas que requieren la aplicación creativa, flexible y responsable de conocimientos, habilidades y actitudes… las competencias son transversales a las áreas del currículo y del conocimiento. Aunque generalmente se desarrollan a través del trabajo concreto en una o más áreas, se espera que sean transferidas a distintos ámbitos de la vida académica, social o laboral.*

Más adelante, en la sección dedicada a la competencia matemática, reelabora de nuevo la idea de competencia general:

> *como conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socio afectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores. Esta noción supera la más usual y restringida que describe la competencia como saber hacer en contexto en tareas y situaciones distintas de aquellas a las cuales se aprendió a responder en el aula de clase.* (p. 49)

Después, omite la caracterización de la competencia matemática en sí, pero pasa a describir lo que significa *ser matemáticamente competente*, y lo hace mediante referencias a los procesos generales de la actividad matemática descritos en los Lineamientos (MEN, 1998b, p**):

> *Formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas.*
>
> *Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; para utilizar y transformar dichas representaciones y, con ellas, formular y sustentar puntos de vista.*
>
> *Usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración.*
>
> *Dominar procedimientos y algoritmos matemáticos y conocer cómo, cuándo y porqué usarlos de manera flexible y eficaz.*

El documento de Estándares indica explícitamente (pp. 50-51) que estos cuatro enunciados son equivalentes a los procesos generales[1] de los Lineamientos (MEN, 1998b). Por ello, nosotros también los consideraremos equivalentes, y en este documento haremos referencia a estos cuatro enunciados refiriéndonos a ellos como *procesos generales*.

La idea de competencia matemática se reinterpreta de muy diversas formas en los distintos documentos que estamos manejando. Incluso pueden aparecer distintos enfoques dentro de un mismo marco de referencia. Por ejemplo, Rico (2005, p. 14) ha identificado distintos usos de este término en el Proyecto PISA:

> *La noción de competencia es central en el estudio PISA y desempeña diferentes funciones:*
>
> *• Expresa una finalidad prioritaria en la enseñanza de las matemáticas.*
>
> *• Expresa un conjunto de procesos cognitivos que caracterizan un esquema pragmático de entender el hacer matemáticas.*
>
> *• Concreta variables de tarea para los ítems en la evaluación; destaca por los grados de complejidad.*
>
> *• Marca niveles de dominio al movilizar las capacidades para resolver tareas matemáticas.*

En dicho Proyecto PISA, el listado de competencias matemáticas que se propone es el siguiente (OCDE, 2004, p. 40):

- ♦ Pensar y razonar
- ♦ Argumentar
- ♦ Comunicar
- ♦ Modelar
- ♦ Plantear y resolver problemas
- ♦ Representar

[1] Procesos generales en los Lineamientos: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar; y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos.

- Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones
- Usar herramientas y recursos

Estos enunciados nos recuerdan a los *procesos generales* tratados antes. Por ello, en este módulo, consideraremos que el nivel de expectativas de aprendizaje que captan las competencias matemáticas PISA es equivalente al que describen los procesos generales de los documentos colombianos.

El nivel de planificación para el aula que realiza el profesor sobre un contenido matemático necesita una elevada concreción que parece alejada de la idea de competencia, trasversal y de largo alcance. Pero es imprescindible que, a la hora de realizar esta planificación para el aula, el profesor tenga en cuenta la contribución de dicha planificación a las competencias establecidas para la etapa. En este sentido, hay que tener en cuenta las competencias en todos los sentidos, desde la selección de tareas a la evaluación, pasando por la metodología. Más adelante se concretará esta idea.

Además, vamos a introducir otros dos niveles de expectativas que sí están vinculados a los contenidos disciplinares y, por tanto, nos permiten reflexionar más de cerca sobre la planificación diaria. Continuamos, por tanto, describiendo dichos niveles y más adelante retomaremos la relación entre ellos y las competencias.

1.2. Objetivos de aprendizaje

Caracterizamos un objetivo por:

- Estar vinculado a un nivel educativo concreto.
- Estar asociado a un contenido matemático concreto.
- Expresar una expectativa de aprendizaje que no puede reducirse a la realización de un procedimiento matemático rutinario, sino que tiene que involucrar conexiones entre los conceptos y procedimientos involucrados en la estructura matemática, los sistemas de representación en que se representa y los fenómenos que organiza.

Por ejemplo, dos objetivos correspondientes a una unidad didáctica sobre el tema Función Cuadrática para un nivel de 16 años podrían ser:

1. Reconocer y usar el significado gráfico de los parámetros en las formas simbólicas de la función cuadrática y comunicar y justificar el resultado de su uso.

2. Interpretar fenómenos de movimiento rectilíneo acelerado mediante la función cuadrática.

Estos objetivos hacen referencia a las relaciones que se dan entre los distintos sistemas de representación de la función cuadrática y a uno de los fenómenos organizados por esta noción.

Pero, una frase sintética no expresa suficiente información sobre:

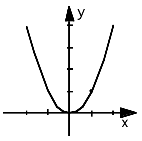
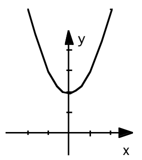
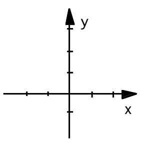
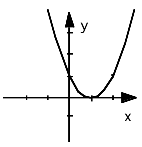
- qué tareas matemáticas sabe resolver un estudiante que ha desarrollado el objetivo y
- qué tareas matemáticas ha de resolver el estudiante durante el proceso de instrucción para desarrollar el objetivo.

Por ello, el alcance de un objetivo se concreta cuando le asociamos conjuntos de tareas matemáticas. Así, el profesor puede asociar al objetivo el conjunto de tareas que, desde su punto de vista, sirven para demostrar que quien resuelve esas tareas ha conseguido desarrollar el objetivo. Por ejemplo, el profesor puede considerar que un estudiante ha desarrollado el objetivo 1 que hemos enunciado para la función cuadrática si resuelve el conjunto de tareas siguiente (Gómez y Mesa, 1998, pp. 20-21):

La clase se ha organizado en grupos de cuatro estudiantes. Tu grupo debe llenar las casillas de la Tabla 1 siguiente. La información gráfica que aparece en la primera columna es orientativa y no es posible utilizar las coordenadas de los puntos para resolver el problema. Cuando todos los grupos hayan terminado, cada grupo presentará y justificará los resultados de una de las filas. Se espera que cada grupo comente y critique el trabajo de los otros grupos.

Tabla 1

Un Conjunto de Tareas Asociadas al Objetivo 1 de la Función Cuadrática

Gráfica	Expresión simbólica	Vértice	Eje de simetría	Foco	Directriz	Acción con relación a $y = x^2$	Raíces	Corte con el eje y
	$y = x^2$	(0,0)	$x = 0$	$(0,\frac{1}{4})$	$y = -\frac{1}{4}$	Ninguna	0, doble	$y = 0$
				$(0,\frac{9}{4})$	$y = \frac{7}{4}$	Traslación en y de dos unidades hacia arriba		
	$y = x^2 - 1$				$y = -\frac{5}{4}$			
						Traslación en x de una unidad hacia la derecha		

Otro conjunto de tareas asociado al objetivo, normalmente distinto del anterior, lo conforman las tareas para el aula que el profesor considera que contribuyen a que el estudiante desarrolle el objetivo durante el periodo de instrucción establecido. Uno de los propósitos del módulo de análisis cognitivo es disponer de un procedimiento para determinar, de forma argumentada, cuál es este conjunto de tareas. Abordaremos este propósito en la sección 2, aunque es importante señalar que este procedimiento considera sólo una de las dimensiones del aprendizaje: la que estamos llamando cognitiva y que afecta a la previsión en que los estudiantes resuelven tareas matemáticas. Posteriormente, en el análisis de instrucción, se introducirán otras dimensiones (tipos de tareas, gestión de la clase, etc.) que permitirán determinar el conjunto de tareas definitivo que el profesor selecciona para llevar a cabo la instrucción.

1.2.1. Relación entre Objetivos, Estándares de Competencia y Procesos Generales

Tratando de encontrar vínculos entre la noción de objetivo que acabamos de introducir y las que se manejan en los documentos oficiales colombianos, encontramos ciertas similitudes entre ellos, aunque también algunas diferencias. La idea de estándar en MEN es muy compleja, integradora de muchas aproximaciones diferentes y con posibilidad de interpretarse desde las distintas dimensiones y niveles del currículo:

> *…los Estándares Básicos de Competencias en matemáticas se distribuyen según los tipos de pensamiento y sus sistemas, pero involucran también los procesos generales, reflejan los que tradicionalmente se habían llamado "los contenidos del área", o sea, los conceptos y procedimientos de las matemáticas, y se refieren a los contextos en los cuales se pueden alcanzar y ojalá superar los niveles de competencia seleccionados como estándares para cada conjunto de grados.* (MEN, 2006, p. 71)

Por ello, analizaremos a continuación las similitudes y las diferencias que percibimos entre estándares, objetivos y procesos. A partir de este análisis, podremos utilizar unos para relacionarlos con los otros, de forma que sean útiles al propósito de planificación que pretendemos.

Niveles Educativos

Los estándares se distribuyen por niveles educativos; concretamente, en cinco conjuntos de grados (primero a tercero, cuarto a quinto, sexto a séptimo, octavo a noveno y décimo a decimoprimero). La decisión de agrupar parejas de grados se sustenta en una visión flexible de la distribución de tareas en el tiempo escolar y de una concepción del desarrollo de competencias gradual y progresivo, no necesariamente delimitado en el tiempo. En el caso de los objetivos se exige una mayor concreción, ya que los asociamos a un único curso y se refieren a una unidad temporal concreta y relativamente breve. Pero también es claro que el enunciado de un objetivo, en sí mismo, no tiene porqué informar sobre el nivel educativo para el que se propone; más bien ocurre que al especificar el nivel educativo para el que se establece un objetivo aportamos información adicional sobre el mismo. Por ejemplo, si enunciamos el objetivo "Aplicar el teorema de Pitágoras", podemos tener la intención de que los estudiantes resuelvan problemas de cálculo de distancias inaccesibles en cuya modelización aparecen triángulos rectángulos, o bien de que construyan ángulos rectos con cuerdas de nudos. Si ahora indicamos que el objetivo es para estudiantes de 13 años, estamos aportando como información adicional que nos referimos a la segunda opción. En resumen, la redacción de un objetivo, acompañada del nivel educativo al que va dirigido, concreta a un espacio temporal delimitado y breve las expectativas de aprendizaje deseables en ese periodo. Los estándares de un conjunto de grados tienen, en general, un nivel mayor de generalidad, por lo que no pueden considerarse objetivos, pero sirven de orientación para enunciar éstos, que deben ser más concretos y vinculados al requisito de temporalidad que requiera la programación. Por ejemplo, el estándar siguiente, de grados 4º y 5º, asociado a pensamiento espacial y sistemas geométricos, "Comparo y clasifico objetos tridimensionales de acuerdo con componentes (caras, lados) y propiedades" nos ha servido de orientación para redactar los objetivos siguientes, que forman parte de la programación de una unidad didáctica sobre el tema *Poliedros* en el nivel de 13 años:

- Distinguir los poliedros regulares.
- Reconocer las propiedades más significativas de los poliedros regulares en relación con la simetría.

Tipos de Pensamiento

Los estándares se distribuyen según 5 tipos de pensamiento matemático que, en su misma denominación, se asocian a grandes áreas de contenido matemático:

- pensamiento numérico y sistemas numéricos,
- pensamiento espacial y sistemas geométricos,
- pensamiento métrico y sistemas métricos o de medidas,
- pensamiento aleatorio y sistemas de datos y
- pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos

La intención explícita de describir tipos de pensamiento es integrar en un todo las distintas ramas tradicionales del conocimiento matemático escolar (aritmética, geometría, álgebra, cálculo, probabilidad y estadística). Sin embargo, los enunciados de los estándares están redactados con distintos niveles de generalidad desde el punto de vista de los contenidos. Por ejemplo, los dos estándares siguientes permiten identificar dominios acotados de contenido, pero mientras el primer caso se refiere a un ámbito muy restringido (fracciones), en el segundo se apela a un dominio de gran amplitud (representaciones geométricas en matemáticas y otras disciplinas):

- "Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte-todo, cociente, razones y proporciones" (p. 82) y
- "Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas" (p. 86).

El estándar sobre fracciones podría considerarse, directamente, el enunciado de un objetivo; pero el estándar sobre representaciones geométricas debería concretarse más si queremos que sea útil a la planificación que pretendemos. Por ejemplo, si estamos preparando un tema sobre trigonometría, un objetivo relacionado con este estándar podría enunciarse como: "Obtener triangulaciones planas a partir de situaciones geográficas espaciales y determinar posiciones de puntos, medidas de distancias o áreas de terrenos utilizando las razones trigonométricas".

El ejemplo que hemos mostrado en el apartado anterior sobre objetos tridimensionales también tiene un elevado grado de generalidad; así, los dos objetivos que hemos enunciado inspirándolos en él constituyen una concreción del mismo a los poliedros regulares y a la simetría. Así pues, dependiendo del nivel de generalidad con que esté redactado un estándar, podremos usarlo como objetivo o, por el contrario, tendremos que acotarlo más.

Procesos Generales

Los estándares incluyen en su redacción referencias a los procesos generales. Con ello, captan la idea de que el aprendizaje de los estudiantes no se reduzca a reproducir procedimientos rutinarios sobre contenidos matemáticos sino que debe incluir las actividades mentales genuinas propias del pensamiento matemático. Además, como hemos indicado en el párrafo anterior, relaciona estos procesos con las áreas de contenido tradicionales. Con ello, el estándar describe un nivel de expectativas de aprendizaje más concreto que la idea de competencia, más cercano al contenido. La noción de objetivo que nosotros hemos planteado busca también un plano de concreción intermedio entre la idea de competencia y el tercer nivel, mucho más concreto, de capacidades que describiremos en la sección siguiente. En ese sentido, comparte con el estándar la intención de hacer referencia a procesos complejos y de vincular éstos a los contenidos matemáticos. Por ello, los consideramos como referentes para el enunciado de objetivos también desde el punto de vista de los procesos, aunque es posible que necesiten alguna reformulación para ser útiles a la planificación para el aula. Por ejemplo, desde el punto de vista de los procesos, interpretamos que el estándar siguiente hace referencia fundamentalmente al proceso sobre argumentación; desde el punto de vista de los contenidos el dominio es muy amplio ya que afecta a todas las unidades de medida estandarizadas.

- ♦ "Justifico la pertinencia de utilizar unidades de medida estandarizadas en situaciones tomadas de distintas ciencias" (p.87).

Nos hemos inspirado en este estándar para redactar el objetivo siguiente, que formaría parte de una unidad didáctica sobre *área* para alumnos de 16 años:

- ♦ Saber deducir las fórmulas de área de los polígonos habituales (triángulo, rectángulo, trapecio, polígonos regulares) y explicar *la dependencia de la fórmula de la unidad de medida utilizada*.

En este objetivo el proceso sobre argumentación se concreta en la deducción de fórmulas y en la comprensión de la influencia de la unidad de medida de superficie.

Utilidad del conocimiento
Por último, la noción de estándar trata de captar el requisito de que el conocimiento sea útil a la resolución de problemas del entorno del estudiante. Este requisito de utilidad se pone de manifiesto de forma especialmente relevante en el proceso sobre formulación, planteamiento y resolución de problemas de la vida cotidiana. Por otro lado, desde el punto de vista del objetivo, es un referente importante a la hora de seleccionar tareas asociadas a un objetivo ya que, del abanico posible de tareas, serían más adecuadas aquellas que involucran situaciones reales cercanas al entorno del estudiante.

Estándares como Fuente de Inspiración para la Redacción de Objetivos
En resumen, consideramos que los estándares de competencia son una fuente de inspiración importante para la redacción de los objetivos de un tema matemático. Hemos argumentado que un estándar capta las actividades mentales genuinas propias del pensamiento matemático, está asociado a un nivel educativo, hace referencia al contenido matemático y orienta la búsqueda de aplicaciones del conocimiento. Pero se requiere un nivel de concreción mayor que el de los estándares sobre cada uno de estos aspectos para enunciar objetivos útiles al tipo de planificación para el aula que requiere el profesor.

Por último queremos señalar que, aunque en esta sección hemos analizado las relaciones entre objetivos, estándares y procesos, la idea de estándar conlleva la preocupación por establecer unos requisitos de calidad mínimos que todos los alumnos deben alcanzar, es decir, unos referentes para la evaluación[2]. Por ello, los estándares también serán referentes destacados en el módulo de análisis de actuación, donde se profundiza en la evaluación.

1.3. Capacidades

El siguiente nivel de expectativas de aprendizaje que vamos a introducir es el que se asocia de forma más concreta a las actuaciones de los estudiantes cuando ejecutan los procedimientos rutinarios básicos del tema matemático. Tratan de captar las expectativas de aprendizaje de más bajo nivel cognitivo. Así, definimos una capacidad como una expectativa del profesor sobre la actuación de un estudiante con respecto a cierto tipo de tarea de tipo rutinario asociada a un tema matemático. Las capacidades se manifiestan mediante conductas observables de los estudiantes, por lo cual es importante que estén enunciadas de forma que quede clara cuál es la información de partida y cuál es la información que se genera al poner en juego la capacidad.

En este nivel estamos introduciendo la idea de *tarea de tipo rutinario* como elemento central en la descripción de la capacidad. Aunque en el módulo de análisis de instrucción se profundizará en la caracterización de tareas, queremos hacer notar aquí que el calificativo de rutinario para una tarea depende del nivel cognitivo de los estudiantes para los que se vaya a realizar la planificación. Por ejemplo, una tarea en la que se pida a los estudiantes calcular el máximo o el mínimo de una función cuadrática dada en forma estándar es rutinaria si los estudiantes ya conocen las aplicaciones de la derivada (a los 17 años), pero no lo es si están aprendiendo de forma intuitiva nociones de crecimiento y decrecimiento de funciones (a los 14 años). Por tanto, a los 17 años podríamos enunciar esa tarea como una sola capacidad, pero a los 14 años tendríamos que enunciar varias capacidades que el estudiante pondría en juego al resolver esa tarea. Por ejemplo, elaborar una tabla de valores numéricos a partir de la expresión simbólica de la función; representar gráficamente una tabla de valores; interpretar gráficamente los máximos y mínimos.

Aunque una misma capacidad podría corresponder a varios objetivos distintos, para obtener la lista de capacidades de un tema suele ser útil fijar un objetivo y pensar en los procedimientos rutinarios que el estudiante necesita *saber hacer* como condición necesaria para poder decir que ha desarrollado dicho objetivo. Por ello, hablaremos de las capacidades asociadas a un objetivo. Además, al involucrar procedimientos rutinarios, el conocimiento procedimental que se identifica al realizar el análisis de contenido es una fuente de información de primer orden para determinar las capacidades asociadas a un objetivo.

La Figura 1 muestra un esquema del análisis de contenido correspondiente al objetivo 1 sobre la función cuadrática. En esta Figura aparecen representados los procedimientos que transforman cada una de las formas simbólicas de la función cuadrática en otras, el significado gráfico de los parámetros de cada una de dichas formas simbólicas y las transformaciones que sufre la representación gráfica de la función cuadrática al variar esos parámetros.

[2] "Un estándar es un *criterio* claro y público que permite *juzgar si un estudiante*, una institución o el sistema educativo en su conjunto *cumplen* con unas *expectativas* comunes de calidad". (énfasis nuestro) (MEN, 2006, p. 11)

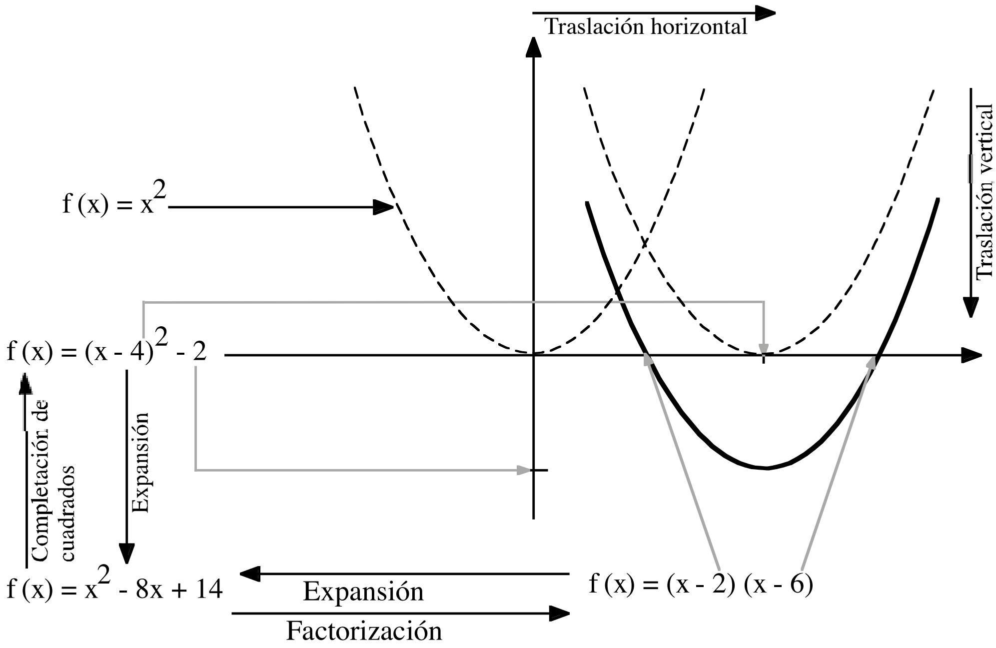


Figura 1. Procedimientos que relacionan las distintas formas de representar la función cuadrática

A partir de este análisis hemos obtenido la Tabla 2 siguiente, que contiene una lista de 16 capacidades asociadas al objetivo 1 anterior sobre la función cuadrática (Gómez, 2007):

Tabla 2

Listado de capacidades asociadas al objetivo 1 sobre la función cuadrática

Cod	Capacidad
	Ejecutar, comunicar y justificar los procedimientos de (transformaciones simbólicas):
C1	completación de cuadrados
C2	Expansión
C3	Factorización
	Identificar, mostrar y justificar los parámetros de la
C4	forma canónica (a, h, k)
C5	forma foco (p, h, k)
C6	forma estándar (a, b, c)
C7	forma multiplicativa (a, r1, r2)

	Identificar, mostrar y justificar los siguientes elementos gráficos
C8	coordenadas del vértice
C9	puntos de corte con el eje Y
C10	puntos de corte con el eje X
C11	coordenadas del foco
C12	ubicación de la directriz
C13	ubicación del eje de simetría
	Ejecutar, comunicar y justificar los procedimientos de (transformaciones gráficas):
C14	Translación horizontal
C15	Translación vertical
C16	Dilatación

Nótese que el propio enunciado de cada capacidad podría usarse como enunciado de una tarea rutinaria propuesta al alumno. Así, por ejemplo, un alumno ha desarrollado la capacidad C1 cuando saber resolver una tarea como la siguiente:

Expresa la función $f(x) = x^2 + 12x + 10$ *en forma canónica.*

Las capacidades representan los conocimientos básicos que forman parte del desarrollo de los objetivos. Pero siendo importantes estos conocimientos individuales, el desarrollo de los objetivos que nos interesan se asocia al hecho de que el alumno sepa cómo combinarlos adecuadamente ante la resolución de tareas complejas. Es decir, el alumno ha de ser capaz de ejecutar secuencias de capacidades y ha de ver dichas secuencias de un modo global. Asimismo, dichas secuencias deben poder entremezclarse de forma coherente y con flexibilidad. En la sección siguiente se formalizará esta idea mediante la noción de camino de aprendizaje.

2. Coordinación entre competencias, objetivos y capacidades

2.1. Relación Capacidades-Objetivo: Caminos de Aprendizaje

Cada capacidad está asociada a la realización de una tarea matemática rutinaria propia de un tema. Pero los objetivos se desarrollan o se evalúan mediante tareas matemáticas no rutinarias que involucran a varias capacidades.

La relación entre capacidades y tareas no rutinarias es una cuestión central a los efectos de realizar una programación para el aula. En esta cuestión intervienen las hipótesis que el profesor realiza sobre el modo en que un estudiante resolverá cada una de dichas tareas. Trataremos de captar dichas hipótesis en términos de *secuencias de capacidades*. Para ello, es imprescindible identificar vínculos entre capacidades y relacionarlos con las tareas que van a poner en juego dichos vínculos. La noción de camino de aprendizaje capta esta idea.

Un *camino de aprendizaje de una tarea* es una secuencia de capacidades que los alumnos pueden poner en juego al resolverla. Por ejemplo, un camino de aprendizaje para la tarea siguiente es la secuencia de capacidades C10 → C7 → C2 → C6 → C1 → C4 → C8 de la Tabla 2.

> *Una parábola corta al eje X en puntos de abscisa 2 y 6. Además su coeficiente principal es 1 ¿Cuáles son las coordenadas de su vértice?*

Un camino de aprendizaje de una tarea se construye, por un lado, a partir de la lógica con la que un resolutor experto (el profesor) resolvería dicha tarea; por otro lado, a partir del conocimiento del profesor sobre el aprendizaje de sus estudiantes. Una misma tarea puede tener asociados distintos caminos de aprendizaje, dependiendo del nivel educativo o del nivel cognitivo de los estudiantes. Lo habitual es que el profesor prevea un único camino cuando está haciendo la planificación para unos estudiantes concretos, aunque de forma ocasional puede tener dudas sobre el modo de proceder de los estudiantes, en cuyo caso puede señalar más de un camino para la misma tarea. En el Anexo I se pueden ver los caminos de aprendizaje de las 19 tareas que hemos agrupado en la Tabla 1 para la función cuadrática, donde se ponen en juego las capacidades de la Tabla 2. En algunas de las tareas se han previsto dos caminos diferentes.

Si el profesor está manejando un conjunto de tareas, el correspondiente conjunto de caminos de aprendizaje se puede representar mediante un grafo. Por ejemplo, el conjunto de tareas correspondiente a la penúltima fila de la Tabla 1 está representado en la Figura 2. En este grafo se indica con un redondel dónde comienza cada camino de aprendizaje. Los números en los recuadros grises indican el número de veces que se pone en juego cada capacidad. También se indica el número de veces que se pone en juego el vínculo entre cada pareja de capacidades. En el Anexo II aparecen los grafos de las tres filas de la Tabla 1.

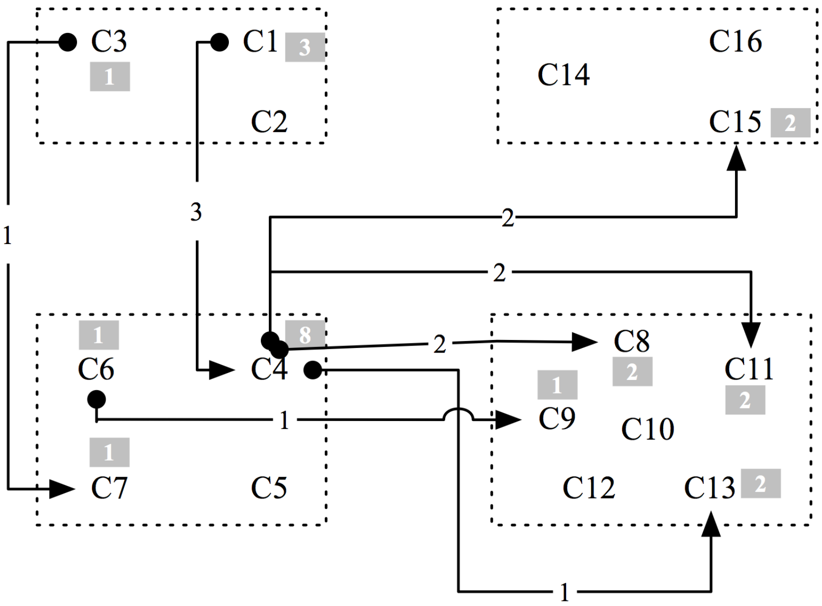


Figura 2. Caminos de aprendizaje de algunas tareas sobre la función cuadrática.

Al juntar los caminos de varias tareas en un grafo se obtiene una visión más global sobre los énfasis y las omisiones que se producen en ese grupo de tareas. Por ejemplo, en el conjunto de tareas representado en la Figura 2 se observa que:

- Hay seis capacidades (C2, C5, C10, C12, C14, C16) que nunca se ponen en práctica.
- La conexión (natural) entre C1 y C4 se trabaja con intensidad.
- Casi todas las tareas usan la forma canónica de la función cuadrática (C4); varias de ellas la toman como dato inicial.
- El grupo de capacidades relacionado con las transformaciones gráficas (C14 a C16) prácticamente no se trabaja.
- Se trabajan todos los elementos gráficos excepto la directriz (C12) y los cortes con el eje X (C10).

Este análisis puede realizarse sobre cualquier conjunto de tareas, pero es especialmente interesante cuando se realiza sobre un conjunto de tareas asociado a un objetivo, ya que es entonces cuando el profesor obtiene información sobre el modo en que dicho objetivo se va a desarrollar o evaluar. Cuando queremos analizar un conjunto completo de tareas asociado a un objetivo, por ejemplo, las 19 tareas de la Tabla 1, tenemos que conjugar toda la información obtenida sobre ellas. Si hay muchas, como en este ejemplo, puede ocurrir que la información gráfica resulte ilegible. Entonces, la información puede representarse resumida en forma de tabla. La Tabla 3 siguiente contiene información resumida sobre las 19 tareas: en cada casilla aparece el número de veces que se establece una conexión entre dos capacidades y en la última fila, el número de veces que se pone en juego cada una de las capacidades. Resulta natural que haya muchas casillas vacías en la tabla ya que hay muchas parejas de capacidades cuya relación no tiene sentido.

Tabla 3

Información resumida sobre los caminos de aprendizaje del objetivo 1 de la función cuadrática

	Capacidades de entrada															
Capacidades de salida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1				4												
2			1			1			1							
3							3									
4		1	1		1			2			2		3		2	
5		2		1					1		1	1				
6									2							
7										1						
8				5	1											
9																
10																
11					6											
12																
13																
14							7									
Total	4	3	3	14	7	2	3	9	4	1	9	1	4	7	2	0

Conjugando toda la información (caminos de aprendizaje de cada tarea, grafos de los caminos de aprendizaje y la tabla de resumen) obtenemos datos sobre la forma con la que buscamos que los escolares desarrollen el objetivo y sobre los énfasis que estamos poniendo en las tareas. En el ejemplo anterior, se pone de manifiesto que:

- La capacidad C16 no se pone en juego. No hay tareas que involucren la dilatación.
- El resto de las capacidades se ponen al menos una vez en juego. Las capacidades C10 —puntos de corte con el eje X— y C12 —ubicación de la directriz— se usan una única vez.
- Las capacidades C4, C8 y C11 se ponen en juego con frecuencia. Estas capacidades tienen que ver con el vértice y el foco de la parábola.
- Las relaciones más frecuentes entre capacidades se dan de la C11 a la C5 —obtener los parámetros de la forma de foco a partir de las coordenadas del foco—, de la C8 a la C4 —obtener los parámetros de la forma canónica a partir de las coordenadas del vértice— y de la C1 a la C4 —obtener la forma canónica por completación de cuadrados-.

- La secuencia C14 → C8 → C4 ocurre cinco veces en las tareas de la tercera función cuadrática. Esta secuencia permite obtener las coordenadas del vértice a partir de la gráfica de la función y del conocimiento de que ha sido trasladada horizontalmente.

Este proceso constituye una importante herramienta para analizar conjuntos de tareas ya que a partir del mismo podemos modificar las tareas si deseamos corregir algo. En consecuencia, es útil para seleccionar y diseñar las tareas que finalmente formarán parte de la instrucción.

El análisis de los errores y las dificultades que presentamos en la sección 3 complementa este proceso ya que señala cuestiones clave que supondrán complicaciones para el estudiante: son nodos ó conexiones del grafo sobre los que el profesor debe insistir.

2.2 Relación Competencias-Objetivos

Para relacionar las competencias y los objetivos, recordemos que cada objetivo de un tema contribuye al desarrollo de competencias. Las tareas asociadas a dicho objetivo permiten argumentar cuál es el tipo de contribución que se realiza. Así pues, una manera operativa de describir esta contribución es rellenar una tabla como la siguiente. Hacemos esta propuesta adaptando las ideas que se encuentran en Lupiáñez(2009) sobre el establecimiento de vínculos entre objetivos y competencias:

Tabla 4
Contribución de un objetivo al desarrollo de competencias

Tareas	Competencia 1	Competencia 2	Competencia 3	…
Tarea 1	×		×	
Tarea 2		×	×	
…	×	×	×	

En la primera columna aparecen las tareas asociadas al objetivo. Cada una de las columnas siguientes corresponde a una de las competencias elegidas. En cada celda ponemos una marca si consideramos que la tarea de esa fila contribuye al desarrollo de la competencia de la correspondiente columna. Son muchos los criterios que se pueden poner en juego para tomar la decisión de marcar o no una celda. Lo importante es que el profesor pueda argumentarlo de alguna forma. La contribución global del objetivo a una competencia i se obtiene mirando la columna i, donde se ve la cantidad de tareas que contribuyen a dicha competencia. En la Tabla 4, hemos representado esta contribución con distintos tonos de gris. Este análisis se puede repetir para todos los objetivos de un tema, con lo cual obtendríamos información relevante sobre las competencias a las que se contribuye en el tema. Nuevamente tenemos información que nos permite redefinir las tareas, caso de que no se esté contribuyendo a las competencias en la forma pretendida.

3. Dificultades de Aprendizaje y Errores[3]

El análisis cognitivo también se ocupa de las limitaciones para el aprendizaje que, de diferente modo, pueden distorsionar, ralentizar o frenar el aprendizaje de los escolares. Es una manera de complementar la reflexión realizada sobre las expectativas de aprendizaje ya que, metafóricamente, el análisis cognitivo atiende tanto la parte *positiva* del aprendizaje (qué esperamos que sean capaces de hacer los escolares), como la parte *negativa* (qué limitaciones pueden surgir en ese proceso de aprendizaje).

Son muchas las variables que intervienen en la caracterización de las limitaciones del aprendizaje. Algunas se relacionan con aspectos sociales, como el ambiente familiar o el nivel socio cultural. Otras, se ocupan de trastornos cognitivos que pueden afectar al rendimiento en matemáticas. Nuestra perspectiva es muy concreta: en el análisis cognitivo nos preocuparemos de limitaciones de aprendizaje relacionadas con temas matemáticos particulares. Para ello, siguiendo el modelo de los organizadores del currículo propuesto por Rico (1997), consideraremos las *dificultades* y los *errores*, como dos tipos básicos de limitaciones en el aprendizaje. A continuación los caracterizamos y ejemplificamos. Pero es importante señalar que, aunque el análisis cognitivo se focaliza en un tema matemático, algunas de estas limitaciones trascienden al tema matemático, son de tipo transversal y se expresan mediante enunciados generales que después se concretan de distintas formas sobre cada tema. Es importante que el profesor maneje simultáneamente estos distintos niveles. En las secciones siguientes quedará más claro el alcance de esta observación.

3.1 Dificultades de Aprendizaje en Matemáticas

Socas (1997) organiza las dificultades de aprendizaje en cinco tipos, según su naturaleza (p. 126):

1. Asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos: tienen que ver con la propia naturaleza de los conceptos matemáticos, con su naturaleza teórica y formal y, al mismo tiempo, práctica. Estas dificultades también se relacionan con las formas de representar esos conceptos y con las relaciones que se establecen entre esas representaciones. El propio lenguaje que se usa en las matemáticas y su relación con el lenguaje natural, también están en la base de este tipo de dificultades. En el Anexo III detallamos algunas de las dificultades relacionadas con la complejidad del lenguaje matemático.
2. Asociadas a los procesos propios del pensamiento matemático: se deben a la naturaleza lógica de las matemáticas. El desarrollo de explicaciones, argumentos y demostraciones concentran a menudo muchas de las dificultades de los escolares. La resolución de problemas y la modelización, aún cuando los escolares manejan con soltura nociones matemáticas, también genera numerosas dificultades. En el Anexo IV detallamos algunos ejemplos.

[3] La reflexión que realizamos en esta sección se sustenta fundamentalmente en los trabajos de Socas (1997) y Rico (1995). Además, utilizamos la reelaboración de estas ideas que ha realizado Lupiáñez (2009), algunos de cuyos párrafos hemos incorporado de forma literal.

3. Asociadas a los procesos de enseñanza: se deben a una determinada organización curricular, a la forma en que están realizados los agrupamientos en clase (homogéneo o heterogéneo), a determinados estilos de enseñanza, etc.
4. Asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos: las distintas teorías del aprendizaje especifican estadios de desarrollo intelectual que indican qué tipos de razonamiento y de tareas pueden resolver los alumnos en cada estadio.
5. Asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas: la aversión de los escolares hacia las matemáticas lleva, en ocasiones, a situaciones de ansiedad o de infravaloración personal.

3.2 El Error en el Aprendizaje de las Matemáticas

El error es la manifestación visible de una dificultad. El error es observable directamente en las actuaciones de los escolares, en sus respuestas a las cuestiones y tareas concretas que les demanda el profesor. Por ello, es el error el que más nos acerca al tema matemático que estemos analizando. Rico (1995) indica que la mayoría de los investigadores atribuyen a los errores las siguientes características:

- Son sistemáticos, no se producen por azar, manifiestan un proceso mental subyacente incompleto o equivocado que el sujeto utiliza de modo consistente y con confianza.
- Se manifiestan de manera sorprendente: por lo general se mantienen ocultos durante un tiempo y sólo surgen ante determinadas tareas.
- Son persistentes debido a que pueden afectar a una parte amplia de conocimiento adquirido que previamente ha tenido validez en otros contextos.
- Ignoran el significado, de modo que respuestas que son obviamente incorrectas no se cuestionan.

Esta caracterización excluye de la noción de error aquellas manifestaciones equivocadas de los alumnos que se dan por azar y que sólo reflejan una falta de cuidado o un lapsus ocasional.

Una aclaración que queremos añadir es que, al igual que las capacidades y los objetivos, el listado de errores que pretendemos obtener debe estar asociado a un nivel educativo determinado y a unos estudiantes concretos, posiblemente hipotéticos. Por ello, se trata de un listado que no tiene porqué agotar todas las posibilidades que se encuentren en la literatura y distintos profesores podrían hacer propuestas distintas sobre un mismo tema. En la sección siguiente concretamos el modo en que vamos a tratar las dificultades y los errores en el análisis cognitivo. No obstante, queremos indicar que la literatura trata los errores con profusión y, aunque nosotros los manejaremos de una forma particular, queremos aportar algunas referencias sobre el tema que pueden encontrarse en el Anexo V.

3.3 Dificultades y Errores en el Análisis Cognitivo

En el análisis cognitivo nos centraremos en los que están relacionados con las dificultades 1 y 2, por ser éstos los que están más directamente vinculados al contenido matemático. No obstante, incluso en estos dos tipos, hemos expresado como dificultades enunciados generales como "la complejidad del lenguaje matemático". Esta dificultad, mirada desde un tema matemático, se concreta sobre los contenidos de dicho tema. Por ejemplo, en el tema de función cuadrática se expresaría como la "dificultad para relacionar las formas simbólicas y gráfica de la función cuadrática". Lo importante es que el profesor tenga como referente el enunciado general y sea capaz de mirarlo desde su tema matemático.

Para cada dificultad que el profesor haya expresado en un tema, enuncia un listado de errores que describen las manifestaciones equivocadas en las que van a incurrir los estudiantes. Por ejemplo, la dificultad expresada antes sobre la función cuadrática se manifestaría mediante errores como los siguientes (Zaslavsky, 1997):

- identificar el parámetro a de la forma estándar $ax^2 + bx + c$ con la "pendiente" de la parábola,
- considerar que el parámetro b de la forma estándar traslada horizontalmente la gráfica de la parábola y
- considerar que el parámetro c de la forma estándar forma parte del vértice de la parábola.

Un análisis detallado de errores y dificultades sobre el número natural puede encontrarse en Lupiáñez (2009). En la Tabla 5 siguiente mostramos un breve extracto adaptado de dicho trabajo.

Tabla 5:
Algunas dificultades y errores relacionados con los números naturales

Dificultades	Errores
Predominio de la estructura aditiva sobre la multiplicativa	Aplicar propiedades aditivas a la operatoria con potencias
	Resolver problemas multiplicativos mediante operaciones aditivas
Desconexión entre diferentes representaciones de los números naturales	Expresar incorrectamente números grandes en notación científica
	Aplicar la reglas de valor posicional del SDN a la numeración romana
Dificultades para interpretar las reglas que determinan el sistema decimal de numeración	Confundir el valor de una cifra con su valor posicional
	Leer o escribir incorrectamente números naturales en los que interviene el 0.

Estos listados de dificultades y errores intervienen en distintas fases del análisis cognitivo. Por un lado, al considerar que las limitaciones de aprendizaje son la cara negativa de las expectativas, permiten revisar éstas de forma que se incorpore a ellas la superación de las dificultades y errores detectados. Los enunciados de objetivos y de capacidades de un tema deben incorporar, en consecuencia, elementos relacionados con las dificultades y errores. Por ejemplo, el objetivo 1 de la función cuadrática y las capacidades C6, C8 y C14 de la Tabla 2, tratan específicamente las dificultades y errores que acabamos de enunciar para este tema. Por otro lado, también intervienen en el análisis de tareas que se realiza mediante los caminos de aprendizaje. Un estudiante que tiene una dificultad incurrirá en errores durante el proceso de resolución de una tarea, de forma que su actuación no podrá asociarse con ninguno de los caminos de aprendizaje previstos. Por tanto, la información sobre errores y dificultades permite al profesor identificar aquellos caminos en los que un estudiante no tendrá éxito, por no haber desarrollado las capacidades necesarias o los vínculos entre ellas. Como consecuencia, podrá revisar las tareas, por ejemplo, para introducir aquellas en las que se pongan en juego las secuencias de capacidades que involucran dificultades de los escolares o para promover que varias tareas hagan intervenir a una misma capacidad correspondiente a un error frecuente.

4. Descripción del Proceso para Hacer el Análisis Cognitivo de un Tema de las Matemáticas Escolares

Los puntos siguientes orientan sobre la forma de proceder al realizar el Análisis Cognitivo de un tema matemático. Es importante destacar que no se trata de una secuencia lineal ordenada de apartados, sino que cada punto puede ser objeto de revisión al realizar los otros puntos.

- Establecer el listado de competencias a las que se quiere contribuir.
- Enunciar el listado de objetivos que se pretenden desarrollar.
- Enunciar el listado de capacidades implicadas en los objetivos del tema.
- Enunciar el listado de dificultades y errores previstos.

Para cada objetivo:

- Determinar la parcela de contenido que le corresponde dentro de la estructura matemática que se esté analizando. Realizar un Análisis de Contenido específico para esa parcela de contenido.
- Organizar y, si es necesario, reformular las capacidades que corresponden al objetivo.
- Organizar y, si es necesario, reformular las dificultades y errores previstos en relación al objetivo.
- Identificar un primer conjunto de tareas asociado al objetivo.
- Establecer los caminos de aprendizaje de cada tarea, representar en forma de grafo y/o en forma de tabla el conjunto de caminos de aprendizaje.
- Analizar la contribución del conjunto de tareas al desarrollo del objetivo, teniendo en cuenta las dificultades y los errores previstos.
- Establecer la contribución de este conjunto de tareas al desarrollo de competencias.
- Revisar todo el proceso; en particular, si fuese necesario, modificar el conjunto de tareas.

El proceso anterior se ha referido individualmente a un objetivo. Pero la selección, diseño y secuenciación de tareas de la unidad didáctica necesita de la consideración conjunta de todos los objetivos de la misma. Esta fase de coordinación se llevará a cabo en el análisis de instrucción. En este nuevo módulo, partiendo del análisis cognitivo realizado, se llevará a cabo un proceso de coordinación entre objetivos y se incorporarán nuevos criterios de análisis y selección de tareas que aún no han sido contemplados aquí.

Anexo I: Caminos de Aprendizaje de las Tareas de la Función Cuadrática

Enumeramos las tareas de acuerdo con el orden de las casillas en la tabla, empezando en la segunda fila ya que la primera es un ejemplo en el que no hay ninguna tarea por resolver. Así, por ejemplo, la casilla (1,2) corresponde a la primera casilla vacía de la tabla —hallar la expresión simbólica para la función cuadrática de la segunda fila—, mientras que la casilla (2,5) corresponde a la identificación del foco para la función cuadrática de la tercera fila de la tabla.

Casilla (1,2): Expresión Simbólica
Conozco las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz. Debo identificar las coordenadas del foco (C11) e identificar los parámetros de la forma foco (C5). Debo hacer una operación algebraica para hallar el valor de p a partir de la ecuación de la directriz.

$$C11 \rightarrow C5$$

Casilla (1,3): Coordenadas del Vértice
Debo reconocer que la forma de foco y la forma canónica son equivalentes.

$$C11 \rightarrow C5 \rightarrow C4$$

Casilla (1,4): Eje de Simetría
Debo reconocer que el eje de simetría pasa por el vértice y el foco.

$$C11 \rightarrow C5 \rightarrow C13$$

Aquí habría la posibilidad de que el estudiante sólo reconozca la relación entre el eje de simetría y el vértice, lo que implicaría pasar por C4 primero.

Casilla (1,8): Raíces
Debo pasar a la forma de foco, expandir y después factorizar. No esperamos que los escolares conozcan fórmulas directas.

$$C11 \rightarrow C5 \rightarrow C2 \rightarrow C3 \rightarrow C7$$

Casilla (1,9): Corte con el eje y
Aquí hay claramente dos formas: reemplazar $x = 0$ en cualquiera de las formas simbólicas o usar la forma estándar.

$$C11 \rightarrow C5 \rightarrow C9$$

$$C11 \rightarrow C5 \rightarrow C2 \rightarrow C9$$

Casilla (2,1): Gráfica de la función
Reconozco la traslación vertical

$$C4 \rightarrow C15$$

Casilla (2,3): Vértice
Conozco la forma simbólica. La completación de cuadrados es o automática o sencilla. En ese sentido, hay una situación en la que el escolar puede reconocer esta forma simbólica como estándar o canónica o las dos.

$$C4 \rightarrow C8$$

$$C1 \rightarrow C4 \rightarrow C8$$

Casilla (2,4): Eje de Simetría
Necesito reconocer que el eje de simetría pasa por el vértice.

$$C4 \rightarrow C13$$

$$C1 \rightarrow C4 \rightarrow C13$$

Casilla (2,5): Foco
Puedo reconocer que ya es la forma del foco o pensar que tengo que hacer completación de cuadrados.

$$C4 \rightarrow C11$$

$$C1 \rightarrow C4 \rightarrow C11$$

Casilla (2,7): Acción sobre $y = x^2$
Reconozco la traslación vertical.

$$C4 \rightarrow C15$$

Casilla (2,8): Raíces
Debo factorizar.

$$C3 \rightarrow C7$$

Casilla (2,9)
Reconozco que es la forma estándar.

$$C6 \rightarrow C9$$

Casilla (3,2): Forma Simbólica
Reconozco la transformación gráfica y su relación con los parámetros.

$$C14 \rightarrow C8 \rightarrow C4$$

Casilla (3,3): Vértice
Lo obtengo de lo anterior.

C14 → C8

Casilla (3,4): Eje de Simetría

C14 → C8 → C4 → C13

Casilla (3,5): Foco
Reconozco la equivalencia entre la forma canónica y la forma estándar.

C14 → C8 → C5 → C11

Casilla (3,6) Directriz
Debo reconocer el valor p en la forma de foco y restarlo a la ordenada del vértice.

C14 → C8 → C4 → C5 → C12

Casilla (3,8): Raíces
Debo factorizar

C14 → C8 → C4 → C3 → C7 → C10

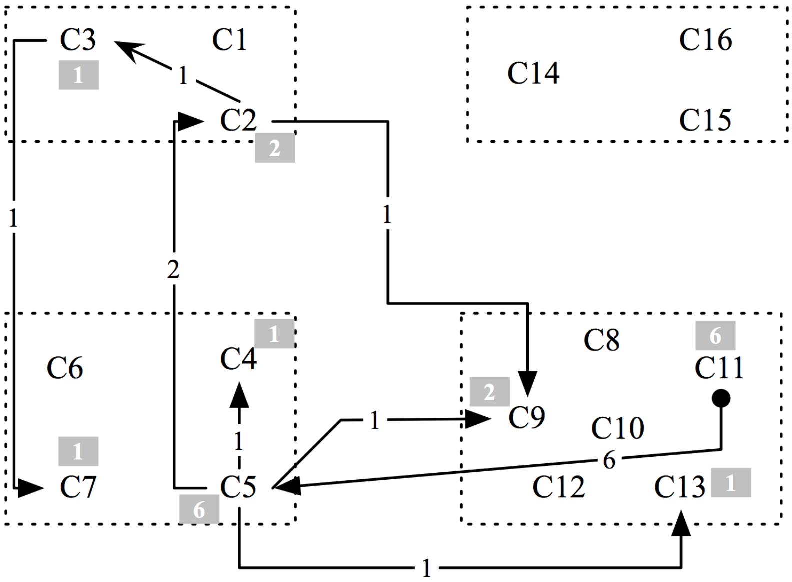
Casilla (3,9): Corte con el Eje y
Debo expandir la forma canónica. Reconozco el corte en la forma estándar.

C14 → C8 → C4 → C2 → C6 → C9

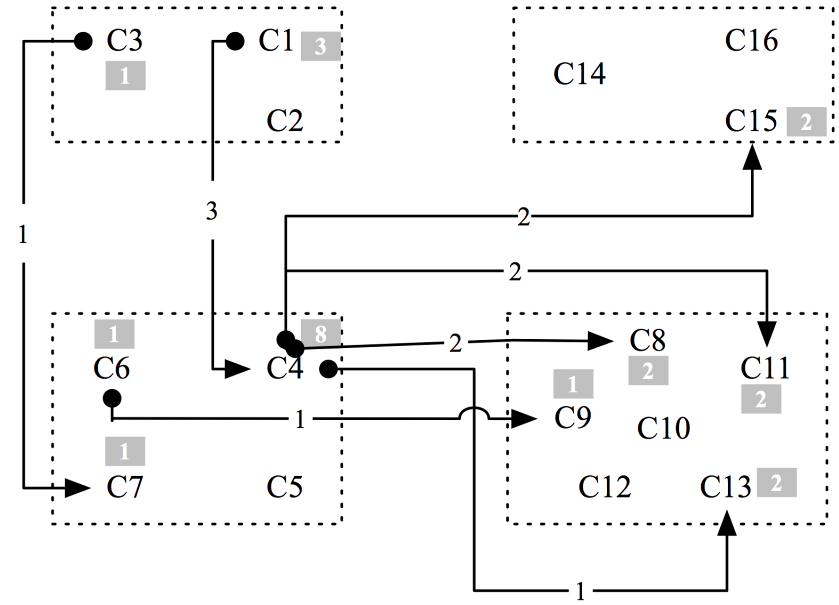
Anexo II: Grafos de Caminos de Aprendizaje

Los siguientes son los grafos de los caminos de aprendizaje de cada una de las filas de la tabla. Los hemos separado de esta forma puesto que el grafo de todas las tareas sería demasiado complejo y cada fila tiene coherencia puesto que se refiere a una función cuadrática concreta. En cada grafo, hemos indicado el número de veces que se pone en juego cada capacidad, el número de veces que se pasa de una capacidad a otra y los puntos de inicio de los diferentes caminos de aprendizaje.

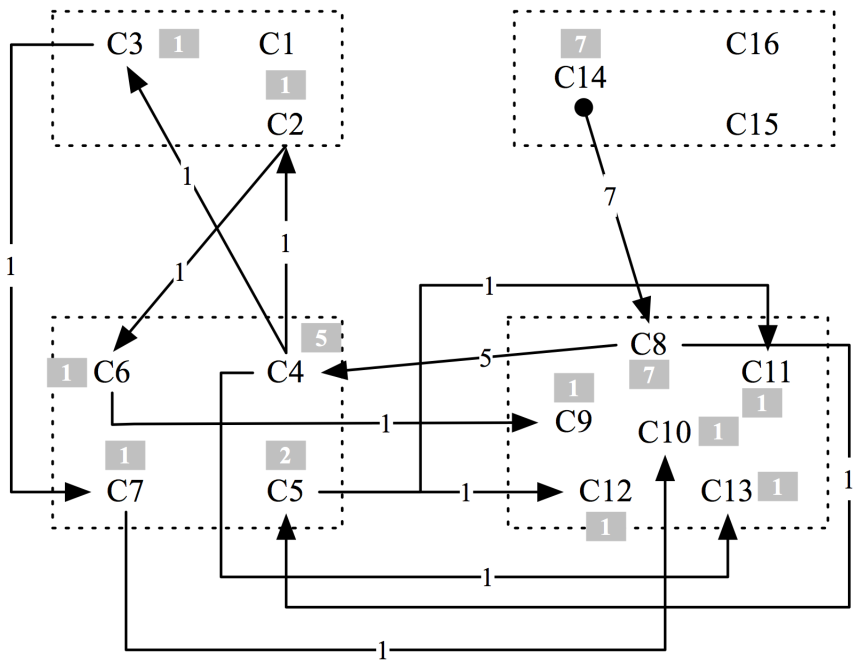
Función 1



Función 2



Función 3



ANEXO III: DIFICULTADES ASOCIADAS A LA COMPLEJIDAD DEL LENGUAJE MATEMÁTICO

Analizaremos la complejidad del lenguaje matemático desde tres dimensiones: la precisión que requiere, su semántica y sus usos.

Precisión

El lenguaje habitual usado en la comunicación puede expresar su significado aunque se cometan abusos morfosintácticos, tales como rupturas de reglas gramaticales o faltas de ortografía. Sin embargo, el lenguaje de las Matemáticas es más preciso, está sometido a reglas exactas, y no comunica su significado, salvo por la interpretación exacta de sus signos.

Semántica

1. Palabras como, por ejemplo, raíz, potencia, producto, matriz, primo, factor, diferencial, integral, semejante, índice, función, límite, etc. tienen significados diferentes en Matemáticas y en el lenguaje habitual, aunque, al tiempo, pueden estar relacionados con significados particulares en contexto matemático. Dichas interpretaciones pueden tener validez parcial que el sujeto tiende a generalizarlas (por ejemplo, límite como algo que no puede sobrepasarse).
2. Hay palabras específicamente matemáticas, por ejemplo, hipotenusa, paralelogramo, ecuación, polinomio, isósceles, divisor, múltiplo, etc., que sólo aparecen en matemáticas, por lo que la atribución de significado a las mismas sólo cuenta con contextos matemáticos como referentes para la acción (el rango de acciones que el sujeto puede hacer sobre ellos es muy limitado, salvo que conozca las matemáticas...).

Usos del lenguaje de signos matemáticos

La sintaxis del lenguaje de signos —reglas formales de las operaciones— puede algunas veces extenderse y desarrollarse más allá del dominio original de sus aplicaciones. Esta dificultad ha de gestionarse en la enseñanza mediante un proceso caracterizado por diferentes etapas, que explicaremos mediante ejemplos.

Exponentes

En el proceso de aprender a usar correctamente los exponentes, podemos diferenciar tres etapas distintas:

Estadio semiótico. El sistema nuevo de signos adquiere significado a partir del sistema antiguo, ya conocido de los alumnos, que es en este caso el conjunto de las operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir; de esta manera, se definen los elementos del sistema nuevo 3^4 o a^4 como:

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

$$a^4 = a \times a \times a \times a$$

Estadio estructural. El sistema nuevo *se estructura* según la organización del antiguo, y así, mediante procesos como:

$$3^4 \times 3^3 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \ \times \ 3 \times 3 \times 3 = 3^7$$

llegamos al esquema general $a^4 \times a^3 = a^{4+3}$, que, después será expresado simbólicamente como $a^m \times a^n = a^{m+n}$. Empleando los métodos de manipulación de fracciones aritméticas y algebraicas, se puede obtener, mediante el sistema antiguo, un esquema para la división:

$$a^5 \div a^3 = \frac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a} = a \times a = a^2$$

que se expresa simbólicamente como $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. Ya tenemos así la ley de los exponentes.

Pero en este segundo estadio comienzan a aparecer problemas que nos obligan, en un primer momento, a poner restricciones, por ejemplo, $m > n$, ya que a^0 ó a^{-2} no tienen explicación en el sistema antiguo. [Sí tienen sentido en el sistema antiguo situaciones como $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)$].

Las situaciones que no se ajustan al sistema antiguo se explican de otro modo: recurriendo a la observación de regularidades, por ejemplo, en este caso:

$$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

$$3^2 = 3 \times 3 = 9$$

$$3^1 = 3$$

$$3^0 = 1 \text{ (ya que } 3^0 = 3^{n-n} = \frac{3^n}{3^n} = 1\text{)}$$

$$3^{-1} = \frac{1}{3}.$$

Estadio autónomo. Hemos eliminado algunas restricciones pero todavía quedan signos que no pueden ser dotados de significado, ni siquiera con la técnica de la regularidad y de los comportamientos patrones; en este momento estos signos actúan con significados propios, independientemente del sistema anterior:

$$3^{2/5} = \sqrt[5]{3^2}$$

$$e^{2/5} = \sqrt[5]{e^2}$$

$$e^{i\pi} = -1$$

Es, por tanto, el sistema nuevo una fuente de dificultades al encontrarnos con elementos que no pueden ser conocidos en términos del sistema de signos antiguo.

Las funciones trigonométricas

Estadio semiótico. Las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente, se relacionan con triángulos rectángulos y son formuladas en términos de medida de los lados “adyacente”, “opuesto” o “hipotenusa” (conocidos previamente).

Estadio estructural. Junto con las propiedades que pueden ser organizadas con el sistema antiguo, aparecen propiedades como la *periodicidad* o la *naturaleza funcional*, que nuevamente han de ser dotadas de significado por el principio de regularidad y los comportamientos patrones.

Estadio autónomo. Los signos actúan con significado propio; por ejemplo, la función $\cos(x^2)$ es significativa, aunque el cuadrado de un ángulo no lo sea.

ANEXO IV: DIFICULTADES ASOCIADAS A LOS PROCESOS DE PENSAMIENTO MATEMÁTICO

1. Desarrollo de modelos implícitos
El conocimiento matemático (parcial) que los alumnos tienen en un determinado estadio de su desarrollo cognitivo produce *modelos implícitos* para resolver problemas matemáticos que son adecuados a ese estadio pero constituyen un obstáculo para la adquisición de conocimiento matemático nuevo.

Ejemplo 1
El modelo lineal crea dificultades para la incorporación de modelos multiplicativos

La multiplicación se introduce (en primaria) como una adición repetida sobre los números naturales:

$$\begin{array}{c} a + \ldots + a \quad = b \times a \\ (b \;\; veces) \end{array}$$

Si se desea extender a otros números, esta idea de adición da sentido a la multiplicación de:

- naturales por enteros: si $a \in Z$ y $n \in N$, tenemos $a + \ldots + a = n \times a$
- naturales por racionales: si $\frac{p}{q} \in Z$ y $n \in N$, tenemos $\frac{p}{q} + \ldots + \frac{p}{q} = n \times \frac{p}{q}$

Pero esta linealidad produce errores si se aplica a operaciones que requieren modelos multiplicativos:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2$$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$$sen(3a) = 3sen(a)$$

$$a^{m+n} = a^m + a^n$$

donde el primero de estos errores adquiere más fuerza a causa de la *analogía* con

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Ejemplo 2
Los modelos lineal y multiplicativo crean dificultades para la incorporación de modelos exponenciales.

Toma una hoja de papel, dóblala una vez, dos veces, tres veces… Si doblo n veces, ¿cuántos pedazos de papel tengo? Respuesta errónea: $2n$

Si $a^4 = 3$, calcula a^8:

- Lineal: $a^8 = a^{4+4} = a^4 + a^4 = 3+3 = 6$.
- Multiplicativo: $a^8 = a^{4x2} = a^4.a^2 = 3\sqrt{3}$

El modelo lineal está asociado a un tipo de razonamiento proporcional que genera errores en distintos los ámbitos de las matemáticas. En el trabajo titulado "La búsqueda de las raíces de la ilusión de linealidad", De Bock, Van Dooren y Verschaffel (2006) muestran un buen número de ejemplos.

Estas dificultades, en general, no se pueden evitar ya que forman parte del *proceso normal* de construcción del conocimiento matemático.

2. Lógica social versus lógica escolar

En el contexto escolar se desarrolla un tipo de razonamiento asociado a las situaciones educativas que es distinto del razonamiento social. Veamos algunos ejemplos concretos.

Obligatoriedad de Encontrar Respuesta única y Exacta o de Satisfacer las Expectativas del Profesor

> *Hay un barco que tiene 50m. de largo y 20m. de ancho, transporta 100 ovejas y 500 toneladas de trigo ¿Cuál es la edad del capitán?*

En una encuesta realizada en 1979 en el IREM de Grenoble (Instituto de Investigación de la Enseñanza de las Matemáticas) que se publicó en el Boletín de la Asociación de profesores de Matemáticas de la enseñanza pública en 1980 y que dio origen a un libro del mismo título realizado por Stella Baruk en 1985, se observó que una mayoría de alumnos da respuesta numérica a este problema.

Números Decimales

Los números decimales se presentan en la vida corriente como parejas de números enteros; así decimos "Víctor mide un metro ochenta" y no se trata del número 1,80, sino de dos números enteros, 1 y 80, con dos unidades distintas, el metro y el centímetro. Este tratamiento del número decimal como pareja de números enteros produce errores como:

- $1{,}3 < 1{,}28$ porque $3 < 28$, o
- $0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}9$ porque $0 \times 0 = 0$ y $3 \times 3 = 9$, o
- entre 1,3 y 1,4 no hay otro número porque no hay número entre 3 y 4.

Principio de Máxima Información

En la lógica social utilizamos el principio de máxima información: si un hijo dice a su padre "tuve un accidente con tu coche, la puerta está rota" pero no dice "y también se han destrozado el motor y las ruedas" está mintiendo. Sin embargo, en matemáticas podemos decir sin mentir que "un cuadrado es un rectángulo". Aquí no se exige máxima información, "es" significa inclusión.

ANEXO V: ALGUNAS REFERENCIAS A LA LITERATURA SOBRE ERRORES EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Un buen número de trabajos de investigación sobre errores tratan de categorizar los errores más habituales en temas específicos de matemáticas. Algunos de estos ejemplos son:

- Carpenter, Franke y Levi (2003) sobre aritmética y álgebra escolar;
- Geier (1998) y Franchi & Hernández (2004) sobre geometría;
- González (1995) sobre números naturales;
- Hitt (2003) sobre la noción de infinito y sus repercusiones en el aprendizaje de las funciones;
- Rico y Castro (1995) sobre razonamiento numérico;
- Ruiz y Lupiáñez (2009) sobre razón y proporción;
- Vamvakoussi y Vosniadou (2004) sobre números racionales;
- Zaslavsky (1997) sobre la función cuadrática;
- Ruano, Socas y Palarea (2008) sobre procesos de sustitución formal, generalización y modelización en Álgebra;
- Orhun (2001) sobre trigonometría;
- Garrote, Hidalgo y Blanco (2004) sobre desigualdades e inecuaciones;
- Puerto, Seminara y Minnard (2007) sobre estadística descriptiva; y
- Cerdán (2010) sobre el proceso de traducción algebraico.

Otro grupo de trabajos realizan estudios estadísticos para delimitar patrones de errores. Un ejemplo destacado es el de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), quienes realizaron un estudio empírico con estudiantes de educación secundaria. Después de recoger las soluciones de estos escolares a una serie de problemas, diferentes expertos clasificaron los errores y la depuración de ese análisis brinda seis categorías descriptivas:

1.Datos mal utilizados. Son errores producidos por una discrepancia entre los datos de un problema y el tratamiento que les da el alumno. Aquí se encuentran los casos en que se añaden casos extraños, se omite algún dato necesario para la solución, se contesta algo innecesario, se hace una lectura incorrecta del enunciado, se utilizan valores de una variable para otra distinta, etc.

2. *Interpretación incorrecta del lenguaje*. Son errores al traducir una información dada en un determinado sistema de representación a otro. Por ejemplo, modelización mediante una ecuación inadecuada, transferencia de reglas de un sistema de representación simbólico a otro (en el que ya no son válidas); por ejemplo, al sumar números complejos en forma polar, aplicar reglas válidas sólo para la forma binómica [$rq + sd = (r + s) + d$].

3. Inferencias lógicas no válidas. Son falacias de razonamiento no asociadas a contenidos específicos. Por ejemplo, concluir, a partir de un enunciado condicional, su contrario; utilizar incorrectamente los cuantificadores; confundir una condición necesaria y una suficiente; o reglas que producen reglas. Un ejemplo de este último caso es el siguiente:

$$\text{Si } (x-2)(x-3)=0 \text{ entonces } x=2 \text{ o } x=3$$

$$\text{Por tanto, si } (x-2)(x-3)=2 \text{ entonces } x=4 \text{ o } x=5$$

Teoremas o definiciones deformados. Son deformaciones de principios, reglas o definiciones (asociadas a contenidos). Por ejemplo, aplicar un teorema sin las condiciones necesarias, aplicar una propiedad distributiva a una función no lineal, etc.

Falta de verificación de la solución. Son errores que se presentan cuando cada paso de la resolución de una tarea es correcto pero no responde a la solución pedida.

Errores técnicos. Son errores de cálculo, al tomar datos de una tabla, de manipulación de símbolos algebraicos, de ejecución de algoritmos básicos, etc. Por ejemplo,

$$23 = 6$$

$$2x - x = 2$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

Esta clasificación permite pensar en tipologías de errores que pueden surgir al trabajar cada tema específico de matemáticas y nos permite abarcar un espectro amplio de errores sobre cada tema.

Al realizar el análisis cognitivo de un tema matemático vamos a tomar como referencia una dificultad para enunciar sus errores asociados. Para enunciar las dificultades también hemos aportado una tipología. Manejando estas distintas tipologías, que se alimentan una a la otra, el profesor genera la información que necesita sobre las limitaciones de aprendizaje que presentarán sus estudiantes.

BIBLIOGRAFÍA

Artículos de fundamentación teórica en los que están basados estos apuntes

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis Doctoral no publicada. Granada, España: Universidad de Granada.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez. *Educación Matemática* (pp. 69-108). México DF, México: Grupo Editorial Iberoamérica y "una empresa docente".

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Coord.). *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona, España: ice - Horsori.

Rico, L. (2005) *La competencia matemática en PISA*. Conferencia impartida en el VI Seminario de Primavera: la Enseñanza de las Matemáticas y el Informe PISA, Madrid, España.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.). *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-15). Barcelona, España: ice - Horsori.

Documentos curriculares e institucionales

Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1998a). *Indicadores de logros curriculares*. Bogotá, Colombia: Autor.

Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1998b). *Lineamientos curriculares en matemáticas*. Bogotá, Colombia: Autor.

Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá, Colombia: Autor.

OCDE (2004). *Learning for Tomorrow's World: First results from PISA 2003*. París:OECD.

Ministerio de Educación y Ciencia. (2007). Real decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la educación secundaria obligatoria. *BOE*, 5, 677-773.

Artículos sobre dificultades y errores en distintos temas de matemáticas escolares

Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, Inglaterra: Heinemann.

Cerdán, F. (2010). Las Igualdades Incorrectas Producidas en el Proceso de Traducción Algebraico: un Catálogo de Errores. *PNA*, 4(3), 99-110.

De Bock, D., Van Dooren, W. y Verschaffel, L., (2006). La búsqueda de las raíces de la ilusión de linealidad. *Indivisa: Boletín de estudios e investigación, 4*, 115-138.

Franchi, L., Hernández, A. I. (2004). Tipología de errores en el área de la geometría plana. *EDUCERE*, *25*, 196-204.

Garrote, M., Hidalgo M. J. y Blanco, L. J. (2004). Dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones. *Suma 46* . 37 – 44.

Geier, R. (1998). Error analyses of geometry problems in secondary schools. The Pythagorean Theorem. *Mathematische Unterrichtspraxis 19*(4), 37-46.

Gómez, P., Mesa, V. M. (Eds.). (1996). *Situaciones problemáticas de precálculo. El estudio de funciones a través de la exploración con calculadoras gráficas*. México DF, México: una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.

González, J. L. (1995). El campo conceptual de los números naturales relativos. Tesis doctoral no publicada. Granada: Universidad de Granada.

Hitt, F. (2003). El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones.g(Eds.), *Matemática Educativa. Aspectos de la investigación actual* (pp. 91-111). México DF, México: Fondo de Cultura Económica.

Movshovitz-Hadar N., Zaslavsky O. e Inbar S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18*(1), 3-14.

Orhun, N. (2001). Student's mistakes and misconceptions on teaching of trigonometry. Mathematics Education Into The 21st Century Project. In Alan Rogerson (Ed.), *Proceedings of the international conference: New Ideas in Mathematics Education* (pp. 127-132). Palm Cove, Australia: University of Queensland.

Puerto, S., Seminara, S. A. y Minnard, C. (2007). Identificación y análisis de los errores cometidos por los alumnos en Estadística Descriptiva. *Revista Iberoamericana de Educación*, *43*(3), 1-9.

Rico, L. y Castro, E. (1994). Difficulties and errors in number reasoning development. En N. Malara y L. Rico (Eds.), *Proceedings of the first Italian-Spanish research symposium in mathematics education* (pp. 123-130). Modena, Italia: Universita di Modena.

Ruano, R., Socas, M., Palarea, M. Robayna (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en Álgebra. *PNA*, *2*(2), 61-74

Ruiz, E. F. y Lupiáñez, J. L. (2009). Detecting psychological obstacles in teaching and learning the topics of reason and proportion in sixth grade primary pupils. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *17*, 397-424.

Vamvakoussi, X. y Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational number: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, *14*(5), 453-467.

Zaslavsky, O. (1997). Conceptual obstacles in the learning of quadratic functions. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *19*(1), 20-44.