

## INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM METODOLÓGICA PARA O ENSINO DA ÁLGEBRA

Marcos Francisco Borges 1 –Franciele Nates dos Santos 2 – Rita de Cássia Pereira Borges

3

maribor@unemat.br 1 - franciele\_nates@hotmail.com 2 - ritacpborges@gmail.com 3  
Universidade do Estado de Mato Grosso-UNEMAT - Instituto Federal de Mato Grosso-  
IFMT/Campus Cáceres - Brasil

Núcleo temático: I. Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.

Modalidad: CB

Nivel educativo: Medio o Secundario

Palabras clave: Educação Matemática. Tarefa Investigativa. Ensino de Álgebra.

### Resumo

*O objetivo deste trabalho foi o de investigar a participação dos alunos do 9º ano do ensino fundamental em atividades investigativa e identificar as fases do desenvolvimento do pensamento algébrico em uma sequência de atividades. Aplicamos três atividades investigativas de ensino envolvendo conceitos algébricos a 32 alunos do 9º ano do ensino fundamental de uma escola municipal da cidade de Cáceres – Mato Grosso – Brasil. Para a análise dos registros do discurso oral e escrito dos alunos, consideramos as fases de desenvolvimento do pensamento algébrico e os momentos de uma aula investigativa. Quanto à evolução do pensamento algébrico as falas dos alunos foram agrupadas em: i- pensamento aritmético, ii- transição do pensamento aritmético para o algébrico, iii- pensamento pré-algébrico e iv- pensamento algébrico elaborado. Sobre a realização de uma atividade de investigação matemática foram identificados: i- exploração e formulação de questões; ii- conjecturas; iii- testes e reformulações; iv- justificação e avaliação. As análises revelaram que os alunos estão na fase do pensamento aritmético e que a realização de atividades de investigação favorece o desenvolvimento do pensamento algébrico, identificado pelas habilidades em fazer generalizações, em reconhecer padrões e em entender a ideia de variável.*

### 1. Introdução

A aprendizagem da álgebra deve promover aos alunos o desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébrico. Mas, não é isto que ocorrendo em relação ao seu ensino, o professor acredita que a essência da álgebra está no emprego das regras simples, memorizações e fórmulas, o que tem levado os alunos a ter dificuldades em aprendê-la.

O objetivo deste trabalho foi o de investigar a participação dos alunos do 9º ano do ensino fundamental em atividades investigativa e identificar as fases do desenvolvimento do pensamento algébrico em uma sequência de atividades. Os sujeitos da pesquisa foram 32 alunos do 9º ano da turma de 2016, do ensino fundamental da Escola Municipal Vitória Régia, localizada na cidade de Cáceres/Mato Grosso/Brasil.

Utilizamos a investigação matemática como estratégia metodológica, uma vez que, como diz Ponte (2003), ela propõe atividades de caráter investigativo que possibilitam aos alunos um maior envolvimento na aprendizagem, pois exigem a sua participação ativa na formulação e nas respostas das questões estudadas.

Aplicamos três atividades investigativas de ensino envolvendo conceitos algébricos: “a máquina mágica” (Fiorentini *et al.*, 2005); “generalizações e padrões” (Barbosa, 2010) e “a lanchonete do Alan Xonete” (Dechen, 2008) e para analisá-las nos fundamentamos no aritmetismo (Lins e Gimenez, 1997) e nas três fases da evolução do pensamento algébrico (Fiorentini, Fernandes & Cristovão, 2005), que são as fases “pré algébrica”, “de transição” e a “do pensamento algébrico mais elaborado”, para categorizar a fase em que se encontravam os alunos.

## **2. A Investigação matemática em sala de aula**

Segundo Ponte, Brocardo & Oliveira (2003) investigar em Matemática, é relacionar objetos matemáticos, sejam eles conhecidos ou desconhecidos, buscando identificar suas propriedades. Uma investigação desenvolve-se normalmente ao redor de problemas e encontrá-los é o primeiro passo.

Para este pesquisador, preparar uma aula investigativa não é algo simples, o professor deve escolher atividades desafiadoras e durante todo o processo deve incentivar e ensinar os alunos a raciocinar matematicamente e avaliar o progresso deles. As aulas devem considerar três fases: (i) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito, (ii) realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma, e (iii) discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado.

### **2.1. As fases do desenvolvimento do Pensamento Algébrico**

O pensamento algébrico é assumido, no contexto deste trabalho, como um processo no qual os alunos generalizam ideias matemáticas através do discurso da argumentação, expressando essas generalizações de forma simbólica de acordo com seu nível de escolaridade, dando atenção não apenas aos objetos, mas também as relações existentes entre eles e sempre que possível representando e raciocinando sobre tais relações de maneira geral e abstrata (Borralho & Barbosa, 2016; Ponte, 2006; Fiorentini, Miorim & Miguel, 1993).

Consideramos para a análise, o aritmetismo (Lins e Gimenez, 1997), relacionado ao pensamento aritmético quando há produção de significados em relação a números e operações aritméticas, e as três fases do pensamento algébrico (Fiorentini *et al.*, 2005), que são: a “Pré-algébica” na qual se usa de algum elemento considerado algébrico (letras, símbolos), porém não consegue compreender o significado algébrico desse elemento. A fase de “transição do pensamento aritmético para o algébrico”, caracterizada pela passagem de um pensamento aritmético para o algébrico, aceita-se a existência de um número qualquer e estabelece-se alguns processos e generalizações, sendo que a linguagem utilizada pode ou não ser simbólica. E, a fase em que se atinge o “pensamento algébrico mais elaborado”, na qual se é capaz de pensar e se expressar genericamente, compreendendo a existência de variáveis dentro de um intervalo numérico, estando apto em expressá-las por escrito e também de operá-las.

### **3. Metodologia da pesquisa**

Com base nos relatos da professora, identificamos as dificuldades dos alunos em aprender álgebra e escolhemos três atividades investigativas, *A máquina mágica*, *Generalizações e padrões* e *A lanchonete do Alan Xonete* que possibilitam o contato dos alunos com experiências informais antes da manipulação algébrica formal, permitindo a “transição progressiva da linguagem natural para a linguagem matemática” (Ponte, Serrazina, Guimarães, Brenda, Guimarães, Sousa, Menezes, Martins, & Oliveira, 2007, p.55).

Para os quatro encontros realizados, a turma foi dividida em 07 grupos. Foi solicitado que registrassem em uma folha as soluções e as estratégias utilizadas. No último encontro os grupos socializaram os resultados e discutiram sobre eles, além de opinarem sobre a participação deles nas atividades.

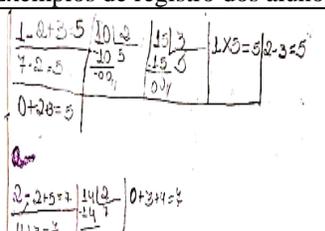
Utilizamos como instrumentos de coleta de dados: (1) o registro da observação direta dos alunos na dinâmica da realização das atividades, (2) os documentos produzidos por eles e (3) o registro em vídeo das discussões ocorridas, no último encontro.

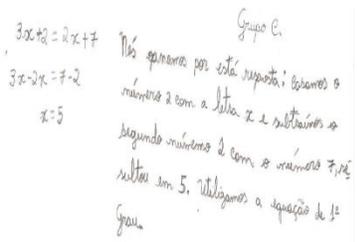
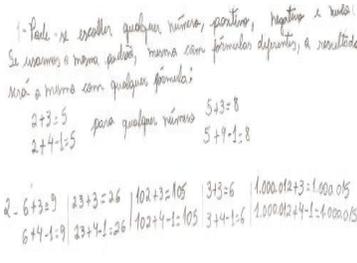
#### 4. Resultados e Análises

Para a análise do material coletado, separamos as respostas dos alunos em quatro categorias, 1) *Pensamento aritmético*; 2) *Fase pré-algébrica*; 3) *Fase de transição* (do pensamento aritmético para o algébrico); e 4) *Pensamento Algébrico mais elaborado*.

Nos quadros 1, 2 e 3 apresentamos a análise das respostas dos grupos em cada atividade desenvolvida a partir das categorias.

**Quadro 1** - Análise das respostas dos grupos na atividade 1 a partir das categorias.

|   |  |   |
|---|--|---|
| Atividade 1: <i>A máquina mágica</i> (Fiorentini <i>et al.</i> , 2005).   |  |   |
| <i>Proposta:</i> Os grupos devem descobrir as mágicas da máquina, cujo modo de operá-la é o seguinte: ao escolher o número 2, a máquina o transforma em 5. Entre as várias mágicas possíveis a serem descobertas, ao final da atividade o grupo deve escrever uma expressão matemática que represente o número $x$ transformado pela máquina. |  |   |
| Exemplos de soluções que indicam as fases do pensamento algébrico   |  |   |
|   | Descrição  | Exemplos de registro dos alunos   |
| Pensamento aritmético   | Três grupos apresentaram para a solução apenas números aleatórios de modo que o resultado final fosse o número cinco. Mesmo quando questionados, não investigaram a possibilidade de usar outros valores que não fosse o número dois e o cinco e não conseguiram estabelecer um padrão para a máquina mágica. Há a dificuldade da tradução da linguagem natural para a linguagem matemática. |  |

|  |  |   |
|--|--|---|
| <p>Pensamento pré-álgebraico</p>                           | <p>Três grupos fizeram uso da simbologia algébrica e trabalharam com equações, porém tiveram dificuldades em explicar o significado atribuído a letra <math>x</math> como variável utilizada nas respostas. Não perceberam a letra como a generalização do possível número a entrar na máquina mágica, mas a entenderam como o número que seria a resposta após sofrer a transformação na máquina. Além disso, não estabeleceram um padrão para a máquina mágica considerando todas as informações da atividade, apenas construíram uma equação de modo que o <math>x</math> que usaram fosse o número cinco que deveria sair da máquina. Apesar de revelarem que dominam as regras de resolução de uma equação, não conseguiram perceber que podem substituir os números desconhecidos por letras e que, em contextos diferentes, as mesmas letras possuem significados diferentes.</p> |  |
| <p>Transição do pensamento aritmético para o algébrico</p> | <p>Apenas o grupo B propôs a ideia de poder usar números quaisquer, mas sempre mantendo a mesma regra, mostrando indícios de uma capacidade de generalização do resultado, e isto fica mais visível quando o grupo começa com valores menores e vai inserindo valores extremamente maiores para exemplificar que poderiam utilizar qualquer valor. Apesar desta afirmação, em nenhum momento trabalharam com números negativos, o que nos mostrou também a dificuldade em realizar operações no conjunto numérico dos inteiros.</p>  |  |

**Quadro 2** - Análise das respostas dos grupos na atividade 2 a partir das categorias

| <p>Atividade 2: <i>Generalizações e padrões</i> (Barbosa, 2010).<br/> <i>Proposta:</i> Nesta atividade são apresentadas figuras que representam uma sequência. Os grupos tinham que identificar o elemento da sequência e ao final escrever uma regra para representar a sequência dada.</p> |  |   |
|--|--|---|
| Categoria  | Exemplos de soluções que indicam as fases do pensamento algébrico  |   |
|  | Descrição  | Exemplos de registro dos alunos   |
| <p>Pensamento aritmético</p>   | <p>Apenas um grupo limitou-se a contar cada figura da sequência dada até obter o número indicado para dizer qual era a figura. Mesmo quando o número das posições das figuras que a atividade pedia se tornaram maiores o grupo optou por desenhá-las estendendo a sequência até obter a posição desejada e descobrir a resposta. O grupo contou as figuras que apareciam na sequência e quando foi solicitado a apresentar soluções para as posições maiores que 9, voltavam para a primeira figura da sequência e prosseguiram a contagem.</p> |  |

|   |   |  |
|---|---|--|
| Pensamento pré-álgebraico                           | Cinco grupos conseguiram estabelecer uma regra para encontrar as figuras, mas apenas um chegou a regra que não envolvia a contagem.   | Aluno do grupo D – Professora, se a sequência aqui tem 9 então 18 vai ser aqui (apontando para o último elemento da sequência dada) então como a sequência é sempre assim acrescenta mais dois para chegar no vinte e então a resposta é o quadrado. |
| Transição do pensamento aritmético para o algébrico | Apenas um grupo, apesar de ainda utilizar a aritmética, reconheceu o padrão e começou a formular estratégias e a estabelecer generalizações para descobrir as figuras nas posições cujo número fosse o maior. |  |

**Quadro 3** - Análise das respostas dos grupos na atividade 3 a partir das categorias.

| Atividade 2: <i>A lanchonete do Alan Xonete</i> (Dechen, 2008).<br>Proposta: Nesta atividade são apresentadas questões sobre a disposição das mesas e das cadeiras para acomodação das pessoas em um bar. |  |                                 |
|---|--|---------------------------------|
| Categoria   | Exemplos de soluções que indicam as fases do pensamento algébrico  |                                 |
|   | Descrição  | Exemplos de registro dos alunos |
| Pensamento aritmético   | Três grupos para responder as questões desenharam a disposição das mesas e contaram quantas pessoas poderiam sentar. Ao serem questionados sobre a ampliação do número de mesas, o grupo continuou com os desenhos, somente desistiram quando o número de mesas envolvia um número maior, não sendo possível utilizar o desenho para encontrar a resposta. Não compreendem o significado algébrico do número $n$ na atividade e passaram a colocar valores e a fazer multiplicações aleatórias para encontrar a solução do problema. |                                 |
| Pensamento pré-álgebraico   | Para esta atividade os grupos não apresentaram as respostas em linguagem formalizada, apesar de apresentarem indícios de que são capazes de começar a realizar algumas generalizações dos resultados.  |                                 |
| Transição do pensamento aritmético para o algébrico   | Quatro grupos conseguiram observar padrões e exemplificar a solução por meio da escrita, mas a linguagem ainda não é a simbólica. Os grupos, mesmo reconhecendo como variáveis, as pessoas e as mesas, não conseguiram, a partir da regra inicial, estabelecer uma nova regra para encontrar a solução, atribuindo valores aleatórios para encontrar as respostas.   |                                 |

Considerando as análises dos registros dos alunos no desenvolvimento das atividades investigativas, apresentadas nos quadros 1, 2 e 3, chegamos aos elementos que caracterizam as categorias do pensamento algébrico (Quadro 4).

**Quadro 4** – Elementos indicadores das fases do pensamento algébrico revelados pelos alunos.

| Categoria                                | Elementos indicadores revelados na análise  |
|--|---|
| Pensamento Aritmético                    | Usa a contagem. Faz desenhos correspondentes aos números. Usa números aleatoriamente. Não estabelece padrões. Não usa a linguagem matemática. Não compreendem o significado algébrico das letras. |
| Pré-algébrico                            | Uso de símbolos. Opera com equações. Estabelece regras. Não estabelece padrões. Não usa letras para o número desconhecido. Não formaliza as respostas.  |
| Transição do Aritmético para o Algébrico | Usa a aritmética. Exemplifica soluções por escrito. Formula estratégias. Reconhece padrões e variáveis. Não estabelece novas regras a partir da inicial. Começa a estabelecer generalizações.     |

Considerando o desenvolvimento do pensamento, desde o aritmético (Lins e Gimenez, 1997), passando pelas fases pré-algébrica, de transição e a do um pensamento algébrico mais elaborado (Fiorentini *et al.* 2005) e as características apresentadas pelos alunos do 9º ano do ensino fundamental, consideramos que eles possuem o pensamento aritmético e o utilizam como primeira escolha para resolver os problemas propostos e encontrar a solução. Quando são requeridos a utilização do pensamento algébrico, observa-se a fase pré-algébrica, por meio do uso de símbolos, da resolução de equações e do estabelecimento de regras.

A sequência de atividades de ensino ajudou alguns grupos a chegarem a reconhecer padrões e variáveis e a começar a estabelecer generalizações, caracterizando a presença da fase de transição do pensamento aritmético para o algébrico, mas não atingiram ainda, a fase do pensamento algébrico mais elaborado que requer que sejam capazes de pensar e de se expressar por meio de generalizações.

Quanto a realização da atividade de investigação matemática, considerando as etapas propostas por Ponte *et al.* (2003), podemos dizer que os alunos (Quadro 5) que inicialmente não conseguiam identificar o problema, passaram a consegui-lo ao final da sequência de atividades assim como a fazer conjecturas.

**Quadro 5** – Desempenho dos alunos considerando as fases da atividade de investigação matemática.

| Fases da atividade de investigação matemática | Desempenho dos alunos nas fases do desenvolvimento das atividades |
|---|---|
|   |   |

|                                     |   |
|-------------------------------------|---|
| Exploração e formulação de questões | Não conseguiram identificar o problema e não ultrapassaram as situações sugeridas até a segunda atividade. Na terceira quase todos identificaram os problemas a serem resolvidos.   |
| Conjecturas                         | Levantaram hipóteses nas duas primeiras atividades e na terceira também estabeleceram relações sobre como resolver o problema.  |
| Testes e reformulações              | Poucos testaram as conjecturas, demonstraram pouco espírito investigativo na primeira atividade e não deram nenhuma importância na segunda, já que a contagem comprovava a resposta. Na terceira atividade apesar da pouca importância dada aos testes, o utilizaram para as regras criadas por eles. |
| Justificação e avaliação            | Os grupos não argumentaram sobre as soluções encontradas, as discussões se ativeram somente aos componentes.  |

Consideramos que para se atingir as fases de testes e justificação e avaliação é preciso dar prosseguimento as atividades para que os alunos possam desenvolver a habilidade de argumentar sobre os procedimentos e soluções.

#### 4. Considerações Finais

Os registros e as falas dos alunos revelaram a predominância do uso da contagem e de sucessivas tentativas na solução dos problemas, além da dificuldade da tradução da linguagem natural para a linguagem simbólica matemática, da compreensão da noção de variável o que permitiu identificá-los nas categorias do “pensamento aritmético” e da “fase pré-algébrica”.

No transcorrer da realização das atividades investigativas, os grupos começaram a mostrar indícios da elaboração do pensamento algébrico, ou seja, passaram a reconhecer padrões, a compreender a existência de variáveis e mesmo que ainda estivessem dificuldades no uso da linguagem simbólica, começaram a desenvolver a habilidade de lidar com expressões algébricas.

Pudemos observar que a investigação matemática como estratégia de ensino proporciona o desenvolvimento da argumentação, do trabalho em grupo, da elaboração de relatórios, da comunicação oral e da escrita matemática.

Os alunos durante os momentos da investigação matemática tiveram na fase de exploração e formulação de questões menos dificuldades, enquanto nas fases de conjecturas; testes e reformulações; justificação e avaliação foi necessária a intervenção e a persistência do professor para que elas acontecessem.

Entendemos que os alunos por estarem no 9º ano deveriam apresentar conhecimentos da categoria “dos que apresentam o pensamento algébrico mais elaborado” ou pelos menos “dos

que estão na fase de transição do pensamento aritmético para o algébrico”. Esta dificuldade pode estar vinculada a metodologia adotada pelos professores, com ênfase na aplicação de regras simples, memorizações e fórmulas para ensinar os conceitos algébricos.

A pesquisa evidenciou que o professor ao utilizar a atividade de investigação no ensino de matemática, começa a desmistificar a concepção que os alunos possuem de que a álgebra se constitui de um emaranhado de símbolos e regras a serem seguidas, e pode desenvolver nos alunos o pensamento algébrico.

## 5. Referências bibliográficas

- Barbosa, J. G. dos S. (2010). *Pensamento algébrico*. Trabalho de conclusão de especialização. Universidade Federal de Minas Gerais. [www.mat.ufmg.br/~espec/monografiasPdf/Monografia\\_JGeraldo.pdf](http://www.mat.ufmg.br/~espec/monografiasPdf/Monografia_JGeraldo.pdf) Consultado 10/07/2016.
- Borralho, A. & Barbosa, E. (s.d.). Pensamento algébrico e explorações de padrões. [http://www.apm.pt/files/\\_Cd\\_Borralho\\_Barbosa\\_4a5752d698ac2.pdf](http://www.apm.pt/files/_Cd_Borralho_Barbosa_4a5752d698ac2.pdf) Consultado 11/08/2016.
- Dechen, T. (2008). *Tarefas exploratório-investigativas para o ensino de álgebra na 6ª série do ensino fundamental: indícios de formação e desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos*. Dissertação de mestrado não publicada, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, Brasil.
- Fiorentini, D., Miorim, M. Â. & Miguel, A (1993, março). Contribuições para um repensar a Educação Algébrica Elementar. *Pró-Posições*, 4, 1(10), 78 – 91.
- Fiorentini, D., Fernandes, F. L. P. & Cristovão, E. M. (2005). Um estudo das potencialidades das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: *Anais. Seminário Luso-Brasileiro de investigações matemáticas no currículo*. Portugal. Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Recuperado de [http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/seminario\\_lb.htm](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/seminario_lb.htm) Consultado 17/10/2016.
- Lins, R. & Gimenez, J. (1993). *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática). Campinas: Papyrus.
- Ponte, J.; Serrazina, L.; Guimarães, H.; Brenda, A.; Guimarães, F.; Sousa, H.; Menezes, L.; Martins, M. & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC.
- Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavaro (eds.). *Números e álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores*. Lisboa: SEM-SPCE, 5-27.

Ponte, J. P., Brocardo, J. & Oliveira, H. (2003). Investigações matemáticas na sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica.

Ponte, J. P. (2003). Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. *Investigar em educação*, 2, 93-169.