REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores

del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen VII Número 2 Fecha: julio-diciembre de 2019

ISSN: 2395-955X

ENSEÑANZA DEL CÁLCULO VECTORIAL A TRAVÉS DEL SOFTWARE LIBRE GEOGEBRA

TEACHING OF THE VECTOR CALCULUS THROUGH THE SOFTWARE FREE GEOGEBRA

Juan R. Ruiz Guerra, Hugo Rodríguez Martínez, Monserrat del Carmen de León Cedillo, Carlos I. Espino Márquez

Tecnológico Nacional de México. Instituto Tecnológico de Aguascalientes. Departamento de Ciencias Básicas.

intrepit_10@hotmail.com, hugoroma2001@yahoo.com, ing.monsedeleon@yahoo.com.mx, eime_282000@hotmail.com

Para citar este artículo:

Ruiz, J. Rodríguez, H., De León, M. del C., Espino, C. (2019). Enseñanza del cálculo vectorial a través del software libre GeoGebra. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. VII, No. 2, pp. 37-47. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México: Editorial AMIUTEM.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año VII, No. 2, julio-diciembre de 2019, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: http:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

ENSEÑANZA DEL CÁLCULO VECTORIAL A TRAVÉS DEL SOFTWARE LIBRE GEOGEBRA

TEACHING OF THE VECTOR CALCULUS THROUGH THE SOFTWARE FREE GEOGEBRA

Juan R. Ruiz Guerra, Hugo Rodríguez Martínez, Monserrat del Carmen de León Cedillo, Carlos I. Espino Márquez

Tecnológico Nacional de México. Instituto Tecnológico de Aguascalientes. Departamento de Ciencias Básicas.

intrepit_10@hotmail.com, hugoroma2001@yahoo.com, ing.monsedeleon@yahoo.com.mx, eime_282000@hotmail.com

Resumen

La presente investigación desarrolla una propuesta didáctica a través de la construcción de ambientes de aprendizaje, que generen en los alumnos las competencias matemáticas que les permitan identificar, interpretar, argumentar y obtener con ello aprendizajes significativos de los conocimientos teóricos que se tratan en Cálculo Vectorial a través del uso de software libre GeoGebra; así de manera detallada, los profesores podrán dar seguimiento al proceso de construcción de los conocimientos de sus alumnos.

Palabras clave: Ambientes de aprendizaje, Aprendizajes significativos, Software libre, GeoGebra.

Abstract

This research aims to develop a didactic proposition through the construction of learning environments, which generate in students mathematical skills that enable them to identify, interpret, argue, and get this significant learning of theoretical knowledge discussed in Vector calculus through the use of free software GeoGebra; so in detail, teachers can follow the process of construction of knowledge in their students.

Key words: Environments of learning, Meaningful learning, Free software, GeoGebra.

Introducción

La enseñanza de las matemáticas, así como su aprendizaje, no ha sido tarea fácil a través de los años, lo cual se debe al carácter abstracto que se le confiere a la misma, o bien a la forma en la cual el estudiante recibe su enseñanza, basada muchas veces en enfoques tradicionales.

En esta nueva sociedad basada en el conocimiento, en la que se reconoce que la calidad, rapidez, seguridad y acceso a la información juegan un papel trascendental, la incorporación de las computadoras en los diferentes ámbitos del quehacer humano es inevitable y su evolución pareciera no detenerse, incluyendo la educación en todos los niveles.

La introducción de la computación en el proceso del docente, permite contribuir al perfeccionamiento y optimización del sistema educativo y dar respuesta a las necesidades de la sociedad en este campo.

Estas herramientas se pueden usar para hacerle llegar al estudiante formas, métodos y prácticas que permitan mejorar el entorno de aprendizaje y por tanto contribuir a la adquisición de habilidades necesarias para él.

Los contenidos que se manejan e incluyen en Cálculo Vectorial, giran en torno a las gráficas en dos y tres dimensiones por lo que la interpretación, asimilación y comprensión de los conceptos estudiados están asociados con procesos de visualización de las superficies, eliminando toda confusión entre el objeto y su representación, asegurando el entendimiento matemático por parte del estudiante. Una de las funciones como docentes, es renovar las estrategias de enseñanza utilizando las computadoras y diferentes softwares que se encuentran disponibles, para hacer de las prácticas acciones llamativas e interesantes para los jóvenes de hoy.

Referente teórico

Muchos problemas requieren manipular modelos, donde las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) generan y permiten la visualización y utilización de diagramas dinámicos, donde los estudiantes a través de estas herramientas aprenden, toman decisiones a partir de su intuición y posteriormente verifican estas conjeturas (Baugh y Raymond, 2006).

Kutzler (2003), el creador del programa Derive, expresó acerca del uso de la tecnología en la educación matemática lo siguiente, para lo cual citó lo mencionado por William Shakespeare: "Nada es bueno o malo por sí mismo, únicamente se piensa que es así". Al considerar lo anteriormente mencionado se puede indicar lo siguiente: "Las calculadoras y los computadores no son ni buenas ni malas herramientas para la enseñanza, solamente se utilizan para hacer esto".

Infante, Quintero y Logreira (2010), consideran que "estas experiencias matemáticas pueden ser fructíferas siempre que se tenga en cuenta la complejidad del conocimiento matemático a enseñar, la complejidad de los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje de las matemáticas, teniendo en cuenta las dificultades y las necesidades de los estudiantes, aprovechen la tecnología para crear espacios en los que se pueda construir un conocimiento matemático más amplio y potente".

Con relación a estas herramientas, Balacheff y Kaput (1996) han señalado "los objetos virtuales que aparecen sobre la pantalla se pueden manipular de forma tal que se genera una sensación de existencia casi material, dando la posibilidad de introducir cambios y comprobar el efecto de los mismos".

La vista es nuestra fuente más importante de información sobre el mundo. La mayor parte del cerebro está involucrada en la visión: el control visual del movimiento, así como la percepción de las palabras impresas, forma y color de los objetos. Arcavi (2003) define la visualización como "la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre fotos, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en papel o en software, con el fin de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas antes desconocidas y avanzar en la comprensión".

Se considera que "los contextos de representación usados en la actividad matemática son necesariamente semióticos y tener en cuenta la naturaleza semiótica de las mismas implica tener en cuenta tanto las formas en que se utilizan como los requisitos cognitivos que involucran" (Duval, 2006), ya que no hay otras formas de acceder a los objetos matemáticos que no sea produciendo alguna representación caracterizada de esta manera.

Para Tamayo (2006) “las representaciones semióticas hacen referencia a todas aquellas construcciones de sistemas de expresión y representaciones que pueden incluir diferentes sistemas de escritura, como números, notaciones simbólicas, representaciones tridimensionales, gráficas, redes, diagramas, esquemas, etc. Cumplen funciones de comunicación, expresión, objetivación y tratamiento”.

Para mejorar la comprensión de los conceptos matemáticos u objetos matemáticos del saber, se emplean representaciones que permiten la asimilación de estructuras complejas, lo que implica, desde una perspectiva cognitiva, que para la total comprensión de las nociones matemáticas es preciso emplear y coordinar más de un sistema de representación (Macías, 2014).

Vicente Carrión, establece: "Obsérvese que no se habla de visualizar un diagrama sino de visualizar un concepto o problema. Esto último significa formar una imagen mental del diagrama; una buena observación de un problema significa entenderlo específicamente”. La visualización en matemáticas es un proceso para formar imágenes mentales con lápiz y papel, o con la ayuda de tecnología y utilizarla con efectividad para el descubrimiento y comprensión de nociones matemáticas" (Carrión, 1999).

Cuando el estudiante adquiere un concepto a través de registros visuales, y es capaz de manejarlos a través de un razonamiento matemático, se dice que se ha dado la comprensión de imágenes de un determinado tema.

Lo anterior pone de manifiesto la importancia que representa incluir los conceptos lógicos, aritméticos, geométricos o algebraicos en formas ilustrativas a través del software y con ello mejorar la asimilación de conjeturas complejas.

Por tanto, el objetivo de la investigación, fue determinar el efecto que tiene el uso didáctico del Software matemático GeoGebra, en el rendimiento académico de los estudiantes de Ingeniería.

Se establecen las siguientes hipótesis:

H_1: Los estudiantes pertenecientes al grupo experimental tratados a través de procesos de enseñanza innovadora con software matemático, evidencian mejores resultados académicos en Cálculo Vectorial, en comparación con los que tienen un proceso de enseñanza tradicional.

H_o: Los alumnos del grupo experimental tratados a través de procesos de enseñanza innovadora con software matemático, no evidencian mejores resultados académicos en Cálculo Vectorial, en comparación con los que tienen un proceso de enseñanza tradicional.

Metodología

El experimento se llevó a cabo en el Instituto Tecnológico de Aguascalientes, con alumnos inscritos en cuarto semestre en la materia de Cálculo Vectorial. Inicialmente, se totalizó una muestra de 61 estudiantes, distribuidos en dos grupos, un grupo de Ingeniería Industrial (40 alumnos), considerados como el grupo experimental (GE) y un grupo de Ingeniería Química y Bioquímica (21 alumnos), considerados como el grupo control (GC). El investigador no intervino en la selección ni en la composición de la muestra. El jefe del Departamento de Ciencias Básicas del Instituto Tecnológico de Aguascalientes asignó al investigador los grupos. Antes de que se formaran los grupos, ninguno de los 61 estudiantes tuvo conocimiento de que se iba a realizar un estudio de esta naturaleza en Cálculo Vectorial. Por ello, al inicio del semestre, a los estudiantes, se les informó sobre el experimento y su finalidad, y todos aceptaron por escrito formar parte del estudio. Se les aplicó un cuestionario exploratorio, con la finalidad de determinar sus experiencias en el uso de tecnología digital, y se demostró que ninguno había usado el software GeoGebra, en sus cursos previos a Cálculo Vectorial. El investigador fue el profesor del curso, junto con los responsables del diseño del experimento que se realizó en este estudio. La investigación es cuantitativa y su diseño cuasi-experimental.

Resultados

Se observa que de los 61 alumnos que conforman los dos grupos, el 34.426% son mujeres y el 65.574% son hombres. Por otro lado, en su consulta en referencia a su autoevaluación con respecto a Cálculo Diferencial, el 4.918% se considera excelente, 14.754% muy bien, 22.951% bueno, el 42.623% regular y el 14.754% malo respecto a sus conocimientos previos en esta asignatura. Al revisar Cálculo Integral en la autoevaluación se encontró que el 4.918% se considera excelente, el 13.115% muy bien, el 11.475% bueno, el 45.902% regular y el 24.590% malo. De manera global el 4.918% se considera en una situación de excelente, el 13.934% en muy bien, el 17.213% en bueno, el 44.262% en regular y el 19.672% en malo con respecto a sus conocimientos previos.

En la segunda sesión de inicio de clases, se aplica un examen diagnóstico, que permitió reflejar los conocimientos previos en Cálculo Diferencial y Cálculo Integral, con los que cuentan los estudiantes, el cual se integró con:

a) 6 preguntas informativas: nombre, edad, número de control, carrera a la que pertenece, semestre, opción en la que se ha llevado la asignatura (primera, segunda, tercera o especial).

b) 8 preguntas teóricas: una a dominio, una a rango, una a función, dos a límites, una a continuidad, una a derivación, una a integración.

c) 20 preguntas prácticas: tres de cálculo de límites, siete referidas a derivadas de funciones reales y diez a integrales de funciones reales.

Esta evaluación se aplicó en un mismo día en horarios diferentes, según su horario de asignación de la materia.

Tabla 1. *Análisis estadístico de las calificaciones obtenidas en el examen diagnóstico*.

	GC	GE
Número de alumnos	21	40
μ	73.7214	70.0926
Mediana	74.0741	70.3704
Modas	77.7778	70.3704 ,74.0741
Menor valor	62.9630	55.5556
Mayor valor	81.4815	85.1852
Rango	18.5185	29.6296
σ^2	19.4719	42.7896
σ	4.4127	6.5413
Desviación media	3.6113	4.9768

El 90.48% del GC acreditó el examen, al igual que el 62.5% del GE. El test incluyó 27 preguntas.

Una vez que se analizan los resultados, se determina los temas que requieren de reforzamiento; se llevó a cabo 4 sesiones de repaso de Cálculo Diferencial (una para cálculo de límites y 3 para derivada con fórmula) y 6 clases de Cálculo Integral (una con fórmula y 5 para los métodos de integración).

Tabla 2. *Análisis estadístico de las calificaciones obtenidas después del examen diagnóstico.*

	GC	GE
Número de alumnos	21	40
μ	79.1887	77.9629
Mediana	81.4815	77.7778
Modas	85.1852	77.7778
Menor valor	62.9630	59.2593
Mayor valor	92.5926	92.5926
Rango	29.6296	33.3333
σ^2	65.9430	54.8352
σ	8.1205	7.4051
Desviación media	6.8531	5.6111

El 95.24% del GC acreditó el examen, al igual que el 95% del GE. Del test, comprendió el 62.96% de Calculo diferencial y el 37.04% correspondió a Cálculo Integral.

Como se observa, se obtuvieron mejoras sustanciales en los promedios de calificaciones de los alumnos con respecto al examen diagnóstico, como consecuencia de una mejora en su aprovechamiento individual.

Tabla 3. *Prueba de Levene para el análisis de resultados después del curso de homogenización.*

	Prueba de Levene para la igualdad de varianzas	
	F observado	significancia
Se han asumido varianzas iguales	2.145	0.149

α =0.05

Para las varianzas de los dos grupos, concluimos con una F de 2.145 y una significancia de p=0.149 (p>α), mediante el test de Levene que las varianzas se pueden suponer iguales, es decir, los grupos son homogéneos.

Se procede al desarrollo del curso aplicando el software GeoGebra.

El software se emplea para la enseñanza de los temas, el cual ofrece una perspectiva en dos y en tres dimensiones, sin necesidad de recurrir al diseño en el pizarrón. El alumno debe obtener los resultados con el paquete matemático e incluir la comprobación manual. El estudiante podrá manipular la imagen obtenida, obteniendo diferentes perspectivas.

A continuación, se incluyen ejemplos de reportes por parte del estudiante.

1. Vectores y puntos en R^2:
   a) Dibuja, haciendo uso de GeoGebra, los siguientes puntos: A=(4,2), B=(-1,3), C=(-3,-5), D=(1,-5). Ver figura 1.
   b) Dibuja los siguientes vectores: $\vec{a}$ =(4,2), $\vec{b}$=(-1,3), $\vec{c}$=(-3,-5), $\vec{d}$=(1,-5). Ver figura 1.

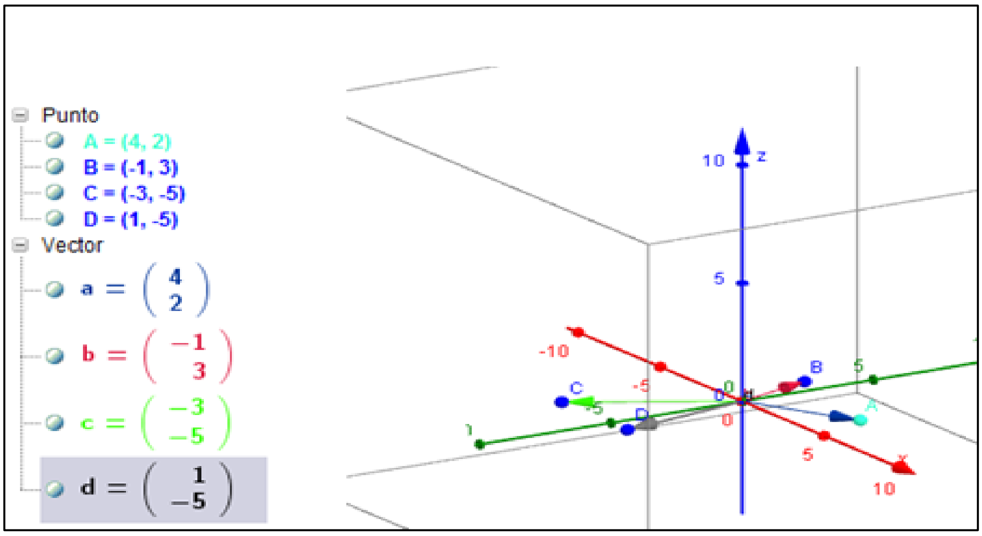
c) 

Figura 1. Percepción de la ubicación de puntos y vectores en dos dimensiones.

2. Vectores y puntos en R^3:
   a) Dibuja los siguientes puntos: A=(-3,5,-2), B=(-4,-3,-5), C=(1,-3,2), D=(-4,4,2).
   b) Dibuja los siguientes vectores: $\vec{a}$=(-3,5,-2), $\vec{b}$=(-4,-3,-5), $\vec{c}$=(1,-3,2), $\vec{d}$=(-4,4,2).
3. Dados $\vec{a} = (3,-4{,}5)$ y $\vec{b} = (-1{,}5{,}2)$, determina: $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$

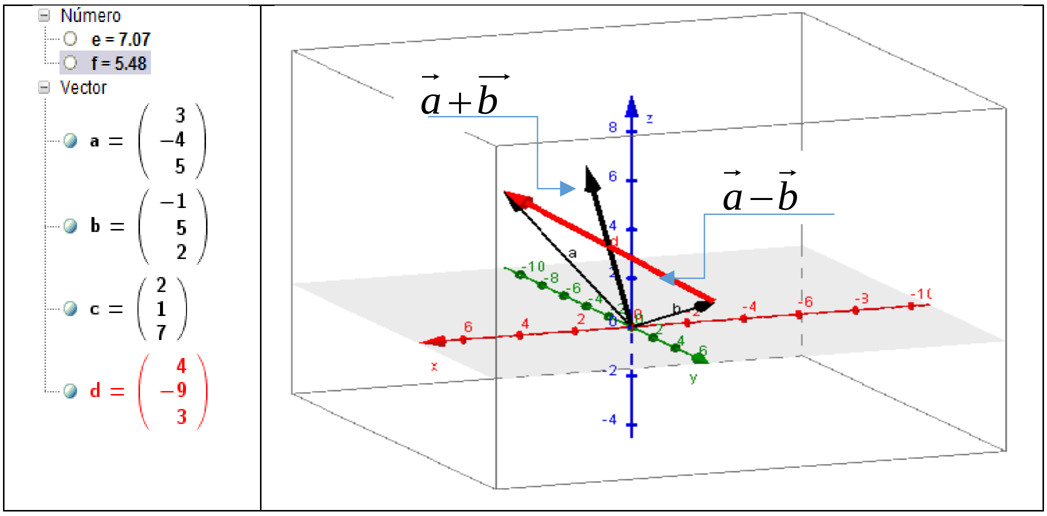


Figura 2. De donde e= $|\vec{a}|$, f= $|\vec{b}|$, c=$\vec{a} + \vec{b}$, d=$\vec{a} - \vec{b}$ que son los resultados obtenidos a través de GeoGebra.

Comprobación por parte del estudiante:

$$e = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2 + (5)^2}$$
$$=\sqrt{9 + 16 + 25}$$
$$=\sqrt{50}$$
$$=7.071$$
$$f = \sqrt{(-1)^2 + (5)^2 + (2)^2}$$
$$=\sqrt{1 + 25 + 4}$$
$$=\sqrt{30}$$
$$=5.477$$

$$c = (3,-4{,}5) + (-1{,}5{,}2)$$
=(3-1,-4+5,5+2)
=(2,1,7)
$$d = (3,-4{,}5) - (-1{,}5{,}2)$$
=(3+1,-4-5,5-2)
=(4,-9,3)

4. Determina los ángulos directores del vector $\vec{a}$=(3,4,6)

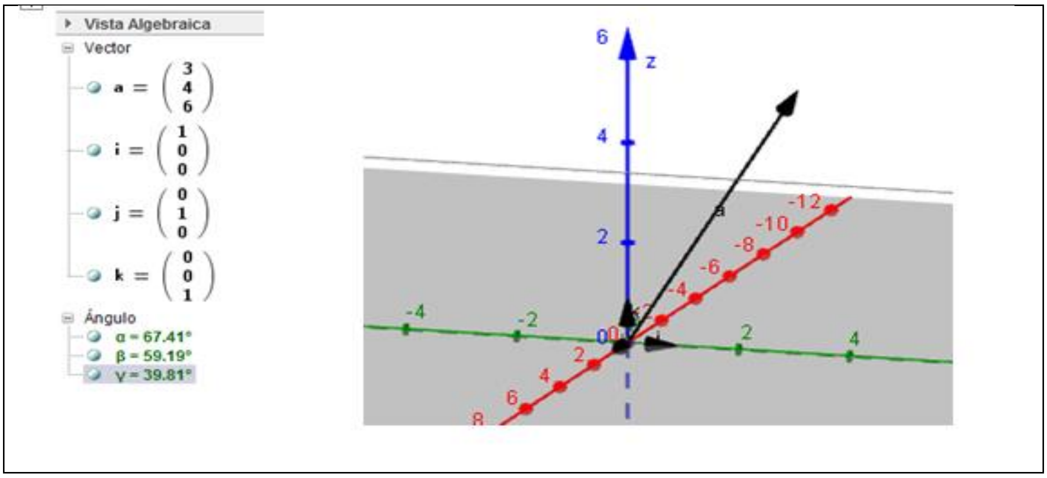


Figura 3. En GeoGebra, se generan primeramente los vectores unitarios sobre los ejes.

Comprobación por parte del estudiante:

$$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{(3)^2+(4)^2+(6)^2}}\right) = 67.4115^o$$
$$\beta = cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{(3)^2+(4)^2+(6)^2}}\right) = 59.1930^o$$
$$\gamma = cos^{-1}\left(\frac{6}{\sqrt{(3)^2+(4)^2+(6)^2}}\right) = 39.8056^o$$

5. Dados los vectores: $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ y $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = -3i - 4j - 5k$ determina:

a) Su producto escalar $p = \vec{a} \cdot \vec{b}$.

b) Ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$

c) Su producto vectorial $\vec{p} = \vec{a} \times \vec{b}$.

d) El producto mixto $\vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$

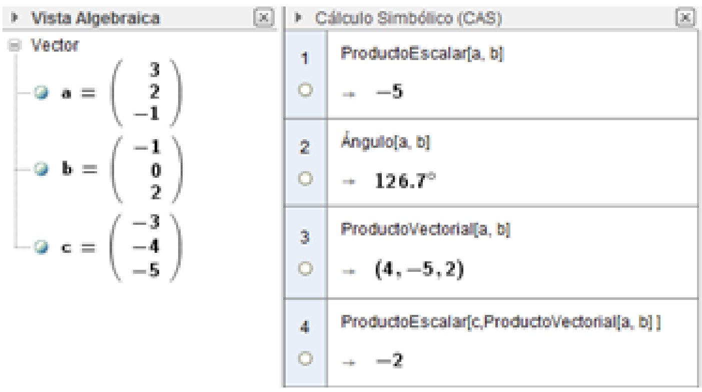


Figura 4. Pantalla generada por GeoGebra al ingresar en "vista" de la barra de herramientas e introducir la acción directamente.

Comprobación por parte del estudiante:

$$p = (3,2,-1) \bullet (-1,0,2) = (3)(-1) + (2)(0) + (-1)(2) = -5$$

$$\theta = Cos^{-1}\frac{(3,2,-1) \bullet (-1,0,2)}{\sqrt{(3)^2 + (2)^2 + (-1)^2}\sqrt{(-1)^2 + (0)^2 + (2)^2}}$$

$$=Cos^{-1}\frac{-5}{8.3666} = 126.6992^{o}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4i - 5j + 2k = (4,-5,2)$$

$$\vec{c} \bullet (\vec{a} \times \vec{b}) = (-3,-4,-5) \bullet (4,-5,2) =$$

$$= -12 + 20 - 10 = -2$$

6. Determina la longitud de arco de la curva en el intervalo dado si $x=e^{-t}\cos(t)$; $y=e^{-t}\operatorname{sen}(t)$, considerando $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

Graficando con GeoGebra 5.0, se obtiene la imagen mostrada en la figura 6, así como los cálculos respectivos para determinar la longitud de la curva en el intervalo dado

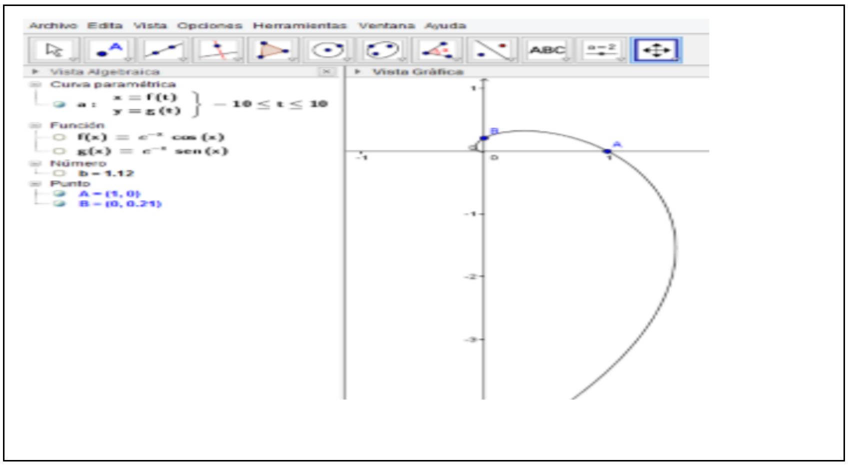


Figura 5. Se introducen las funciones, enseguida se parametriza y posteriormente se calcula la longitud deseada. Obteniéndose un resultado de d=1.12 con GeoGebra.

Comprobación por parte del estudiante:

$$x = e^{-t}Cos(t) \rightarrow \frac{dx}{dt} = -e^{-t}Cos(t) - e^{-t}Sen(t)$$

$$= -\,e^{-t}(Cos(t) + Sen(t))$$

$$y = e^{-t}Sen(t) \rightarrow \frac{dy}{dt} = -e^{-t}Sen(t) + e^{-t}Cos(t)$$

$$= -\,e^{-t}(-Cos(t) + Sen(t))$$

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(-e^{-t}(Cos(t) + Sen(t))\right)^2 + \left(-e^{-t}(-Cos(t) + Sen(t))\right)^2}\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2e^{-2t}(Cos^2(t) + Sen^2(t))}\,dt$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t}\,dt = -\sqrt{2}[e^{-t}]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\sqrt{2}\left[e^{-\frac{\pi}{2}} - e^{0}\right] = 1.1202$$

El resultado de s=1.12 obtenido con los cálculos por parte del estudiante es igual al de d=1.12 con GeoGebra 5.0.

Resultados

Una vez aplicados los instrumentos de evaluación en cada una de las unidades, después de ser utilizado el software, los resultados obtenidos indican que el 90.48% de los estudiantes del GC y el 100% del GE acreditaron. A continuación, se muestran en la tabla 5 los datos estadísticos de los promedios finales reportados en las actas correspondientes que se encuentran en el departamento de Control Escolar.

Tabla 4**.** *Datos estadísticos de los resultados obtenidos.*

	GC	GE
Número de alumnos	21	40
μ	80.3095	90.5563
σ^2	119.2256	31.2734
σ	10.9190	5.5923

Definimos como:

μ_0 = Media del GC.

μ_1= Media del GE.

Planteamiento de hipótesis:

H_0: $\mu_0 = \mu_1$ y no hay diferencia significativa en los grupos.

H_1: $\mu_0 \neq \mu_1$ y existe diferencia significativa entre los grupos.

Con un ensayo bilateral con nivel de significancia de $\alpha = 0.05$ y con 57 grados de libertad, t=-4.436 y p=0.0001<α, se acepta la hipótesis alterna, es decir, los grupos son significativamente diferentes. El intervalo de confianza para la diferencia de medias es de (-14.173,-5.356), al cual 0 no pertenece, nos indica que las medias son diferentes y podemos considerar que el incremento de las calificaciones de los estudiantes al utilizar software educativo GeoGebra, es probablemente significativo, ya que μ_o<μ_1 en 10.2468. El riesgo de rechazar la hipótesis nula H_o cuando es verdadera es inferior al 0,01%. Ver Tabla 5.

Tabla 5. *Prueba t.*

Prueba t para la igualdad de medias	
t	-4.436
Grados de libertad (gl)	57
Significancia (bilateral)	<0.0001
Diferencia de medias	-10.2468
95% intervalo de confianza para la diferencia	-14.173
	-5.356

$\alpha = 0.05$

Conclusiones

Se demostró que los estudiantes pertenecientes al grupo experimental tratados a través de procesos de enseñanza innovadora con software matemático evidencian mejores resultados académicos en Cálculo Vectorial, en comparación con los que tienen un proceso de enseñanza tradicional (para el GE con μ=90.5563 y para el GC con μ=80.3095). Así como, el empleo de software, permitió una mejor conceptualización y fundamentación de los procesos matemáticos, con lo cual los estudiantes lograron una mayor motivación hacia el estudio.

Los resultados obtenidos demostraron que la computadora es un eficaz instrumento en el proceso de enseñanza del Cálculo Vectorial, ya que a los estudiantes se les da una atención diferenciada, se obtienen mejoras en su actividad cognoscitiva al no ser solamente espectadores; les permite hacer comprobaciones, generar variaciones en los cálculos, velocidad de trabajo, versatilidad y flexibilidad, favorece la retroalimentación y perfeccionamiento de los productos.

Biobliografía

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 52, pp. 215–241. https://doi.org/10.1023/A:1024312321077

Balacheff, B., Kaput J. (1996). Computer-Based Learning Environment in Mathematics., En Bishop, A. J. et al, *International Handbook of Mathematical Education,* 1996, pp. pp. 469-501.

Baugh, Raymond, A. (2003). Making Math Success Happen: The Best of Learning &Leading with Technology on Mathematics, EE.UU: The International Society for Technology in Education (ISTE) EE.UU. http://popbooks.xyz/?book=1564841804.

Carrión, V. (1999). Álgebra de Funciones mediante el proceso de visualización. *Revista Iberoameciana de Educación.*

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics* (2006) 61: 103–131 DOI: 10.1007/s10649-006-0400-z C Springer. http://www.edumatec.mat.ufrgs.br/artigos/esm_2008_v68/5semiotic.pdf

http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/GACETARSME_2006_9_1_05.pdf, 2006. [En línea]. [Último acceso: 10 Octubre 2015].

Infante, P., Quintero H., Logreira C. (2010). Integración de la Tecnología en la Educación Matemática. *Revista Electrónica de Estudios telemáticos*, vol. 9, nº 1, p. 5.

Kutzler, B. (2000). The Algebraic Calculator as a Pedagogical Tool for Teaching Mathematics. *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, v7 n1 p5-23. https://eric.ed.gov/?id=EJ647974. Traducido por Jímenez, J. R. 2003. *El uso del sistema de cómputo simbólico* Voyage 200™ *como recurso didáctico.* http://mat.uson.mx/calculadora/KUTZLERJRJR.htm#_ftn1.

Macías, J. (2014). Los registros semióticos en matemáticas como elemento personalizado en el aprendizaje. *Revista de Investigación Educativa Conect@2,* pp. 27-57.

Tamayo, O. E. (2006). Representaciones semióticas y evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas. *Revista Educación y Pedagogía,* vol. XVIII, nº 45, pp. pp. 37-49.