

## UMA NOVA CATEGORIZAÇÃO PARA AS INTERPRETAÇÕES DE DIVISÃO DE FRAÇÕES

Jeferson Gomes Moriel Junior  
[jeferson.moriel@cba.ifmt.edu.br](mailto:jeferson.moriel@cba.ifmt.edu.br)  
Instituto Federal de Mato Grosso (IFMT), Brasil

Núcleo temático: I. Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos

Modalidade: Comunicação Breve (CB)

Nível educativo: Educación primária

Palavras-chave: MTSK divisão de frações, Interpretações, Problemas, Categorização.

### Resumo

*O objetivo deste trabalho é analisar as diferentes categorizações de interpretações atribuídas à divisão de frações visando identificar características-chave dos problemas associados, por meio dos quais se pode explorar algoritmos da operação. Apresentamos aqui parte dos resultados de uma meta-análise qualitativa sobre o Conhecimento Especializado de Professores de Matemática (MTSK) da divisão de frações envolvendo um corpus de 58 estudos sobre conhecimento para o ensino deste conteúdo, no qual realizamos leituras sucessivas e análise de conteúdo que culminaram na emergência de seis características-chave de problemas de divisão de frações. Tais resultados configuram uma caracterização que distingue as interpretações não apenas pelo significado da operação envolvido, mas também pelos tipos de grandezas envolvidas nos problemas, sua quantidade e modo como elas se relacionam, aspectos estes essenciais, mas ausentes na maioria das categorizações revisadas. As novas categorias aqui emergentes unificam as contribuições da literatura e acreditamos que elas permitem avançar em termos de funcionalidade nas atividades de classificar e criar problemas para o ensino de divisão de frações. Algo relevante considerando que as investigações sobre o conhecimento docente evidenciam dificuldades dos sujeitos em elaborar problemas ou associar algum contexto a uma expressão dada.*

### Introdução

As interpretações da divisão de frações são os diferentes tipos de problemas e modelos instrucionais que podem ser categorizados como situações de divisão de frações, nas quais se pode explorar os algoritmos desta operação (Sinicrope, Mick, & Kolb, 2002). Elas surgem por extensão, mas sem se limitar, às três interpretações de divisão de números inteiros: partição (determinar o tamanho de cada grupo), medida (determinar a quantidade de grupos)

e inverso do produto cartesiano (determinar uma das dimensões de uma figura retangular). Embora sua quantidade varie consideravelmente na literatura, é comum que (futuros) professores conheçam e utilizem apenas uma ou duas delas (Ball, 1990; Isiksal & Cakiroglu, 2007; Kribs-Zaleta, 2006; Lo & Luo, 2012; Lubinski, Fox, & Thomason, 1998; Tirosh, 2000). Investigações sobre o conhecimento docente relacionado a problemas de divisão de frações evidenciam dificuldade dos sujeitos em elaborar ou associar um contexto a uma expressão dada, de modo que isto não parece melhorar por si só ao longo da carreira (Chinnappan & Desplat, 2012; García, 2013; Lo & Luo, 2012; Nillas, 2003; Özel, 2013; Redmond, 2009; Sharon & Swarthout, 2014). Esta limitação no conhecimento especializado para ensinar divisão de frações (Carrillo et al., 2014; Moriel Junior, 2014), pode dificultar que sejam proporcionadas situações didáticas ricas aos alunos para a construção profunda do significado do conceito. Este cenário sugere a necessidade de aprimorar a preparação docente e nos parece importante esforços para tornar o instrumental conceitual formativo mais funcional. Por isso, estabelecemos como objetivo deste trabalho analisar as diferentes categorizações (incluindo nomenclaturas, descrições e exemplos) de interpretações atribuídas à divisão de frações visando identificar características-chave dos problemas associados.

### **Metodologia**

Este trabalho é uma pesquisa bibliográfica, de cunho analítico-descritivo, que visa aprofundar parte dos resultados de uma meta-análise qualitativa (Bicudo, 2014; Fiorentini & Lorenzato, 2006) sobre o Conhecimento Especializado de Professores de Matemática da divisão de frações (Moriel Junior, 2014), cuja busca por artigos foi realizada em seis bancos de dados (JSTOR, ERIC, Banco de Teses da CAPES, SciELO, Base de dados da Revista do Professor de Matemática e no Google Scholar) usando palavras-chave sobre o tema de interesse (*conhecimento docente sobre divisão de frações*) que resultou num *corpus* de 58 estudos. Dentre eles, oito foram selecionados como fonte de dados deste artigo por abordarem especificamente as interpretações da divisão de frações, também encontradas sob a denominação de estrutura ou classificação de problemas, sentidos de uso ou modelos semânticos (Contreras, 2012).

A análise dos dados ocorreu por meio da análise de conteúdo, incluindo leituras sucessivas do material selecionado incluindo exploratória, seletiva e interpretativa (Salvador, 1986) e

realização de comparações sistemáticas que permitiram identificar similaridades e distinções entre os trabalhos no que diz respeito aos seguintes focos: nomenclaturas das interpretações, descrições de cada interpretação, tipos de grandezas envolvidas nos problemas associados, sua quantidade e como elas se relacionam. Entendemos uma grandeza como sendo o valor numérico associado a uma unidade de medida que é usado para caracterizar um objeto. Esta abordagem resultou na emergência de características-chave de problemas associados às interpretações da divisão de frações presentes na literatura revisada.

## Resultados

Quanto à nomenclatura, identificamos nos trabalhos uma variedade considerável de terminologias, totalizando 20 distintas. A análise de cada uma juntamente com as respectivas descrições, significados e exemplos, nos permitiu agrupar as interpretações da divisão de frações em torno de seis características-chave que contemplam os *tipos de grandezas* envolvidas nos problemas associados, sua *quantidade* e *como se relacionam*, algo não explícito na maioria das nomenclaturas revisadas, conforme Quadro 1. A seguir, apresentamos os elementos que justificam cada uma das características-chave de problemas de divisão de frações, construídas a partir das interpretações analisadas.

**Quadro 1.** Característica-chave de problemas de divisão de frações e respectiva equivalência entre nomenclaturas das interpretações de divisão de frações

NOMENCLATURAS EQUIVALENTES DAS INTERPRETAÇÕES	CARACTERÍSTICA-CHAVE
Partição <sup>1</sup> ; Partição com foco em compartilhar ou dividir igualmente <sup>2</sup> ; Compartilhamento <sup>3</sup>	1. Distribuição por inteiros
Medida, cotição ou subtração repetida <sup>4</sup> ; Empacotamento <sup>5</sup> ; Divisão medição por comparação <sup>6</sup>	2. Comparação em uma grandeza
Inverso da multiplicação <sup>7</sup> ; Razão unitária <sup>8</sup> ; Inversão do fator multiplicativo <sup>9</sup> ; Divisão partição por comparação <sup>10</sup>	3. Transformação de uma grandeza dada uma razão adimensional
Proporção de valor unitário conhecido <sup>11</sup> ; Divisão medição equitativa <sup>12</sup>	4. Proporção entre duas grandezas com um valor unitário conhecido
Determinação da razão unitária <sup>13</sup> ; Divisão partição equitativa <sup>14</sup> ; Proporção de valor unitário desconhecido <sup>15</sup>	5. Proporção entre duas grandezas em busca do valor unitário desconhecido
Divisão como inverso do produto cartesiano <sup>16</sup> ; Divisão de área retangular <sup>17</sup> ; Produto e fatores <sup>18</sup> ; Inverso do produto	6. Um fator desconhecido de um produto (área retangular)

NOMENCLATURAS EQUIVALENTES DAS INTERPRETAÇÕES	CARACTERÍSTICA-CHAVE
cartesiano (área) <sup>19</sup> ; Inversão da multiplicação (ou fator perdido) <sup>20</sup>	

**Fonte:** Dados organizados pelo autor a partir do *corpus* analisado.

**Notas.** 1 (Contreras, 2012; Olanoff, 2011; Özel, 2013). 2 (Nillas, 2003; Sinicrope et al., 2002). 3 (Puritz, 2005). 4 (Contreras, 2012; Nillas, 2003; Olanoff, 2011; Özel, 2013; Sinicrope et al., 2002). 5 (Puritz, 2005). 6 (Lo & Luo, 2012). 7 (Sinicrope et al., 2002), 8 (Nillas, 2003). 9 (Contreras, 2012). 10 (Lo & Luo, 2012). 11 (Contreras, 2012). 12 (Lo & Luo, 2012). 13 (Sinicrope et al., 2002). 14 (Lo & Luo, 2012). 15 (Contreras, 2012). 16 (Sinicrope et al., 2002). 17 (Lo & Luo, 2012). 18 (Ma, 1999; Olanoff, 2011). 19 (Nillas, 2003). 20 (Contreras, 2012).

A primeira característica-chave foi intitulada de distribuição por inteiros por dizer respeito à interpretação da divisão de frações como *distribuição* de valor fracionário entre inteiros, ou seja, em determinar o tamanho de cada uma das partes quando se sabe o número (inteiro) de partes. A segunda foi nomeada de comparação em uma grandeza por tratar de *comparar* dois valores de uma mesma unidade de medida escolhendo uma delas para ser a unidade de referência, o resultado indicará quanto o dividendo contém tal unidade (o divisor), podendo ser fração própria ou imprópria. Quando o dividendo é maior que o divisor a solução pode ser também por subtração repetida (Olanoff, 2011) ou adição repetida (Nillas, 2003). A terceira, transformação de uma grandeza dada uma razão adimensional, diz respeito à *transformação* de uma grandeza dada pela medida A (ou pelo valor de uma parte de um todo) sabendo a razão adimensional A/B entre a medida A e uma medida B (ou entre os valores da parte e do todo) para obter o valor da medida B (ou do todo) na mesma unidade de A. Isto se traduz em “fazer o dividendo tantas vezes menor quanto indica o numerador do divisor e tantas vezes maior quanto indica o denominador do divisor” (Contreras, 2012, p.84, tradução nossa). A ideia de operador é um fundamento desta interpretação, mas ela se diferencia de problemas de multiplicação porque nestes a razão dada é B/A (ou do todo pela parte) ao invés de ser A/B. A quarta, proporção entre duas grandezas com um valor unitário conhecido, se justifica por consistir no cálculo da *proporção* entre duas grandezas diferentes sendo uma delas o valor unitário entre as grandezas. Cabe determinar uma quantidade (Q) de uma grandeza associada a uma quantidade dada (D) de outra grandeza quando se conhece o valor unitário da segunda em relação à primeira ( $\frac{d}{1}$ ). A quinta, proporção entre duas grandezas em busca do valor unitário desconhecido, diz respeito ao uso da *proporção* entre duas grandezas diferentes como meio de determinar o valor unitário *desconhecido* de uma em relação a outra.

Trata-se de encontrar o valor unitário (Q) a partir da relação entre duas quantidades de duas grandezas distintas ( $\frac{D}{d}$ ). Problemas que envolvam o cálculo de velocidade, densidade ou preço unitário são exemplos deste modelo. A sexta, um fator desconhecido de um produto (área retangular), é muito associada a problemas de área retangular, pois consiste em calcular um *fator* desconhecido de um produto entre dois fatores, ou seja, obter uma das medidas (m) quando se conhece a outra (M) e o produto delas ( $P = m \cdot M$ ).

A análise dos problemas presentes nos trabalhos revisados nos permitiu elaborar exemplos associados a cada característica-chave (cf. Quadro 2). Além disso, constatamos que um mesmo contexto (por exemplo, envolvendo divisão e farinha) pode gerar a redação de diferentes problemas e, conseqüentemente, enfatizar interpretações distintas da divisão de frações (como se vê nas características-chave 2 e 4 do Quadro a seguir). Para reforçar a diferença entre interpretações e a exaustividade das categorias, complementamos a descrição anterior com a análise das unidades envolvidas nos respectivos problemas (cf. última coluna do Quadro 2), permitindo assim melhor compreender a natureza dos mesmos (Flores, 2008).

**Quadro 2.** Interpretações para divisão de frações, exemplos de problemas associados e soluções

CARACTERÍSTICA-CHAVE	EXEMPLOS DE PROBLEMAS ASSOCIADOS	SOLUÇÃO [UNIDADE]	ANÁLISE DE UNIDADES
1. Distribuição por inteiros	- Se $\frac{3}{7}$ de um bolo foi repartido entre 5 crianças, quanto do bolo terá cada uma delas? - Repartir $\frac{3}{7}$ de um saco de balas entre 5 crianças.	$\frac{3}{7} \div 5$ [do bolo] [do saco]	Dividendo e quociente tem mesma unidade, divisor inteiro
2. Comparação em uma grandeza	- Quantas vezes $\frac{1}{4}$ kg de farinha cabe em $5\frac{1}{2}$ kg de farinha? - Hoje me exercitei $\frac{1}{4}$ de hora e ontem $1\frac{1}{2}$ hora. Quantas vezes me exercitei hoje comparado a ontem?	$5\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$ [vezes] $\frac{1}{4} \div 1\frac{1}{2}$ [vezes]	Dividendo e divisor tem mesma unidade
3. Transformação de uma grandeza dada uma razão adimensional (A em B dado A/B)	- Qual é o tamanho original de um elástico que esticado mede $1\frac{1}{2}$ m, sabendo que ele pode ser esticado até $4\frac{1}{4}$ vezes seu tamanho? - João correu $1\frac{1}{2}$ km ontem e isto é $\frac{3}{8}$ da sua meta, assim sendo, quantos quilômetros ele planeja correr?	$1\frac{1}{2} \div 4\frac{1}{4}$ [metro] $1\frac{1}{2} \div \frac{3}{8}$ [km]	Dividendo e quociente tem mesma unidade, divisor é razão adimensional

CARACTERÍSTICA-CHAVE	EXEMPLOS DE PROBLEMAS ASSOCIADOS	SOLUÇÃO [UNIDADE]	ANÁLISE DE UNIDADES
4. Proporção entre duas grandezas com um valor unitário conhecido	- Quantos pacotes eu posso fazer usando $5\frac{1}{2}$ kg de farinha sabendo que cabe $\frac{1}{4}$ kg em um pacote? - Quanto tempo um barco demora para percorrer $5\frac{1}{2}$ km indo a $7\frac{1}{2}$ km por hora?	$5\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$ [pacotes] $5\frac{1}{2} \div 7\frac{1}{2}$ [hora]	Todas unidades são diferentes, divisor é valor unitário entre duas unidades
5. Proporção entre duas grandezas em busca do valor unitário desconhecido	- Quantos quilômetros o carro percorre com 1 tanque de combustível, em se $10\frac{1}{2}$ km ele usa $\frac{3}{4}$ de tanque? - Quantos centímetros mede uma polegada, sabendo que $2\frac{1}{2}$ polegadas medem aproximadamente $6\frac{1}{3}$ cm?	$10\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$ [km por tanque] $6\frac{1}{3} \div 2\frac{1}{2}$ [cm por pol.]	Todas unidades são diferentes, quociente é valor unitário entre as unidades
6. Um fator desconhecido de um produto (área retangular)	- Se a área de um retângulo tem $3\frac{3}{4}$ m <sup>2</sup> e sua largura $1\frac{1}{2}$ m, qual é seu comprimento? - Sete metros de arame são suficientes para cercar a horta retangular de largura $1\frac{1}{2}$ metros e área $3\frac{3}{4}$ m <sup>2</sup> ?	$3\frac{3}{4} \div 1\frac{1}{2}$ [metro]	Dividendo e quociente tem unidades diferentes

**Fonte:** Dados organizados pelo autor a partir do *corpus* de estudos revisado.

Analisando os problemas do contexto envolvendo divisão e farinha, apresentados nas características-chave 2 e 4 do quadro anterior, percebemos que embora suas redações sejam parecidas e sejam resolvidos pela a mesma divisão de frações ( $5\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$ ), a análise das unidades envolvidas mostra que eles tem naturezas e significados diferentes. Isto porque o problema ‘quantas vezes  $\frac{1}{4}$  kg de farinha cabe em  $5\frac{1}{2}$  kg de farinha?’ trata da *comparação em uma grandeza* e possui unidades diferentes no dividendo (kg de farinha) e no quociente (quantidade de vezes). Enquanto que o problema ‘quantos pacotes eu posso fazer usando  $5\frac{1}{2}$  kg de farinha sabendo que cabe  $\frac{1}{4}$  kg em um pacote?’ trata de *proporção entre duas grandezas com um valor unitário conhecido* tendo todas as unidades diferentes entre si, sendo que a do divisor (kg/pacote) é o valor unitário dado em função das unidades do dividendo (kg) e do quociente (pacote). Outro exemplo de redações diferentes ocorre em contexto de alargamento de elástico, contemplando a *transformação em uma grandeza dada uma razão adimensional* (cf. quadro

anterior) e a *comparação em uma grandeza*: “Um elástico medindo  $\frac{1}{4}$  metro pode esticar até  $1\frac{1}{2}$  m. Qual é o fator de alargamento?” (Flores, 2008, p. 3, tradução nossa).

## Conclusões

A análise da variedade de nomenclaturas e descrições das interpretações encontradas no *corpus*, nos levou a agrupá-las em torno de características-chave que as distinguem não apenas pelo significado da divisão com frações envolvido, mas também considerando os tipos, a quantidade de grandezas envolvidas nos problemas e como se relacionam. Estes aspectos considerados essenciais (Flores, 2008; Piel & Green, 1994) não estão explícitos na maioria das *nomenclaturas* revisadas, embora tenham sido descritos (ora mais, ora menos detalhados) no interior dos trabalhos. Ao trazermos os elementos definidores das interpretações para a terminologia de cada categoria, configuramos *seis características-chave de problemas de divisão de frações*, as quais acompanhadas de exemplos e da análise das unidades envolvidas nos problemas fornecem uma categorização que para além de unificar as contribuições de estudos anteriores, possibilita avançar em termos de funcionalidade nas atividades de classificar e criar problemas para o ensino de divisão de frações. Isto porque o nome de cada categoria explicita não só o significado ou ação da divisão de frações (distribuição, comparação, transformação, proporção ou busca de um fator), como também indica os *tipos de grandezas* envolvidas nos problemas associados, sua *quantidade, como se relacionam*, incluindo a análise das unidades do divisor, do dividendo e do quociente.

Os resultados deste trabalho mostram que para elaborar um problema de divisão de frações é preciso ter conhecimento especializado para criar um contexto que tenha uma única grandeza, cujo problema será a comparação entre duas quantidades dela, ou então que tenha duas grandezas sendo uma quantidade fracionária e a outra podendo ser: (a) um inteiro, resultando em problemas de distribuição; (b) uma razão adimensional resultando em um problema de transformação; (c) um valor unitário entre as grandezas, resultando num problema de proporção; (d) uma fração com unidade diferente da primeira, resultando em um problema de proporção (para achar o valor unitário); (e) uma fração com unidade derivada da primeira (como metros e metros quadrados), resultando em um problema sobre



o fator de um produto ou área retangular. Tal compreensão parece ser relevante considerando que as investigações sobre o conhecimento docente relacionado a problemas evidenciam dificuldades dos sujeitos em criá-los (Chinnappan & Desplat, 2012; García, 2013; Nillas, 2003; Özel, 2013; Redmond, 2009; Sharon & Swarthout, 2014).

Estudos teórico-empíricos posteriores serão realizados para aprofundar a compreensão do alcance das contribuições do uso desta categorização em atividades de formação docente (como elaboração de problemas/contextos para uma dada expressão, classificação de problemas já existentes, associação entre os problemas gerados em cada categoria e algoritmos associados), bem como, investigar seu impacto na construção de conhecimento especializado para ensinar divisão de frações por meio da metodologia da resolução de problemas.

## Referências

- Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 132-144.
- Bicudo, M. A. V. (2014). Meta-análise: seu significado para a pesquisa qualitativa. *Revemat: revista eletrônica de educação matemática*, 9, 7-20.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., Montes, M. Á., Escudero, D., & Medrano, E. F. (2014). *Un marco teórico para el Conocimiento especializado del Profesor de Matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.
- Chinnappan, M., & Desplat, B. (2012). Contextualisation of Fractions: Teachers' Pedagogical and Mathematical Content Knowledge for Teaching. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia*, 35(1), 43-59.
- Contreras, M. (2012). *Problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones: un estudio sobre su enseñanza y aprendizaje*. (Doutorado), Universidad de Valencia, Valencia.
- Fiorentini, D., & Lorenzato, S. (2006). *Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos*. Campinas: Autores Associados.
- Flores, P. (2008). El algoritmo de la división de fracciones. *Epsilon*, 25(70), 27-40.
- García, A. I. M. (2013). *Conocimiento profesional de un grupo de profesores sobre la división de fracciones*. (Máster), Universidad de Granada, Granada.
- Isiksal, M., & Cakiroglu, E. (2007). Pre-service teachers' representations of division of fractions. In D. P. Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1916-1924). Cyprus: European Research in Mathematics Education V.
- Kribs-Zaleta, C. (2006). Invented strategies for division of fractions. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of*



- Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 371-376). Meridia, Mexico: Universidad Pedagógica Nacional.
- Lo, J.-J., & Luo, F. (2012). Prospective elementary teachers' knowledge of fraction division. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15(6), 481-500.
- Lubinski, C. A., Fox, T., & Thomason, R. (1998). Learning to Make Sense of Division of Fractions: One K–8 Preservice Teacher's Perspective. *School Science and Mathematics*, 98(5), 247-259.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*: Lawrence Erlbaum Associates Mahwah, NJ.
- Moriel Junior, J. G. (2014). *Conhecimento especializado para ensinar divisão de frações*. (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática Tese), Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá.
- Nillas, L. (2003). Division of fractions: Preservice teachers' understanding and use of problem solving strategies. *The Mathematics Educator*, 7(2), 96-113.
- Olanoff, D. E. (2011). *Mathematical Knowledge for Teaching Teachers: The Case of Multiplication and Division of Fractions*. (PhD), Syracuse University, NY.
- Özel, S. (2013). An Analysis of In-service Teachers' Pedagogical Content Knowledge of Division of Fractions. *Anthropologist*, 16(1-2), 1-5.
- Piel, J. A., & Green, M. (1994). De-Mystifying Division of Fractions: The Convergence of Quantitative and Referential Meaning. *Focus on learning problems in mathematics*, 14(1), 44-50.
- Puritz, C. (2005). Dividing by Small Numbers—and Why Not by 0? *Mathematics in School*, 34(5), 2-4.
- Redmond, A. (2009). *Prospective Elementary Teachers' Division of Fractions Understanding: A Mixed Methods Study*. (Doctor of Philosophy Thesis), University of Phoenix, Stillwater.
- Salvador, A. D. (1986). *Métodos e técnicas de pesquisa bibliográfica*. Porto Alegre: Sulina.
- Sharon, V. V., & Swarthout, M. B. (2014). Evaluating instruction for developing conceptual understanding of fraction division. In G. T. Matney & S. M. Che (Eds.), *Proceedings of the 41th Annual Meeting of the Research Council on Mathematics Learning* (pp. 97-104). San Antonio: RCML.
- Sinicrope, R., Mick, H. W., & Kolb, J. R. (2002). Interpretations of fraction division. In B. Litwiller (Ed.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 153-161). Reston: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).
- Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 5-25.