

## ASPECTOS DEL DISCURSO DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS CUANDO CONSTRUYEN DEFINICIONES MATEMÁTICAS

Alfonso J. González-Regaña – Verónica Martín-Molina – Aurora Fernández-León  
Rocío Toscano-Barragán – José María Gavilán-Izquierdo  
[agonzalez@us.es](mailto:agonzalez@us.es) – [veronicamartin@us.es](mailto:veronicamartin@us.es) – [auroraf1@us.es](mailto:auroraf1@us.es) – [rtoscano@us.es](mailto:rtoscano@us.es) –  
[gavilan@us.es](mailto:gavilan@us.es)

Universidad de Sevilla. España

Núcleo temático: Aspectos socioculturales de la Educación Matemática

Modalidad: Comunicación Breve (CB)

Nivel educativo: Formación Universitaria

Palabras clave: comognición, discurso, definir, estudiantes universitarios

### Resumen

*En este trabajo estudiamos el proceso de definir de estudiantes universitarios para profesor a través del análisis del discurso matemático. Concretamente, nos centraremos en los resultados que hemos obtenido al analizar dicho discurso cuando los estudiantes definen cuerpos geométricos tridimensionales. Nuestra investigación adopta una perspectiva sociocultural. En particular, el marco teórico que utilizamos es el de la comognición (commognition, unión de communication y cognition), propuesto por Sfard (2008), que considera que el aprendizaje matemático es un cambio en el discurso matemático.*

### Introducción

La investigación en educación matemática a nivel universitario ha adquirido una gran importancia en los últimos años. Por ejemplo, Rassmusen, Zandieh, King y Teppo (2005) han caracterizado el *pensamiento matemático avanzado*, que incluye prácticas matemáticas como definir, probar, simbolizar, etc. En este trabajo, nos centramos en la práctica de definir, que numerosos autores consideran tan importante como, por ejemplo, la práctica de probar. En efecto, Freudenthal (1973) afirma que establecer una definición puede ser una proeza esencial, incluso más que encontrar una proposición o una prueba.

Por otro lado, hay diversos investigadores que estudian la educación matemática a nivel universitario mediante el marco comognitivo (unión de comunicación y cognitivo) de Sfard (2008). Dicho marco es un marco sociocultural que considera las matemáticas como un discurso (el pensar es entendido como hablar con uno mismo) y el aprendizaje como un

cambio en dicho discurso. Por tanto, estudiar el aprendizaje de los alumnos universitarios es equivalente a estudiar los cambios en su discurso.

En este trabajo estudiamos el proceso de definir de estudiantes universitarios a través del análisis del discurso matemático, específicamente cuando describen y definen cuerpos geométricos tridimensionales.

### **Marco Teórico**

El marco comognitivo de Sfard (2008) establece las características del discurso matemático a partir de los siguientes elementos: *uso de palabras* (que incluye las palabras clave usadas, que pueden ser tanto propias del vocabulario matemático, como por ejemplo *polígono*, como palabras del lenguaje ordinario que son usadas en un contexto matemático, como *lado* de una figura), *mediadores visuales* (los objetos visibles que son usados como parte de la comunicación, como pueden ser las figuras, los gráficos o los símbolos), *narrativas* (cualquier secuencia de sentencias que describen objetos, relaciones y procesos, tal como definiciones, teoremas y pruebas), y *rutinas* (patrones característicos del discurso matemático).

Otra de las nociones importantes dentro del marco comognitivo son las *reglas del discurso*, entre las que se distinguen *reglas a nivel objeto* y *reglas a nivel meta* (que denominaremos *meta-reglas*). Las reglas a nivel objeto son definidas como narrativas acerca de las regularidades y el comportamiento de los objetos, mientras que las meta-reglas definen patrones en la actividad de los implicados en el discurso tratando de producir y sustanciar narrativas a nivel *objeto*.

### **Metodología**

#### **Participantes y contexto**

Este estudio forma parte de otro más amplio acerca del proceso de definir en el que se estudia el discurso de grupos de alumnos del Grado en Educación Primaria y del Máster en Educación Secundaria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas (MAES). Como parte de su formación, los alumnos del Grado en Educación Primaria deben cursar una asignatura sobre contenido matemático específico en Primer Curso y otra sobre educación matemática en Segundo Curso. Los participantes en este estudio eran estudiantes de la asignatura de contenido matemático específico de Primer Curso del Grado en Educación

Primaria. Estos habían recibido ya instrucción sobre geometría de figuras 2D pero no sobre geometría de figuras 3D. Por otra parte, los estudiantes estaban organizados en 12 grupos de 3 a 6 alumnos (que llamaremos en cada grupo A1, A2, A3,..., A6). Concretamente, en este trabajo vamos a presentar los resultados relativos a cuatro de los 12 grupos de estudiantes, que llamaremos G1, G2, G3 y G4.

### **Instrumento**

Se diseñó una tarea que consistía en nueve preguntas sobre la descripción y definición de tres cuerpos geométricos cuyas representaciones planas aparecían en el enunciado de la tarea. Concretamente, los cuerpos geométricos eran: un cubo; un prisma recto y convexo que no era un cubo; y un prisma oblicuo y cóncavo.

Algunas de las preguntas de la tarea eran:

- En los cuerpos anteriores se pueden identificar elementos básicos como caras, vértices, aristas, etc. ¿Qué propiedades o características relativas a esos elementos observáis en cada uno de estos cuerpos?
- De las propiedades o características anteriores, ¿podéis identificar, si es posible, aquellas que son comunes solo a dos de los tres cuerpos?
- Definid cada uno de los cuerpos.

### **Datos**

Los datos utilizados en este trabajo son las grabaciones en audio y las transcripciones del diálogo entre los alumnos de cada uno de los grupos cuando resuelven la tarea mencionada en el apartado anterior. También consideramos las respuestas escritas que fueron finalmente consensuadas por el grupo.

La primera de estas fuentes nos permite acceder a la discusión y negociación que llevaron a cabo los estudiantes durante el proceso de resolución de la tarea. Para nosotros, el discurso de cada uno de los grupos en su totalidad es una unidad de análisis, sin hacer distinciones entre los roles específicos que pudiesen asumir cada uno de los estudiantes.

La segunda fuente es igualmente importante porque los estudiantes reflejan a través de sus respuestas escritas el consenso acerca de lo que constituía una respuesta correcta. En este sentido, validaron los acuerdos alcanzados durante el proceso de negociación y discusión.

### **Análisis**

El análisis de los datos se ha realizado en dos fases. En la primera transcribimos las grabaciones en audio de cada uno de los grupos y, posteriormente, identificamos las cuatro características discursivas de las que habla Sfard (2008), y las meta-reglas. En la segunda fase, clasificamos las características discursivas y las meta-reglas, y estudiamos cuáles de los tipos encontrados aparecen en cada uno de los grupos.

En el presente trabajo, presentamos exclusivamente qué palabras y narrativas son utilizadas por los cuatro grupos de alumnos que forman parte de este estudio. A continuación, ilustramos a través del grupo G1 cómo se han llevado a cabo las dos fases de este análisis.

Para ejemplificar la primera fase de análisis, mostramos un extracto de la transcripción de la respuesta del grupo G1 (compuesto por los alumnos A1, A2, A3, A4) a la primera pregunta que aparece en la sección de Instrumento. En dicho extracto hemos identificado las palabras (señaladas en negrita) y las narrativas (en itálica):

- 15: A4: *La **arista** es lo que une un **punto** con otro.*
- 16: A2: Este tiene ocho...
- 17: A4: y la **cara** es lo que está dentro de...
- 18: [varios al mismo tiempo]
- 19: A3: *todos tienen ocho **vértices***
- 20: A2: *tienen todos ocho...**vértices**.*
- 21: A4: ¿Seguro? 1, 2, 3, 4...
- 22: A1: *Es un **cubo**.*
- 23: A4: ...5, 6 **caras**, ¿no?

Posteriormente, en la segunda fase de análisis clasificamos las narrativas según su naturaleza en cuatro tipos principales, con algunos subtipos. En el extracto anterior podemos ver ejemplos de:

**N1.** Narrativas que recogen una definición de un concepto: línea 15.

N2. Narrativas en las que se etiquetan figuras o sus elementos: línea 22.

N3. Narrativas en las que se describen propiedades de los cuerpos: líneas 19, 20, 21, 23.

## Resultados

Mostramos a continuación los resultados del análisis de los cuatro grupos considerados. Con respecto al *uso de palabras*, identificamos primero qué palabras aparecen y después las clasificamos según su uso. Concretamente, hacemos referencia a *para qué* se usan y *cómo* se usan. Los resultados obtenidos se exponen a continuación:

- *Para qué* se usan:
  1. Para etiquetar la figura o sus elementos:

Cubo, prisma, lados, diagonales, vértices, ángulos, caras, bases.
  2. Para describir la figura o sus elementos:

No consecutivos (referido a vértices); recto, poliédrico, agudo, obtuso (referido a ángulos); iguales, simétricas o semejantes (referido a caras); cuadrangulares (referido a bases); regular o irregular, oblicuo, ladeado, cuadrado, cóncavo y convexo, planos, tridimensionales (referido a cuerpos).
- *Cómo* se usan:
  1. De forma correcta. Por ejemplo, la palabra cubo en el grupo G3:

21: A2: Yo creo que era un, que es un cubo ¿no? [...]

22: A1: Un cubo, ¿no?

23: A2: Eah, un cubo.

24: A1: Con todos los lados iguales.
  2. De forma errónea. Por ejemplo, cóncavo y convexo en el grupo G1:

138: A1: [...] cóncavo era cuando tienen todos los lados y los ángulos iguales, convexos cuando no son iguales.
  3. De forma coloquial. Uso de una palabra coloquial con sentido matemático. Por ejemplo, la palabra daleado (expresión andaluza para ladeado) en el grupo G2:

71: A3: Yo creo que el cuerpo 2 es un prisma que tiene su base cuadrada, aunque esté así un poquillo daleado sigue siendo un prisma [...].

Con respecto a las *narrativas*, identificamos cuatro categorías (N1, N2, N3 y N4), con la cuarta dividida en cuatro subcategorías (N4a, N4b, N4c y N4d). Describimos a continuación cada una de ellas, junto con ejemplos representativos.

*N1. Narrativas que recogen una definición de un concepto.* En este tipo de narrativas, los alumnos definen explícitamente un concepto matemático.

En el grupo G1, se definen aristas y diagonales:

15: A4: La arista es lo que une un punto con otro.

[...]

53: A1: las diagonales son las que unen dos vértices no consecutivos.

*N2. Narrativas en las que se etiquetan figuras o sus elementos.* Se usan para asignarle un nombre a un cuerpo geométrico o a un elemento de él.

En el grupo G3 se etiquetan las caras de las figuras:

31: A1: Pero eso es un rombo [...].

En el grupo G4, los miembros etiquetan las figuras y sus caras:

167: A2: un prisma rectangular

168: A4: y el otro es un cuerpo irregular.

[...]

391: A1: sus caras son rectángulos. Las caras... es que no sé cómo decir, llamar a estas caras, las caras que no son las bases.

*N3. Narrativas en las que se describen propiedades de los cuerpos.* Estas propiedades pueden ser *numéricas* (los estudiantes cuantifican el número de caras, vértices, etc.) o *cualitativas* (el ángulo es recto, caras iguales dos a dos, caras simétricas, etc.). Mostramos a continuación un ejemplo representativo del G3 en el que aparecen propiedades de los dos tipos:

29: A2: El cuerpo dos tiene lo mismo.

30: A3: Caras, claro, seis caras.

[...]

32: A2: Ocho vértices.

[...]

37: A2: Doce aristas.

38: A1: Tiene cuatro caras iguales y dos diferentes.

En el grupo G4 también hemos identificado narrativas que describen ambos tipos de propiedades, numéricas y cualitativas.

62: A3: son, son seis caras.

[...]

66: A4: Son seis caras, y tiene dos iguales, dos iguales y dos iguales.

[...]

180: A3: [...] Cuerpo formado por seis caras, doce aristas y ocho vértices.

*N4. Narrativas sobre qué significa definir.* En esta categoría se recogen aquellas narrativas en las que aparece explícitamente una declaración sobre qué entienden por definir. Distinguimos cuatro subcategorías dependiendo de las declaraciones que hicieron los alumnos.

*N4a. Definir es decir el nombre y las características.* Encontramos un ejemplo en la línea 213 del grupo G1:

211: A2: Profesora, ¿en el 5 qué hay que poner? [Se refieren a qué deben responder a la pregunta “Definid cada uno de los cuerpos”].

212: Profesora: mi pregunta a vosotros es: ¿qué consideráis que es una definición? [...].

213: A2: el nombre y... las características... es la definición.

*N4b. Definir es explicitar solo las características.* En el grupo G2:

98: A2: Pues yo lo definiría con las características que tenía en la primera pregunta. La primera pregunta te pide las características de eso, eah, pues las mismas características es lo que define la figura [...].

*N4c. Definir no es solo explicitar sus propiedades.* En la línea 209 del grupo G1:

206: A3: Definid cada uno de los cuerpos.

207: A1: Si hablamos de prismas, es un prisma hexagonal, pero...

208: A4: Ya la hemos definido antes, en...

209: A3: No, hemos dicho qué es lo que tiene.

*N4d. Narrativas en las que se discute si las definiciones pueden ser inclusivas o exclusivas.* Por ejemplo, en el grupo G2:

134: A3: Es que lo que pasa es como con los triángulos y los rombos y todo eso, que dentro del rombo están también los cuadrados. Pues a lo mejor dentro de la definición de este cabe este, pero no tiene por qué.

A continuación, resumimos en una tabla las narrativas identificadas y los grupos en los que aparecen:

| NARRATIVAS  |  | Grupos en los que aparecen |
|---|--|----------------------------|
| N1. Narrativas que recogen una definición de un concepto          |  | G1                         |
| N2. Narrativas en las que se etiquetan figuras o sus elementos    |  | G1, G2, G3, G4             |
| N3. Narrativas en las que se describen propiedades de los cuerpos |  | G1, G2, G3, G4             |
| N4.<br>Narrativas sobre qué significa definir                     | N4a. Definir es decir el nombre y las características  | G1                         |
|   | N4b. Definir es explicitar solo las características  | G2, G4                     |
|   | N4c. Definir no es solo explicitar sus propiedades   | G1                         |
|   | N4d. Narrativas en las que se discute si las definiciones pueden ser inclusivas o exclusivas | G1, G2, G4                 |

Tabla 1. Resumen de narrativas identificadas

## Conclusiones

En este trabajo hemos analizado el discurso de grupos de estudiantes para maestro de Educación Primaria cuando describen y definen cuerpos geométricos tridimensionales. Hemos usado para este análisis el marco comognitivo de Sfard (2008). En particular, nos hemos centrado en el uso de palabras y las narrativas encontradas.

Con respecto al uso de palabras matemáticas, hemos identificado para qué se usan (para etiquetar y describir) y cómo (de forma correcta, errónea y coloquial).

Centrándonos en las narrativas, hemos determinado la existencia de cuatro categorías: las que recogen la definición de un concepto, las que etiquetan figuras o sus elementos, las que describen propiedades de los cuerpos y aquellas en las que se discute sobre qué significa definir. Dentro de esta última categoría hemos distinguido cuatro subcategorías dependiendo del significado que los alumnos dan a definir un concepto.



Los resultados encontrados nos proporcionan indicadores sobre el conocimiento matemático de los alumnos del grupo y las carencias que tienen. Por ejemplo, el uso de palabras erróneas o palabras coloquiales usadas con significado incorrecto nos indica carencias en el vocabulario matemático de todos los grupos. Por otra parte, el análisis de las narrativas nos muestra que el grupo G1 no tenía claro cómo definir varios conceptos previos o qué significaba definir. El grupo G2 sí parecía tener claras las definiciones de conceptos previos pero no qué significaba definir. El grupo G3 no discutió explícitamente el significado de la palabra definir, aunque uno de sus miembros puso de manifiesto que desconocía en qué consiste dar una definición. Finalmente, el grupo G4 consideró que para definir solo es necesario explicitar las propiedades, y que pueden darse diferentes definiciones de un concepto.

Actualmente, este trabajo está siendo ampliado con el estudio de las rutinas y meta-reglas que aparecen en el discurso de los estudiantes. Los resultados presentados aquí han sido clave para la identificación de ambas, puesto que las narrativas pueden ser indicadores de la existencia de meta-reglas (rutinas si se observa un patrón de comportamiento repetido) y viceversa, es decir, las meta-reglas y las rutinas producen narrativas.

### **Referencias bibliográficas**

- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.
- Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K., & Teppo, A. (2005). Advancing mathematical activity: A practice-oriented view of advanced mathematical thinking. *Mathematical thinking and learning*, 7, 51-73. doi:10.1207/s15327833mtl0701\_4
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating. Human development, the growth of discourse, and mathematizing*. New York, NY: Cambridge University Press.