CB-888

"GEOMETRIA GAUDIANA": UM ESTUDO DAS SUPERFÍCIES REGRADAS NAS OBRAS DE ANTONI GAUDI UTILIZANDO O GEOGEBRA

André Lúcio Grande
andreluciogrande@gmail.com
Colégio São Marcos Mogi das Cruzes - Brasil

Núcleo temático: Recursos para o ensino e aprendizagem da matemática
Modalidade: CB
Nivel educativo: Formação e atualização de ensino
Palavras chave: Superfícies Regradas, Geometria Analítica, GeoGebra, Visualização

Resumo

O estudo das curvas e superfícies em Geometria Analítica, nos diferentes níveis de ensino, abrange uma série de conceitos e situações-problema que podem ser explorados em sala de aula. Particularmente, as superfícies regradas como o hiperbolóide ou o parabolóide hiperbólico, apresentam diversas aplicações no cotidiano, quer seja na engenharia, arquitetura, artes ou na construção de objetos. Com isso, este trabalho objetiva apresentar uma proposta de ensino das superfícies regradas analisando algumas obras do arquiteto catalão Antoni Gaudi, explorando suas propriedades algébricas e geométricas utilizando como recurso auxiliar o software GeoGebra. O referencial teórico empregado nessa pesquisa baseia-se nos princípios e ideias ligadas ao papel da visualização e suas inter-relações com a intuição e o rigor de acordo com David Tall. Como procedimentos metodológicos, elaborou-se utilizando o GeoGebra uma intervenção de ensino buscando introduzir os conceitos de curvas e superfícies a partir de algumas obras de Gaudi tendo como público-alvo estudantes do Ensino Médio e Superior. Como resultados, evidenciamos que a construção de maquetes das superfícies bem como o uso do GeoGebra como recurso pedagógico possibilitou não somente visualizar como "concretizar" os objetos matemáticos de estudo bem como auxiliou em grande medida sua compreensão e formalização.

1. Noção de Superfície e a importância da visualização

O que é uma superfície e como caracterizá-la? Ao efetuarmos essas indagações, estamos abordando um dos conceitos fundamentais da Geometria e que possui uma diversidade muito grande de abordagens a aplicações, quer seja no Cálculo Diferencial e Integral, na Geometria Euclidiana, Analítica, Diferencial ou Topologia, por exemplo.

Quando desejamos definir ou descrever uma superfície quase que inevitavelmente caímos da redundância da utilização do próprio termo ou evocamos uma superfície plana como

ISBN 978-84-945722-3-4

exemplo. Uma superfície pode ser definida como um conjunto de pontos do espaço euclidiano, sendo bidimensional e que qualquer ponto da mesma pode ser descrito localmente por duas coordenadas. Utilizando-se intuitivamente de analogias físicas, podemos obter por exemplo outras superfícies pela deformação ou rompimento de uma folha de papel ou a colagem de alguns pedaços de papel.

Quanto às aplicações, destacamos sua utilização em diversas áreas, como a arquitetura, por exemplo, na construção de estruturas que se utilizam de suas propriedades geométricas. Esse fato pode ser observado nas obras do arquiteto catalão Antoni Gaudi (1852 – 1926), que se utilizou desprovido de qualquer formalismo de maneira empírica e intuitiva das chamadas superfícies regradas, que de um modo geral são aquelas formadas por retas, como o parabolóide hiperbólico e o hiperbolóide de uma folha.

Podemos considerar, em grande medida, que essa relação entre arte, arquitetura e geometria propicia um contexto muito rico e alternativo envolvendo uma série de conceitos que podem ser explorados em sala de aula nos diferentes níveis de ensino. Esse estudo envolve aspectos ligados à visualização das propriedades algébricas e geométricas dessas superfícies aliados à questão da intuição e do rigor.

Sobre esse fato, segundo Grande (2013,) podemos considerar de um modo geral que a questão da visualização na Matemática foi responsável pela elaboração de muitas ideias por grandes descobertas assim como levou os matemáticos a alguns resultados enganadores.

Em seus trabalhos sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo, Tall (2002) discute o papel da visualização do contexto do Cálculo nos últimos anos e suas possíveis contribuições procurando relacioná-lo com as noções de intuição e rigor. Segundo o autor:

> Ao introduzir as visualizações adequadamente complexas de ideias matemáticas, é possível fornecer uma visão muito mais geral dos modos possíveis de aprender os conceitos, fornecendo intuições muito mais poderosas do que através de uma linguagem tradicional (Tall, 2002, p. 20 – tradução nossa).

Por visualização o autor entende como uma ação de transformar conceitos abstratos em imagens mentalmente visíveis. Essa ação constitui-se em dois momentos: constrói-se algo mentalmente e posteriormente representa-se o que pensou. Esse fato pode ser levado em consideração no estudo das superfícies regradas, no sentido de auxiliar sua compreensão e formalização.

ISBN 978-84-945722-3-4

Sendo assim, a presenta pesquisa objetiva apresentar e discutir uma proposta de ensino das superfícies regradas analisando algumas obras do arquiteto catalão Antoni Gaudi, explorando suas propriedades algébricas e geométricas levando em conta aspectos ligados à visualização utilizando como recurso auxiliar o software GeoGebra.

2. Gaudi e as superfícies regradas

No final do século XIX, a Segunda Revolução Industrial promoveu o progresso em muitas cidades da Europa, com destaque para as indústrias química, elétrica, petrolífera e do aço.

A Exposição Universal, sediada na cidade de Barcelona em 1888, apresentou uma série de experimentos como resultado de muitas descobertas científicas na área dos transportes, produção industrial, entre outros.

Nessa cidade o arquiteto catalão Antoni Gaudi (1852-1926), influenciado pelo movimento modernista da época inspirou-se em formas presentes na natureza na construção de estruturas como soluções de problemas arquitetônicos. O autor vê na natureza a fonte de todo o saber, pois para o mesmo a arte é filha da natureza e que ser original é voltar às origens, ou seja, à própria natureza.

Para Gaudi, não existe estrutura sem forma, não existe forma sem estrutura, e essa relação entre forma e estrutura se faz por meio da geometria. Isso faz com que o arquiteto se aproprie da geometria sintética para a construção de objetos e edificações. Suas técnicas baseiam-se em experimentos empíricos, em que se construíam maquetes em escala e as submetiam a esforços empregando pesos (bolas de chumbo, em proporções de carga) utilizando modelos geométricos que retratavam seu percurso por uma geometria inspirada na percepção analítica dos elementos da natureza.

Gaudi faz uso das denominadas superfícies regradas, que segundo o mesmo de um modo geral representam a síntese de todas as possibilidades de criação dos espaços arquitetônicos. Essas superfícies são formadas por retas, o que torna o seu estudo extremamente interessante, pois mesmo essas superfícies sendo “curvadas” como o parabolóide hiperbólico, helicoide, conóide ou hiperbolóide de uma folha, podemos construí-las a partir de retas.

Faremos a seguir uma descrição sobre uma proposta de ensino sobre as principais características das superfícies regradas utilizando como recurso auxiliar o software GeoGebra.

ISBN 978-84-945722-3-4

3. Fundamentação Teórica

As superfícies podem ser classificadas de várias maneiras, tais como superfícies de revolução, paralelas, mínimas ou regradas.

Do ponto de vista intuitivo, a palavra regrada significa sujeita a regras. Uma superfície regrada é aquela é ser formada por retas, o que lhe confere uma “regra” própria para ser gerada. Uma propriedade dessas superfícies consiste no fato de que sendo as mesmas formadas por retas, sua construção pode ser considerada mais simples, o que pode explicar em grande medida sua utilização em soluções tal como Gaudi em suas obras.

Podemos definir uma superfície regrada da seguinte maneira: Uma superfície S é *regrada*, se para cada ponto P de S, existir uma reta L, que contém P e pertence a S. Como exemplo de superfícies regradas, temos: cilindro, cone, parabolóide hiperbólico, hiperbolóide de uma folha, helicóide ou conóide.

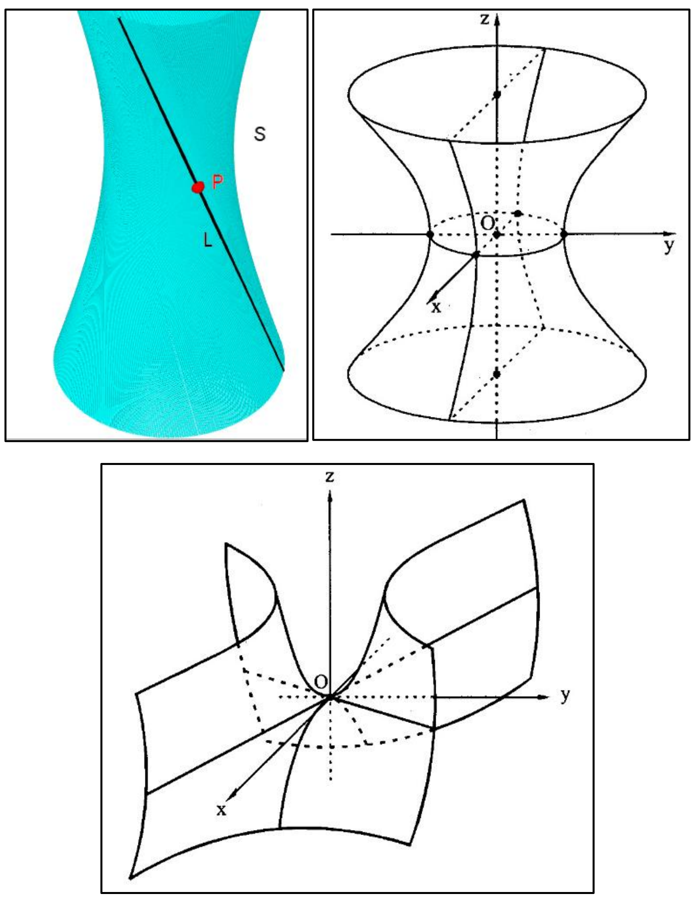

Figura 01 – Superfícies regradas
Fonte – Autor (2017)

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Para que as superfícies regradas possam ser estudadas, no intuito de permitir uma melhor visualização de suas propriedades geométricas, neste trabalho elaborou-se a construção de maquetes que representem de maneira concreta as superfícies em questão utilizando-se de materiais simples como cartolina, isopor e palito de madeira, que representam as retas geradoras da superfície.

Para a presente pesquisa, as maquetes foram construídas pelos alunos do Ensino Médio do Colégio São Marcos de Mogi das Cruzes, em que se abordou em uma atividade extracurricular a noção intuitiva de superfícies, classificação das mesmas e a discussão da possibilidade de se obter superfícies utilizando-se apenas retas, a partir da obra do arquiteto catalão Gaudi.

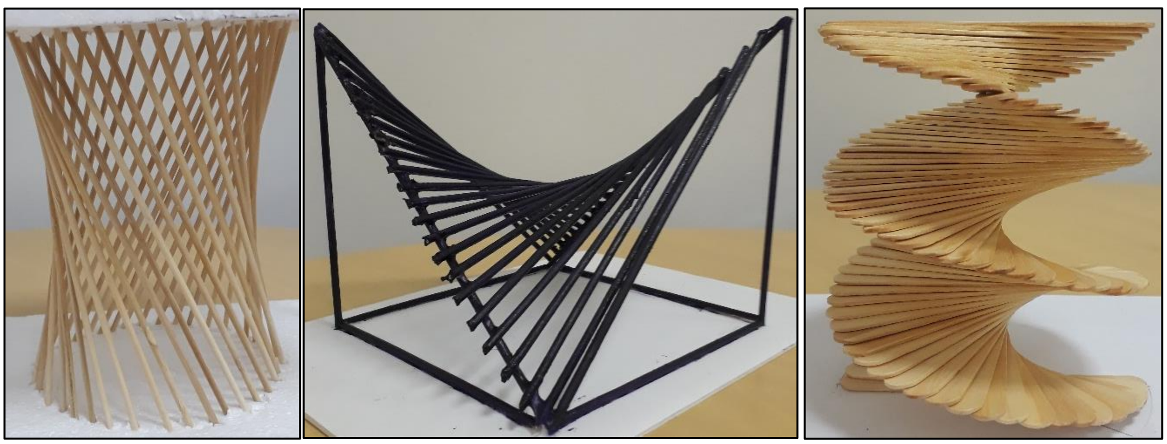

Figura 02 – Maquetes das superfícies regradas (hiperbolóide de uma folha, parabolóide hiperbólico e helicóide).
Fonte – Autor (2017)

A partir das maquetes construída, mostraremos a seguir algumas características dessas superfícies utilizando o software GeoGebra.

3. Superfícies Regradas no GeoGebra

O hiperbolóide de uma folha foi utilizado por Gaudi no teto da igreja da Sagrada Família com a finalidade de se recolher luz e projetá-la para o interior do edifício.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Figura 03 – Hiperbolóide de uma folha (Gaudi)
Fonte – Gaudi Barcelona 1900

O paraboloide hiperbólico foi empregado na construção de abóbadas que permitem a cobertura de grandes espaços sem a necessidade de pilares ou colunas, propiciando dessa forma uma maior liberdade de espaço. Além disso, utilizou-se também para facilitar o escoamento das chuvas, pois as mesmas formam uma combinação de curvas que vão para cima e para baixo num formato de sela.

Figura 04 – Parabolóide hiperbólico (Gaudi)
Fonte – Gaudi Barcelona 1900

Nessa presente pesquisa vamos nos restringir a apresentar o estudo do hiperbolóide de uma folha utilizando o GeoGebra destacando aspectos da visualização e formalização dessa superfície.

O hiperbolóide de uma folha pode ser visualizado como um sólido obtido pela rotação de uma hipérbole em torno do eixo Oz, sendo representado analiticamente pela seguinte equação:

ISBN 978-84-945722-3-4

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

com a, b e c constantes reais não nulas.

A demonstração dessa equação pode ser feita nas aulas de Geometria Analítica ou Cálculo, fugindo do escopo dessa pesquisa, que procurou enfatizar as propriedades geométricas da superfície. Podemos inserir no GeoGebra a equação do hiperbolóide conforme figura a seguir:

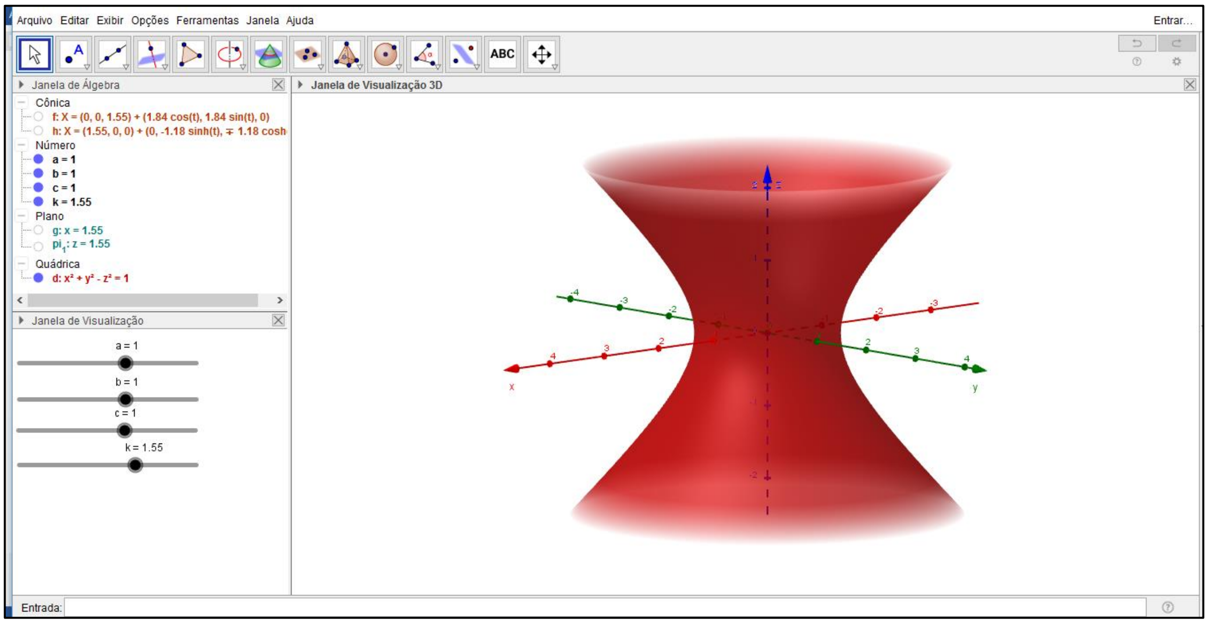

Figura 05 – Hiperbolóide de uma folha no GeoGebra
Fonte – Autor (2017)

Podemos explorar as seções que se obtém interseccionado o sólido por planos paralelos e conjecturar quais são os traços ou curvas de nível obtidas nesse plano. Para isso, vamos considerar que ao intersecionarmos com um plano π e sendo *k* uma constante real temos as seguintes possibilidades:

a) O plano π é paralelo ao plano *xy* ($z = k$) obtemos elipses (no caso em que $a = b$ temos uma circunferência);

b) O plano π é paralelo ao plano *yz* ($x = k$) ou paralelo ao plano xz ($y = k$) obtemos hipérboles.

Essas propriedades podem ser formalizadas algebricamente ao substituímos nos casos em que $z = k$, $x = k$ *ou* $y = k$ na equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ obteremos, respectivamente, equações

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

da elipse (ou circunferência) e da hipérbole. Essas seções podem ser visualizadas no GeoGebra conforme a figura a seguir:

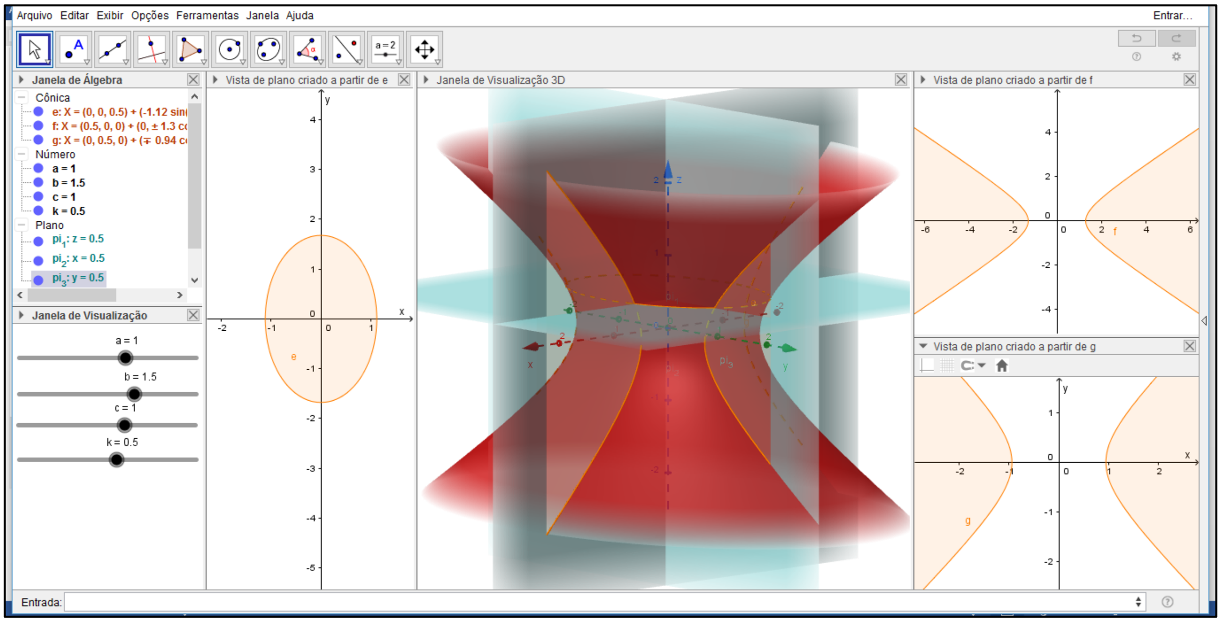

Figura 06 – Seções do hiperbolóide de uma folha no GeoGebra
Fonte – Autor (2017)

A demonstração da propriedade do hiperbolóide de uma folha ser uma superfície regrada algebricamente é razoavelmente trabalhosa, e pode ser encontrada em Camargo e Boulos (2005), por exemplo. Entretanto, para visualizarmos intuitivamente esse fato, além da maquete construída pelos estudantes, podemos considerar o hiperbolóide gerado por uma família de retas que tem como curva diretriz a circunferência $\alpha(t)$, com centro na origem de raio r e cujo vetor diretor é igual a $v(t) = \alpha'(t) + e_3$, sendo $\alpha'(t)$ o vetor tangente da curva diretriz e e_3 o vetor canônico (0, 0, 1). Essa situação pode ser ilustrada a seguir no GeoGebra:

ISBN 978-84-945722-3-4

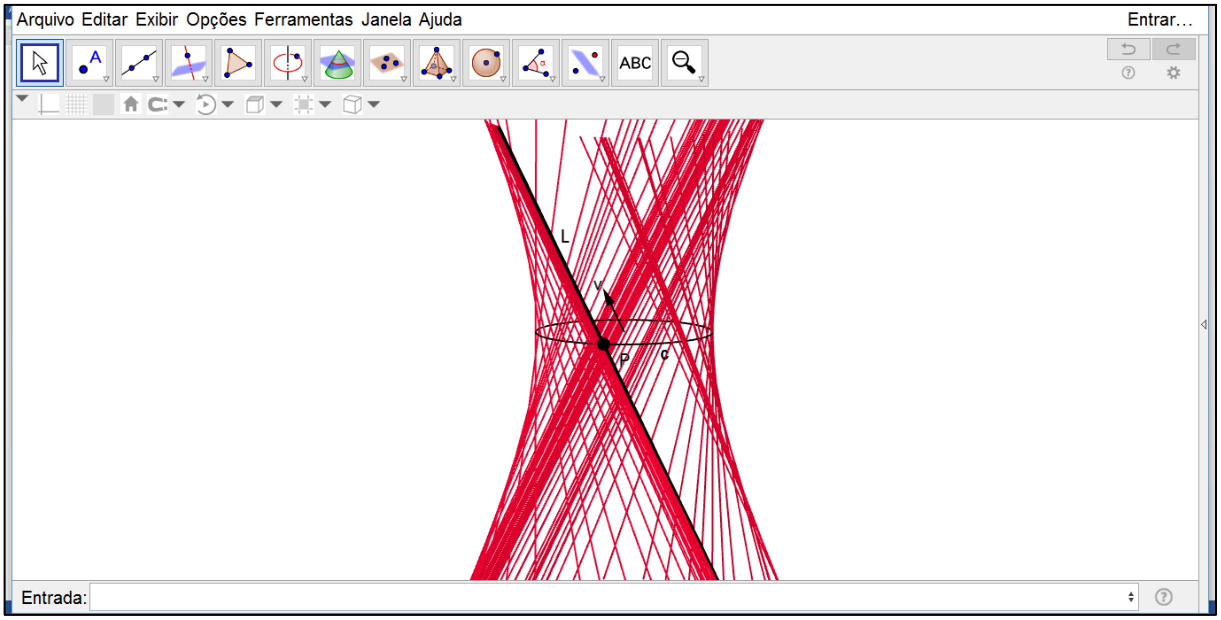

Figura 07 –Hiperbolóide de uma folha como superfície regrada no GeoGebra
Fonte – Autor (2017)

4. Considerações Finais

A introdução ao estudo das superfícies regradas a partir das obras de Antoni Gaudi propiciou um ambiente extremamente enriquecedor para o ensino e aprendizagem da Matemática, levando em conta a possibilidade de discussões dos diversos conceitos interdisciplinares envolvidos entre Arte e Matemática.

A construção de maquetes que representam algumas superfícies regradas se revelou um elemento responsável por "concretizar" o objeto de estudo em questão além de permitir elaborar intuitivamente algumas conjecturas e hipóteses sobre as propriedades geométricas de tais superfícies. Já a utilização do GeoGebra auxiliou simular a obtenção das superfícies regradas como o hiperboloide de uma folha, por exemplo, mostrando sua característica de ser formada por retas, assim como contribuiu na formalização das hipóteses e conjecturas intuídas anteriormente.

Destacamos que o ensino e a aprendizagem da Matemática sedimentados em princípios e ideias ligadas ao uso da intuição e do pensamento visual permitem aos estudantes, em grande medida, uma maior participação na construção do conhecimento científico.

ISBN 978-84-945722-3-4

No caso dos trabalhos de Gaudi concluímos que mesmo se apropriando do uso das superfícies regradas em suas obras inspiradas na natureza sem nenhum formalismo matemático, suas intuições aliadas ao método extremamente criativo tornaram sua “geometria gaudiana” não somente uma grande fonte de soluções para problemas arquitetônicos como uma fonte de situações para o ensino e a aprendizagem da Matemática.

Referências

Camargo, I. Boulos, P. (2005). *Geometria Analítica – um tratamento vetorial*.3º ed. rev. e ampl. – São Paulo: Prentice Hall.

Carmo, M. F. (2013). *Introdução ao curso de curvas e superfícies*. Rio de Janeiro: IMPA.

Gaudi Barcelona 1900 (2017). Instituto Tomie Ohtake; curadoria Raimon Ramis e Pepe Serra; [tradução espanhol Eugenia Flavian; tradução inglês Julia Lima, John Norman]. São Paulo: Instituto Tomie Ohtake.

Grande, A. L. (2013). *Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino.* Tese de Doutoramento. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Tall, D. (2002). *Using Technology to Suport and Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics.* In: Primeiro Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática na Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro – Brasil.

ISBN 978-84-945722-3-4