CB-847

EL USO DE CONTEXTOS HISTÓRICOS EN EL AULA DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA: EL CASO CONCRETO DE LA VISUALIZACIÓN EN LA CONEXIÓN GEOMETRÍA-ÁLGEBRA

Iolanda Guevara Casanova – Carme Burgués Flamarich
iguevara@xtec.cat – cburgues@ub.edu
Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya y Universidad Autònoma de Barcelona, Spain – Universidad de Barcelona, Spain

Núcleo temático: VII. Investigación en Educación Matemática
Modalidad: Comunicación Breve
Nivel educativo: Educación secundaria obligatoria
Palabras clave: lenguaje algebraico, visualización, historia de las matemáticas

Resumen

En este trabajo se plantea la idoneidad de relacionar el lenguaje simbólico del álgebra con la geometría, con la intención de potenciar el pensamiento y el razonamiento visual de los alumnos, para mejorar el aprendizaje de este nuevo lenguaje a base de hacerlo más significativo. La herramienta utilizada para establecer la conexión geometría-álgebra son los diagramas. Los diagramas introducidos provienen de la historia de las matemáticas y se usan para resolver problemas clásicos relacionados con triángulos rectángulos y ecuaciones de segundo grado que actualmente se resuelven algebraicamente.
Los resultados obtenidos muestran que los alumnos han sido mayoritariamente capaces de resolver los problemas planteados con este recurso, los diagramas históricos. Han producido razonamiento diagramático y se ha visto que este tipo de razonamiento es potente, tiene muchas posibilidades porque conecta álgebra y geometría, pero también se ha visto que requiere de un cierto entrenamiento. Es decir, que hace falta más razonamiento visual en las actividades dirigidas a los alumnos de secundaria, porque todavía hoy la tendencia es que en el aula de matemáticas se propongan muchas actividades para razonar con tablas y con secuencias sintácticas pero menos con imágenes.

La introducción de diagramas como recurso para apoyar el razonamiento de los alumnos en los inicios de la introducción del lenguaje simbólico del álgebra pretende conectar el pensamiento simbólico algebraico con el pensamiento visual relacionado con formas geométricas. Los historiadores (Fauvel & Maanen, 2000), (Jankvist, 2009), los educadores (Katz & Barton, 2007) y muchos especialistas en la enseñanza de las matemáticas (NCTM, 2000), (Giaquinto, 2001, 2007), (Niss, 2011), (Burgués, 2008), (Burgués & Sarramona 2013)

ISBN 978-84-945722-3-4

defienden la conexión entre temas aparentemente diferentes como uno de los procesos matemáticos relacionados con el aprendizaje de las matemáticas.

Katz & Barton (2007) describen las diversas etapas de la historia del desarrollo del álgebra que, según los autores, conducen a implicaciones en la enseñanza/aprendizaje. El aprendizaje del álgebra debe comenzar estrechamente relacionado con la geometría y la resolución de problemas. Los nuevos elementos matemáticos introducidos deben ser discutidos oralmente en clase por los estudiantes. Katz pregunta: ¿por qué no comenzar álgebra pensando en figuras geométricas? Esta investigación apoya claramente esta opción.

En la historia de las matemáticas, Radford & Puig (2007) asocian el razonamiento algebraico con el razonamiento geométrico, en al menos dos momentos: en algunos de los problemas de las tablillas cuneiformes mesopotámicas de los escribas (1900-1600 aC) y con al-Khwarizmi (s. IX) en el estudio y clasificación de las ecuaciones de primer y segundo grado en *Hisâb al-jabr wal-muqqabala*. Este último momento es exactamente la fuente de la segunda actividad de esta investigación. Siu (2000) también reivindica el razonamiento visual y el uso de textos históricos. Afirma que los antiguos problemas matemáticos chinos —y lo ejemplifica con los *Nueve Capítulos sobre Procedimientos Matemáticos* (s. I)— proporcionan evidencias a través de dibujos, analogías, ejemplos de cálculos generales y de algoritmos. Según el autor, todo esto puede ser de gran valor educativo para complementar la enseñanza de las matemáticas con énfasis en el pensamiento lógico deductivo tradicional.

Los diagramas introducidos en la investigación siguen la clasificación de Barwise y Etchemendy (1996) y la nomenclatura de Mason y Graham Johnston-Wilder (2005) y Giardino (2009, 2014). A partir de los análisis de estos autores, se han tomado dos rasgos que se relacionan con los diagramas introducidos y analizados en esta investigación: la eficacia expresiva del diagrama —la capacidad de expresar propiedades semánticas— y la eficiencia computacional —la capacidad de inferir nueva información—. A los diagramas del primer tipo se les ha denominado en la investigación diagramas de datos y a los segundos diagramas de cálculo.

Desde el punto de vista del uso de los diagramas, Barwise y Etchemendy (1996) argumentan que la inferencia y el razonamiento no sólo se da en expresiones lingüísticas sino que el uso de diagramas y gráficos es un legado histórico. Citan como ejemplos las innumerables

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

pruebas del teorema de Pitágoras que se producen a lo largo de la historia y en diferentes culturas alrededor del mundo.

En el pasado, la autora ha utilizado actividades históricas en el aula para situar a los alumnos en el contexto en el que se han desarrollado las matemáticas que estudian y ponerlos en contacto con otras formas de pensar o razonar matemáticas (Guevara et al., 2006) (Guevara, 2009), sin proceder a una recolección sistemática de datos y su análisis detallado. Los diagramas introducidos en esta investigación corresponde a los diagramas históricos tomados de las culturas árabe (siglo IX) y chino (siglo I). Además, otros autores también los han considerado muy útiles para la enseñanza/aprendizaje del álgebra (Siu 2000, Demattè 2010, Puig 2008-11).

Los problemas propuestos a los estudiantes, en la primera parte de la investigación, corresponden al capítulo 9 de los *Nueve Capítulos* —problemas 4 al 12— en la versión de Chemla & Shuchun (2005). Los diagramas utilizados provienen de la justificación del procedimiento de cálculo del texto clásico del siglo I que hizo Lui Hui hizo en el año 263 a través de descripciones de áreas y figuras geométricas de cuadrados, gnomos y rectángulos. Estas figuras geométricas han sido estudiadas y transcritas por los historiadores Cullen (1996), Chemla & Shuchun (2005) y Dauben (2007). Chemla & Shuchun las resumen en dos que denominan primera y segunda figuras fundamentales. Cada problema se resuelve utilizando una de las dos figuras —4, 5, 11 y 12 con la primera; 6, 7, 8, 9 y 10 con la segunda—.

Por ejemplo, para resolver el problema 6 (figura 1) cuyo enunciado dice: «Supongamos que tenemos un estanque cuadrado de lado 1 zhang[25] en el centro del cual hay una caña que sobresale del nivel de agua 1 chi. Cuando se tira de la caña hacia el extremo, la caña queda justo toda sumergida. ¿Cuál es la profundidad del lago y la longitud de la caña?».

[25] Zhan, chi, cun son unidades de medidas de longitud en base decimal, ordenadas de mayor a menor. Así 1 zhan = 10 chi; 1 chi = 10 cun.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

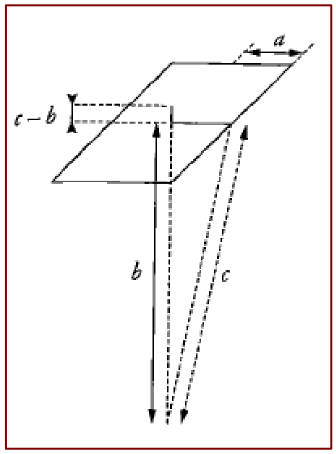

Fig. 1: Diagrma de datos del problema 6 (Chemla & Shuchun, 2005, 667)

Liu Hui introdujo la segunda figura fundamental: «Multiplicando la base por sí misma, se obtiene el área del gnomon. Lo que sobresale del agua es la diferencia entre la altura y la hipotenusa. Se le resta el cuadrado de esta diferencia al área del gnomon y luego se divide. La diferencia es el ancho del área del gnomon, la altura es la profundidad del estanque». (Chemla - Schuchun, 2005, 711).

De la transcripción de Chemal & Shuchun (Chemla-Schuchun, 2005, 673-676), se reconstruyeron las explicaciones de Liu Hui en la secuencia de diagramas de la figura 2.

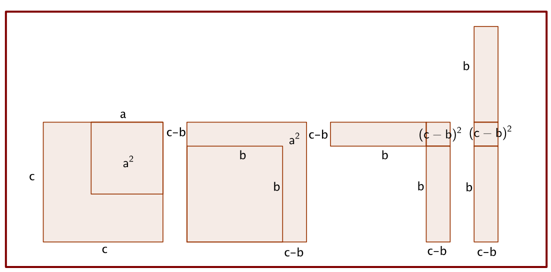

Fig. 2. La segunda figura fundamental

La figura 3 contiene la resolución del problema 6 realizada por un estudiante usando la segunda figura fundamental.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

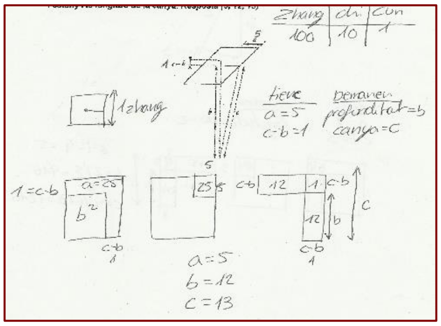

Fig. 3. Resolución del problema 6 por una alumna

De manera análoga, se preparó el material para la unidad de resolución de ecuaciones de segundo grado. En este caso, se basa en la justificación de una ecuación geométrica con cuadrados y rectángulos. La figura 4 muestra un diagrama de al-Khwarizmi, según la edición de F. Rosen (1831).

Giardino (2009) identifica dos tipos de elementos en la secuencia de resolución de problemas con diagramas de cálculo, los diagramas propiamente dichos y las acciones involucradas. Las acciones son cuatro: construcción, transformación, interpretación y lectura. A partir de estas cuatro acciones se han agrupado los objetivos específicos de la investigación en tres: traducción, transformación y razonamiento diagramático, ya que lo que se pretende es identificar las posibles oportunidades de aprendizaje, y sus respectivos efectos, al introducir diagramas geométricos históricos en las tareas de los estudiantes. Las conclusiones se han organizado en los mismos bloques, además de añadir uno más general sobre las virtudes y los problemas del uso de diagramas.

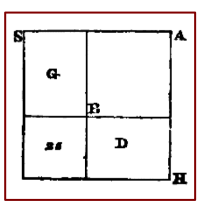

Fig. 4: Al-Khwārizmī (813) ***The treatise Hisab al-jabr w'al-muqabala***

De las seis conclusiones relacionadas con la traducción (Guevara, 2015: 428-435), se destaca la tercera como la más importante: los estudiantes asocian términos de primer grado con coeficiente unitario (x) a longitudes, los de primer grado con otros coeficientes (6x) a las

ISBN 978-84-945722-3-4

áreas y los de segundo grado también áreas. En relación a los valores numéricos con longitudes o áreas, en función del contexto del problema. En la Figura 5 se pueden ver las equivalencias que un estudiante establece entre los términos 6x, x, 40 y lados y áreas de la figura, usando las etiquetas correspondientes. Lo coloca dentro de la figura o fuera, sobre el lado si es una longitud, dentro de la figura si se corresponde con una área.

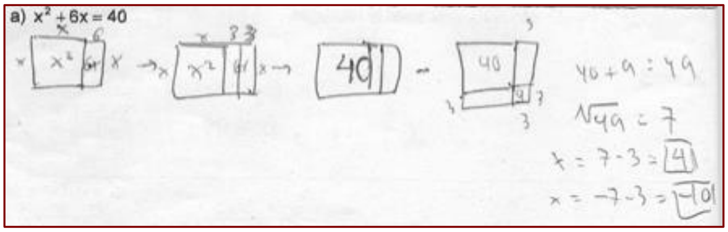

Fig. 5. Resolución de la ecuación x2 + 6x = 40, según un alumno

De las cuatro conclusiones relacionadas con la transformación (Guevara, 2015: 435-445) destaca la primera como la más importante: el hilo conductor que guía los procesos de transformación de los diagramas es la transformación de las áreas de las figuras (cuadrados y rectángulos) que contienen diagramas.

En la figura 3, en la resolución del problema 6 sobre triángulos rectángulos, el hilo conductor es el área 25. En la figura 5, en la resolución de una ecuación de segundo grado x2 + 6x = 40 la guía es el área 40.

Mancosu (2001) distingue entre visualización y razonamiento diagramático. Utiliza el término visualización cuando se refiere a los trabajos de Giaquinto (1992, 2007) que defiende los diagramas como herramienta de descubrimiento. Sin embargo, utiliza el razonamiento diagramático cunado se refiere a Barwise y Etchemendy (1996), que avalan los diagramas herramientas de demostración. En la investigación se utiliza la expresión razonamiento diagramático en estos mismos términos.

De las tres conclusiones relacionadas con el razonamiento diagramático (Guevara, 2015: 428-435), destaca la segunda como la más importante: las etiquetas esenciales que usan los estudiantes son las etiquetas numéricas por encima de las algebraicas. Sin ellos, el diagrama no ayuda a resolver el problema.

En la figura 6 se puede ver el proceso de resolución de un estudiante para la ecuación

ISBN 978-84-945722-3-4

$x^2 + 6x = 40$, que no usa etiquetas algebraicas.

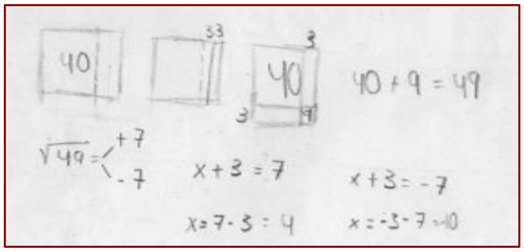

Fig. 6. Sin etiquetas algebraicas

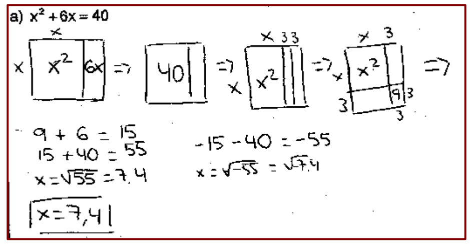

Fig. 7. Sumando longitudes y áreas

Por último, el cuarto bloque de conclusiones es más general y se centra en las ventajas y puntos a considerar en el uso de diagramas. De las cuatro conclusiones relacionadas con las ventajas en el uso de diagramas (Guevara, 2015: 452-458) destaca la tercera como la más importante: para poder manipular diagramas con facilidad es necesario distinguir entre el concepto de perímetro y área, y también entre la medida de una longitud y de una superficie. En la figura 7 se puede ver la solución de un estudiante que mezcla en una suma valores correspondientes a longitudes con valores correspondientes a áreas. Esto le impide alcanzar el resultado final correctamente.

A partir de los resultados contenidos en el análisis de las actividades de los estudiantes y de las conclusiones generadas, puede decirse que la enseñanza del lenguaje algebraico en los primeros cursos de su introducción debe ir de la mano de argumentos visuales y del uso de diagramas: es decir, la introducción del lenguaje algebraico, además de ser una generalización del lenguaje de la aritmética, un modelo en el que las reglas de los números se convierten en reglas con letras también debe tener una componente visual, la que proviene de interpretar las fórmulas en términos de longitudes y áreas de figuras formadas por cuadrados y rectángulos. En este paradigma las expresiones lineales se pueden interpretar, dependiendo de la situación, como áreas o longitudes de segmentos, y las expresiones cuadráticas se interpretan como áreas. Todas las operaciones y reglas para operar con letras tienen su interpretación en el modelo geométrico. De esta manera, las propiedades de las operaciones no se justifican únicamente con reglas gramaticales de símbolos sino que tienen un equivalente en el modelo geométrico.

ISBN 978-84-945722-3-4

Pasar de la aritmética al álgebra saltando la geometría se podría considerar como un error pedagógico e histórico. En el contexto del siglo XVII, la fuerza del nuevo lenguaje simbólico del álgebra reemplazó al razonamiento geométrico visual (Katz y Barton, 2007) pero tal vez la conexión álgebra-geométrica se debería recuperar, en el siglo XXI, en los primeros cursos de la enseñanza del álgebra. Durante muchos siglos la humanidad, en ausencia del álgebra formal y con sólo las cuatro operaciones aritméticas básicas, ha sido capaz de resolver algunos problemas que ahora se resuelven con ecuaciones. Hay una parte significativa de estudiantes que no resuelven problemas porque no han comprendido completamente las reglas de este lenguaje y son analfabetos, desde el punto de vista de las matemáticas. Tal vez, al comienzo del aprendizaje del álgebra, es necesario volver al razonamiento de los matemáticos antiguos. Los matemáticos antiguos calcularon sobre la base de modelos geométricos para justificar la validez de sus operaciones.

Referencias bibliográficas

Al-Khwarizmi (1986). *The Algebra of Mohammed ben Musa*. Rosen, F. (ed. i trad.), (1a ed., Londres, 1831) Hildesheim/Zürich/Nova York: George Olms Verlag.

Barwise, J., & Etchemendy, J. (1996). Visual Information and Valid Reasoning. En: G. Allwein & J. Barwise (Eds.), *Logical Reasoning with Diagrams* (pp. 3-23). New York: Oxford University Press.

Burgués, C. (2008). La representación de las idees matemáticas. In: M.M. Hervás Asenjo, (Ed.), *Competencia matemàtica e interpretación de la realidad*. Madrid: Secretaria General Técnica del MEC, 23-40.

Burgués, C.; Sarramona, J. (Eds.) (2013). *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic*. Barcelona: Departament d'Ensenyament, Generalitat de Catalunya http://ensenyament.gencat.cat/web/.content/home/departament/publicacions/col_leccions/competencies_basiques/competencies_mates_eso.pdf/ Consultado 11/01/2016.

Chemla, K., & Shuchun, G. (Eds.) (2005). *Les Neuf Chapitres, le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires.* París: Dunod.

Cullen, C. (1996). *Astronomy and Mathematics in Ancient China: The Zhou bi suan jing*. Cambridge/New York: Cambridge University Press.

Dauben, J. W. (2007). Chinese Mathematics. In: V. J. Katz, (Ed.), *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam*. A sourcebook (pp. 187-384). Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Demattè, A. (2010). *Vedere la matematica. Noi, con la storia*. Trento: Editrice UNI Service.

Fauvel, J., &; Maanen, J.V. (Ed.) (2000). *History in Mathematics Education*. The ICMI Study. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

ISBN 978-84-945722-3-4

Giaquinto, M. (2007). *Visual Thinking in Mathematics*. Oxford: Oxford Univ. Press.

Giardino, V. (2009). Towards a diagrammatic classification. *The Knowledge Engineering Review*, 00(0), 1-13.

Giardino, V. (2014). *Diagram Based Reasoning* https://diagrambasedreasoning.wordpress.com/ Consultado 11/01/2017

Guevara, I; Massa, M.R.; Romero, F. (2006). Textos históricos para la enseñanza de las matemáticas. In: J.A. Pérez-Bustamante, et al. (Eds.), *Actas del IX Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas* (pp. 1301-1304). Cádiz: SEHCYT.

Guevara, I. (2009). La història de les matemàtiques dins dels nous currículums de secundària: La introducció de contextos històrics a l'aula, un recurs per a millorar la competència matemàtica. http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200809/memories/1864m.pdf/ Consultado: 11/01/2017.

Guevara, I (2015). L'ús de contextos històrics a l'aula de matemàtiques de secundària: El cas concret de la visualització en la connexió geometria-àlgebra. (Tesi doctoral). Universitat de Barcelona. http://hdl.handle.net/10803/301766/ Consultado: 11/01/2017.

Jankvist, U.T. (2009). A categorization of the 'whys' and 'hows' of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 71 (3), 235-261.

Katz, V. J.Barton, Bill (2007). Stages in the history of algebra with implications for teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 185 –201.

Mason, J., Graham, A., & Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing Thinking in Algebra*. London: SAGE Publications.

Mancosu, P.(2005). Visualitzation in Logic and Mathematics. En: P.Mancosu et al. (Eds), *Visualitzacion, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics* (pp. 13-30). Netherlands: Springer.

Niss, M., & Hojgaard, T. (Ed.) (2011). *Competencies and Mathematical Learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. Roskilde University: Department of Science, Systems and Models, IMFUFA tekst nr. 485. http://diggy.ruc.dk/bitstream/1800/7375/1/IMFUFA_485.pdf/ Consultado: 11/01/2017.

Radford, L. & Puig, L. (2007). Syntax and meaning as sensuous, visual, historical forms of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 145-164.

Siu, M.K. (2000). An Excursion in Ancien Chinese Mathematics. In: V. J. Katz (Ed.), *Using History to Teach Mathematics. An International Perspective* (pp. 159-166). Washington: The Mathematical Association of America.

ISBN 978-84-945722-3-4