

O ESTUDO DE CASO ROBERTO: EXPLORANDO SIGNIFICADOS SOBRE CÁLCULO DE VOLUMES POR MEIO DE FORMULAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS POR FUTUROS PROFESSORES

Kátia Maria de Medeiros – Janaína Cardoso da Silva

katiamedeirosuepb@gmail.com – janainacardoso70@gmail.com

Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)-Secretaria de Educação do Estado da Paraíba-
SEE-PB-Brasil

Núcleo temático: Formación del profesorado en Matemáticas

Modalidad: CB

Nivel educativo: Formación y actualización docente

Palabras clave: Significados, Cálculo de Volumens, Formulação e Resolução de Problemas Matemáticos, Geogebra 3D.

Resumo

Este trabalho tem por Objetivo Geral analisar como o futuro professor de Matemática formula e resolve problemas matemáticos com o conteúdo Cálculo de Volumens a partir do aplicativo Geogebra 3D, explorando os significados formal e referencial. A pesquisa, um estudo de caso, foi desenvolvida no Laboratório de Informática do Instituto Federal da Paraíba, Campus Campina Grande, Brasil, com futuros professores de Matemática. Os dados foram coletados por meio da observação participante, entrevista semi-estruturada e registros das formulações e resoluções de problemas e das reflexões sobre as tarefas. Nesta Comunicação Breve focaremos sobre o Estudo de Caso Roberto. As formulações e resoluções de problemas envolveram os sólidos geométricos: cilindro, esfera, cone e parabolóide. Neste trabalho focaremos sobre as formulações e resoluções referentes ao cilindro e à esfera. Os resultados apontam que o futuro professor, nestas sessões, buscou atribuir o aspecto semântico ao problema, bem como o aspecto sintático com o uso da fórmula, para sua segunda resolução de cada problema. Ao refletir sobre suas formulações e resoluções descreve seu conhecimento sobre o volume dos sólidos e intercala suas ideias entre os aspectos semânticos e sintáticos de cada problema formulado e resolvido. Portanto, envolvendo os significados formal e referencial destes conteúdos matemáticos.

Introdução

Tendo em vista a pouca significância que a disciplina de Cálculo desenvolve nos alunos, durante o seu curso, vinculada à utilização de uma metodologia fechada a discussões, percebemos a importância de buscar práticas auxiliares que possibilitem, em paralelo à tradicional, instigar uma nova visão para tal disciplina. Neste sentido, esta pesquisa teve como Questão Norteadora: *Como Formular e Resolver Problemas Matemáticos com o*

conteúdo Cálculo de Volumes a partir do aplicativo Geogebra 3D (com o intuito de explorar os significados formal e referencial) contribuí para a compreensão semântica deste conteúdo por parte do futuro professor de Matemática? Neste sentido, o *Objetivo Geral* foi Analisar como o futuro professor de Matemática formula e resolve problemas matemáticos com o conteúdo Cálculo de volumes a partir do aplicativo Geogebra 3D, explorando os significados formal e referencial.

Roberto é um futuro professor de Matemática com 20 anos. Possui uma personalidade segura, aparentemente calmo e com um discurso claro e direto. No decorrer das observações, revela sua atenção e cuidado com as atividades, muito organizado e preocupado com suas estratégias de resolução. Aceita desafios para se auto desafiar e testar seus limites e conhecimentos. Gosta de curso de Licenciatura em Matemática, no qual se encontra no quarto período. No entanto, inicialmente, queria cursar Engenharia Elétrica, desistindo da ideia no segundo período do curso. Afirma sempre ter se dado muito bem com as disciplinas da área de exatas na sua Educação Básica, mas não se imaginava como um professor, “*eu olhava os professores, achava massa, mas nunca tive aquela vontade de ser um*”, afirma Roberto. Ao aceitar para si que estava no curso que aprendeu a gostar, faz com muita vontade e dedicação.

Ensino do cálculo voltado para o curso de licenciatura em matemática

Os alunos que ingressam na Universidade, em especial no curso de Licenciatura em Matemática, encaram diversas disciplinas de cunho específico, pedagógico e de Educação Matemática, porém, não se encontram totalmente preparados para se defrontar com tais disciplinas. Em primeiro momento, com dificuldades nas leituras e depois, na pouca, ou nenhuma compreensão nas disciplinas de Cálculo.

A necessidade de buscar novas metodologias auxiliares à tradicional, ajuda na adequação da realidade e motiva os alunos para um ensino mais compreensível, obtido, de forma óbvia numa melhoria na aprendizagem e, por isso, tem consequências positivas no Ensino Superior, pois os alunos só começam a ver teorias axiomática- dedutivas apenas nos cursos universitários, principalmente nos cursos de Matemática (Barufi, 2002). Tal deficiência didática na aprendizagem reflete-se na grande dificuldade que os futuros professores

apresentam nos cursos de Cálculo, isto por que estes tem o intuito de apresentar uma teoria lógico-formal dedutiva desde o seu início até o fim.

Diante de tamanha dificuldade na compreensão e na aprendizagem, os alunos sentem-se desmotivados e seus professores, em sua maioria, não os motivam, apenas mantém um curso limitado, restringindo-o à memorização de técnicas, e deixa que eles próprios descubram o significado dos conceitos e da utilização das técnicas repassadas na disciplina de Cálculo.

Contudo, Barufi (2002) afirma que, para resolver problemas é necessário ter ideias e conhecer o verdadeiro significado das ferramentas disponíveis. Tendo em vista que outras disciplinas e profissionais necessitam do Cálculo para a essência do seu trabalho, este poderia ser um dos principais motivos para que houvesse uma interação interdisciplinar, na qual explora o máximo de riqueza e importância desta disciplina. Desse modo, os alunos podem conseguir enxergar o significado do conteúdo, que poderá ser desenvolvido em sua totalidade, estabelecendo relações com o conhecimento adquirido.

Aplicativos auxiliares à compreensão do cálculo, o geogebra 3D e as formulações e resoluções de problemas

Os aplicativos tecnológicos, atualmente, tem sido bastante úteis em diversos contextos do cotidiano, alguns destes são vistos nas salas de aula, e mesmos nas mãos dos alunos, em na forma de aparelhos portáteis. Logo, a tecnologia adentrou nossas vidas, de maneira a termos que nos acostumarmos com algumas mudanças dentro e fora do universo escolar.

Por sua vez, o GeoGebra é um aplicativo matemático que junta Geometria, Álgebra e Cálculo. O Instituto Geogebra, em Portugal, permite mostrar algumas aplicações do Geogebra que vão além da geometria plana, extraindo o máximo da pontencialidade que este aplicativo nos permite no processo de ensino/aprendizagem, despertando, segundo as pesquisas feitas pelo Instituto, mais interesse nas comunidades que se preocupam com o ensino e as pesquisas matemáticas.

O Geogebra 3D é, além de um aplicativo de geometria, algo que permite a transparência de implementação de situações geométricas que unem figuras á representação do plano, modelos numéricos, no qual, de acordo com Blossier e Richard (2011), possibilitam uma viagem algébrica para o cálculo formal e a representação dinâmica no espaço.

Com o uso dos aplicativos podemos adentrar no mundo dos modelos matemáticos necessários ao rigor matemático, logo, observamos que tal aplicativo permite esta interação

com o indivíduo em situações didáticas ou em atividades com a metodologia Resolução de Problemas, através de formulações feitas com algum tema ou conteúdo trabalhado.

O trabalho com um aplicativo em sala de aula requer um planejamento prévio, um bom conhecimento sobre o que será estudado e, segundo Blossier e Richard (2011), ter interações a priori com os alunos, as quais se iniciam com uma boa relação professor-aluno. Desta forma, o conhecimento não se torna inato e permite que os alunos analisem, argumentem e comuniquem suas ideias, relacionando-as com os conteúdos matemáticos, envolvendo quantidade, variações e relações, além de espaço e formas.

As formulações e resoluções dos problemas matemáticos podem ser obtidas por diversos meios (Brown e Walter, 2005) e estimuladas para que seja dada ênfase ao conteúdo requerido em sala. Quando utilizamos o GeoGebra para estas formulações e resoluções de problemas, de acordo com Nóbriga e Araújo (2010), pode ser com formas geométricas, aritméticas, ou mesmo de uma figura que retrate a realidade, o que permite explorar não apenas um único conteúdo, mas um vasto conhecimento sobre conteúdos intercalados. Este fato ainda permite aos alunos uma reflexão sobre o que é feito e, ao professor, a reflexão fornece oportunidades para voltar atrás e rever acontecimentos e práticas, e isto proporciona a ambos oportunidades para seu desenvolvimento.

Os significados em uma aprendizagem matemática produtiva

Ao modo que a sociedade se torna mais complexa e acelerada, o conhecimento sobre a Matemática torna-se imprescindível. Com o avanço tecnológico aumentou a necessidade da Matemática em quase todos os setores sociais, profissionais e, principalmente, no campo das ciências, incluindo as ciências humanas e sociais.

Gómez-Granell (2008) relata sobre a preocupação do ensino-aprendizagem relacionado ao nível dos alunos, afirmando que os mesmos não alcançam o nível de alfabetização funcional mínimo para desenvolver-se numa sociedade moderna. Tal problema, devido às dificuldades encontradas no estudo da Matemática, pois a maioria das pessoas não se identifica com a disciplina e, portanto, falta interesse para buscar o aprendizado sobre a mesma. Outro motivo identificado entre os alunos salienta a autora, é a falta de autoconfiança para resolver problemas, mesmo estes sendo muito simples.

Outro fator que enriquece a Matemática e, ao mesmo tempo, a torna abstrata, é a sua pura dependência de uma linguagem própria, cheia de símbolos decifráveis e bem diferentes das demais linguagens, de caráter formal, essencial para abstrair as relações Matemáticas, potencializando o seu grau de generalização e convertendo-o na criação de um novo conhecimento. Desta maneira, segundo Gómez-Granell (2008) “A linguagem matemática envolve a ‘tradução’ da linguagem natural para a linguagem universal formalizada, permitindo a abstração do essencial das relações matemáticas envolvidas, bem como o aumento do rigor gerado pelo estrito significado dos termos” (p.260).

Ao buscarmos significados no conhecimento matemático, nos deparamos com uma dura predominância das concepções sobre a Matemática, uma destas, a concepção formalista influenciou bastante no ensino de Matemática, baseado, segundo Gómez-Granell (2008) na manipulação sintática de símbolos e regras, deixando em segundo plano o significado destas regras. A manipulação destes símbolos leva os alunos a cometerem erros até mesmo em regras simples, tal fato ocorre porque eles não se detêm ao significado do conteúdo, assim como não tem incentivo em sala de aula para buscá-los. Nesta perspectiva temos *o significado formal* das ideias matemáticas.

Como os professores não incentivam a busca por significados, não é de se estranhar que os alunos não façam esta busca sozinhos. Como afirma Gómez-Granell (2008), com o intuito de minimizar os prejuízos do ensino/aprendizagem da Matemática foram aparecendo alternativas para melhorar o ensino, as tendências denominadas como conceituais ou semânticas. Nesta perspectiva temos *o significado referencial* das ideias matemáticas.

Opções metodológicas da pesquisa

O estudo aborda analisar como o futuro professor vai formular e resolver os problemas matemáticos com o conteúdo de Integral de Volumes, tendo como auxiliar o aplicativo Geogebra 3D, na busca pelos significados formal e referencial. Foi desenvolvido no Instituto Federal da Paraíba Campus Campina Grande, com alunos do curso de Licenciatura em Matemática, dando atenção à forma como os mesmos formulam e resolvem os problemas a partir de uma imagem do gráfico de alguns sólidos geométricos visualizados no Geogebra 3D. Procuramos observar como utilizavam seus conhecimentos para atribuir mais significados (formal e referencial) ao que estava sendo produzido, e como refletem sobre sua formulação e resolução.

O estudo de caso, opção escolhida, pois a consideramos como mais adequada para observar o uso da metodologia Formulação e Resolução de Problemas Matemáticos. Como indica Ventura (2007) o estudo de caso pode ser classificado, entre outros, como intrínseco ou particular, quando procura compreender melhor um caso particular em si. Todo caso pode ser decomposto em suas partes constituintes. Os dados foram coletados por meio da observação participante, entrevista semi-estruturada e registros das formulações e resoluções de problemas e das reflexões sobre as tarefas. De acordo com Yin (2010), a Observação Participante: “A observação participante é uma modalidade especial de observação na qual você não é simplesmente um observador passivo. Em vez disso, você pode assumir vários papéis na situação de estudo de caso e participar realmente nos eventos sendo estudados” (p.138).

Ao iniciar a coleta de dados da pesquisa, foram feitas entrevistas (no mês de julho de 2014), nas quais foram colocadas perguntadas um pouco sobre seus aspectos pessoais e profissionais, como também sobre a metodologia Formulação e Resolução de Problemas Matemáticos. Sendo que os participantes futuros professores do Instituto Federal da Paraíba Campus Campina Grande, matriculados na disciplina de Álgebra Linear I, escolha feita por o professor da disciplina, colaborador do Projeto *Investigando a Formulação e a Resolução de Problemas Matemáticos na Sala de Aula: Explorando Conexões entre Escola e Universidade* - OBEDUC/CAPES, no âmbito do qual a pesquisa se desenvolveu. Nestas entrevistas percebemos que os futuros a professores já tinham um pouco de conhecimento sobre a metodologia sugerida, bem como sobre o aplicativo Geogebra 3D.

Instrumentos e categorias de análise dos dados

No presente estudo, as técnicas de coleta de dados foram a *observação*, a *entrevista* e a *formulação e resolução de problemas matemáticos* a partir do GeoGebra 3D. Nesta Comunicação Breve focamos apenas no Caso Roberto.

Os momentos de observação foram calendarizados com o dois futuro professor de Matemática. Na observação das aulas utilizamos gravações de áudio, fotografias e notas de campo referentes a cada aula observada, que também foram fontes de evidencia para a escrita do caso. *As Categorias de Análise: Formulação e Resolução de Problemas Matemáticos*

(Registro o modo como o futuro professor de Matemática formulam e resolvem problemas Matemáticos a partir de imagens de gráficos).

1- *Formulação: Geração:* Formular a partir de imagens de sólidos de revolução um problema que possibilite visualizar os significados semânticos e sintáticos em cada problema construído; *Aceitação:* Construir um problema aceitando-o como importante e fundamental no processo de aprendizagem do conteúdo de Cálculo; *A Estratégia: O que seria se não fosse assim:* Buscar meios e ideias para formular e resolver problemas com mais de uma estratégia; 2- *Resolução: A interpretação do enunciado:* Interpretar o enunciado significa o primeiro momento para a resolução do problema; *As estratégias de resolução do problema:* os modos de resolução do problema.

2- *Formulação e Resolução de problemas matemáticos e desenvolvimento de significados:* Registro como o futuro professor de matemática formula, resolve problemas matemáticos e consegue interligar conteúdos a imagens dos gráficos. Sobre formular e resolver enfatizamos: Transferência da imagem gráfica para o conteúdo; Aspectos de conhecimento prévio sobre conteúdos matemáticos durante as formulações e resoluções; tipo de significado atribuído às ideias matemáticas (formal ou referencial); As conexões estabelecidas entre as ideias matemáticas e os significados.

O estudo de caso Roberto

Na *primeira sessão* sobre o Cilindro, Roberto conseguiu formular um problema interligando a imagem do gráfico a fórmula de volume do sólido com as coordenadas cilíndricas, formulando e resolvendo um problema com ênfase no significado formal, utilizando duas estratégias para a resolução (Ver Anexos).

A *segunda sessão* foi iniciada com uma *reflexão sobre a tarefa anterior*, na qual os casos expressaram o interesse sobre a metodologia utilizada, bem como um pouco de dificuldade em sua primeira formulação e resolução. Durante os questionamentos feitos, observamos que os casos não se prenderam à imagem gráfica, mostraram possibilidades de criação de outros problemas, assim como outros materiais a serem utilizados, como a régua, objetos com forma cilíndrica. No entanto, com certa dificuldade nas estratégias de resolução.

Ao iniciar a *sessão da esfera*, os casos sentiram-se mais entrosados com a formulação dos problemas matemáticos, nelas surgiram situações de semi-realidade, visualização da figura

plana (Ver Anexos). As formulações foram mais elaboradas, exigindo deles um pouco mais de tempo para desenvolvê-las, Roberto demonstrou certa facilidade relacionada ao conteúdo de Volumes da Esfera, formulou um problema com uma situação na qual valorizou o uso da imagem e a utilização das fórmulas e integrais.

Considerações Finais

A necessidade de buscar novas metodologias auxiliares à tradicional, ajuda na adequação da realidade e motiva os alunos para um ensino mais compreensível, obtido, de forma óbvia numa melhoria na aprendizagem e, por isso, tem consequências positivas no Ensino Superior, pois os alunos só começam a ver teorias axiomática- dedutivas apenas nos cursos universitários, em principal nos cursos de Matemática (Barufi, 2002). De maneira positiva podemos confirmar esta afirmação, de modo que os alunos se sentem desafiados e tentam vencer seus próprios limites para buscar algo novo.

Vinculado ao aplicativo GeoGebra 3D (Blosier & Richard, 2011), percebemos durante toda a pesquisa que foi trabalhada a metodologia formulação e resolução de problemas matemáticos, nos quais propicia alunos desenvolverem e construiram seus conhecimentos, levantaram hipóteses e chegaram às conclusões, em sua maioria (Brown & Walter, 2005). O futuro professor Roberto elaborou seus problemas utilizando os significados formal, com fórmulas e cálculos, bem como o significado referencial, com enunciados diversos de ideias significativas, o que deixou revelar a relevância dos conteúdos para sua vida. Em nosso último encontro, foi pedido para que fizesse uma breve reflexão escrita sobre os aspectos semânticos e sintáticos das formulações e resoluções dos problemas matemáticos.

Referencias bibliográficas

Barufi, M. C. B.; Lauro, M. M. (2001). *Funções elementares, equações e inequações: uma abordagem utilizando microcomputador*. CAEM – IME/USP.

Bishop, A.; Goffree, F. (1986). *Classroom organization and dynamics*. En B.Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.

Blosier, M., Richard, P.R. (2011). *Modélisation instrumentée et conceptions a priori dans un espace de travail géométrique en évolution: Un tour en géométrie dynamique*

tridimensionnelle. In *Actes des journées mathématiques de l'Institut français de l'Éducation*, 15 et 16 juin 2011, Lyon.

Brown, S., Walter. M. (2005). *The art of problem posing*. (3ª ed). New York: Routledge.

Gómez-Granell, C. (2008). A aquisição da linguagem matemática: símbolo e significado. En A. Teberosky y L. Tolchinsky (Eds.), *Além da alfabetização – A aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática*, Capítulo 11, pp. 257-282. São Paulo: Ática.

Nóbriga, J. C. C.; Araújo, L. C. L. (2010). *Aprendendo Matemática com o GeoGebra*. Brasília: Editora Exato.

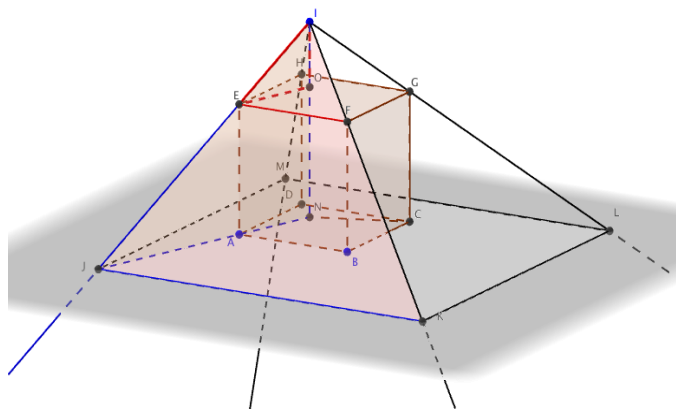
Silva, B. A. (2011). Diferentes dimensões do Ensino e aprendizagem do Cálculo. *Revista: Educação Matemática em Pesquisa*, São Paulo, 13, 393-413.

Ventura, M. M. (2007). O Estudo de Caso como Modalidade de Pesquisa. *Revista SOCERJ*. 20, 383-386.

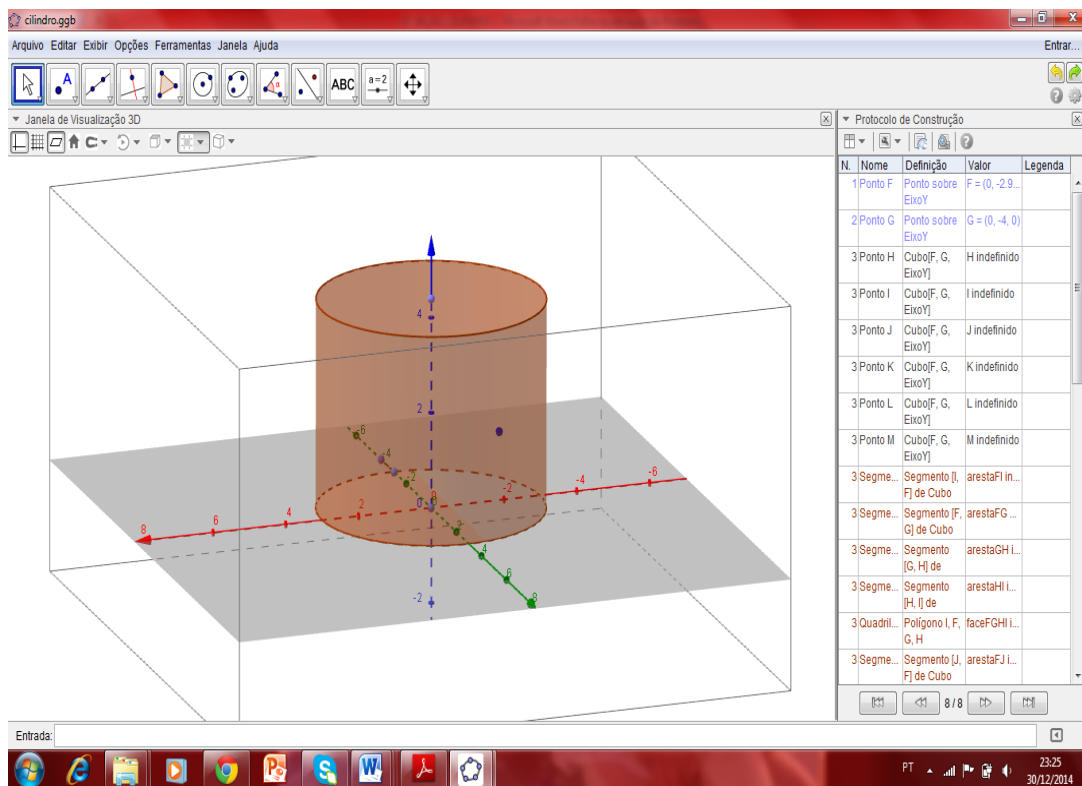
Yin, R. K. (2010). *Estudo de Caso: planejamento e métodos*. 4ª ed. Tradução Ana Thorell. São Paulo: Bookman.

ANEXOS

Figura 1: Visualização de funções no Geogebra 3D



Fonte: www.conferencias.ulbra.br em 10/07/2015

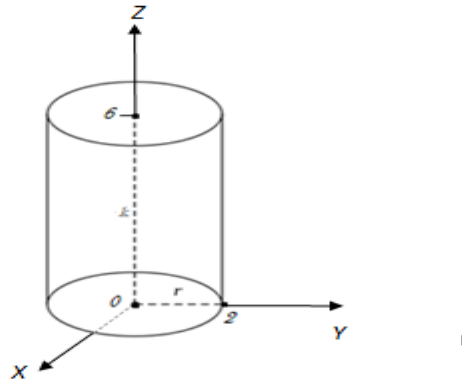


Fonte: Autoria de Janaína Cardoso da Silva

Figura 2: Primeira estratégia de resolução do problema formulado por Roberto

Formulação do Cilindro

Questão: Em uma indústria de peças, pretende-se construir uma peça cilíndrica com o raio da base de 2m, sabendo que a altura total do cilindro é dada por $z = k$, descubra o volume deste cilindro, onde o valor da constante k está dada na figura.



Solução pela equação do volume de cilindro.

Temos que a expressão para calcular o volume do cilindro é dado por:

$$V = \pi r^2 z$$

Substituindo os valores

$$V = \pi(2)^2 \times 6$$

$$V = \pi \times 4 \times 6$$

$$V \cong 75.4 \text{ m}^3$$

Figura 312: Segunda estratégia de resolução do problema formulado por Roberto

Em coordenadas cilíndricas temos que o volume de um cilindro pode ser dado por:

$$V = \iiint dv ; dv = \rho d\rho dz d\varphi$$

Temos que o limite de integração para cada coordenada, de acordo com a figura, vai ser dado por:

$$0 \leq \rho \leq 2$$

$$0 \leq z \leq 6$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Então temos que:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^6 \int_0^2 \rho d\rho dz d\varphi$$

Integrando em relação ao raio:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^6 \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^2 dz d\varphi$$

Integrando em relação à altura:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^6 \frac{4}{2} dz d\varphi$$

$$V = \int_0^{2\pi} 2z \Big|_0^6 d\varphi$$

Integrando em relação ao ângulo φ :

$$V = \int_0^{2\pi} 12 d\varphi$$

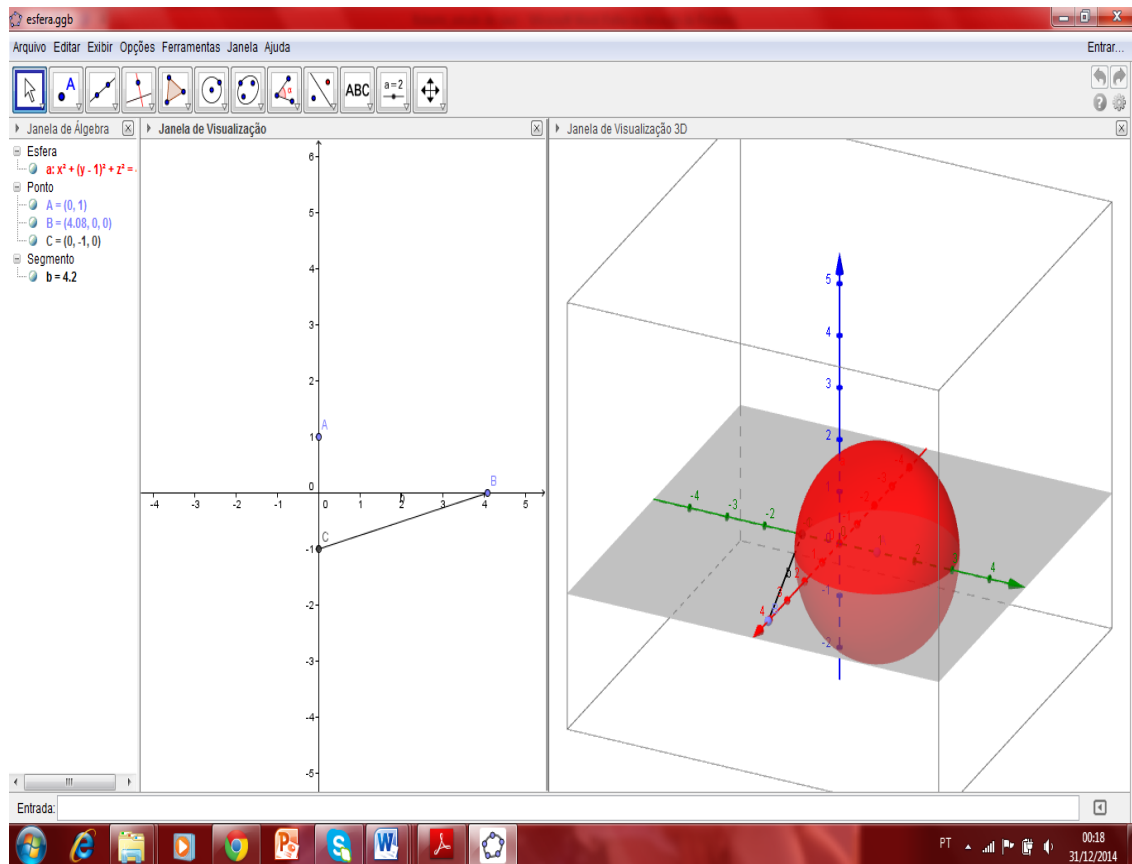
$$V = 12 \varphi \Big|_0^{2\pi}$$

Então temos que:

$$V = 12 \times 2\pi$$

$$V \cong 75.4m^3$$

Figura 4: Figura da esfera apresentada na segunda sessão de formulação



Fonte: Autoria de Janaína Cardoso da Silva

Figura 5: Primeira resolução do problema sobre a esfera formulado por Roberto

Questão: em uma metalúrgica, um funcionário procura fundir duas esferas de ferro, com objetivo de transformar em uma única esfera, cada uma tem volumes diferentes, sabendo que os raios de cada são de 30 cm e 50 cm, como podemos encontrar o volume para a esfera transformada.

Solução pela equação do volume da esfera:

Calculando o volume de cada esfera:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Para a esfera de raio de 0,30 m:

$$V_1 = \frac{4}{3} \pi (0,30)^3$$

$$V_1 = \frac{4}{3} \pi (0,027)$$

$$V_1 \cong 0,11 \text{ m}^3$$

Para a esfera de raio de 0,50 m:

$$V_2 = \frac{4}{3} \pi (0,50)^3$$

$$V_2 = \frac{4}{3} \pi (0,125)$$

$$V_2 \cong 0,52 \text{ m}^3$$

Então para o volume da esfera transformada temos que será a soma do volume das duas esferas

$$V = V_1 + V_2$$

$$V = 0,11 + 0,52$$

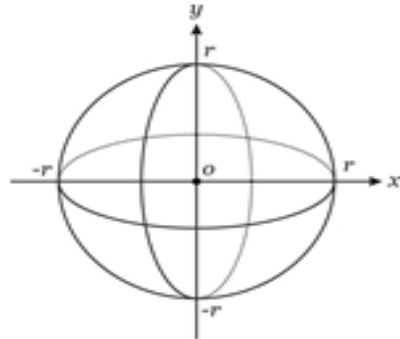
$$V = 0,63 \text{ m}^3$$

Português (Brasil)

Figura 6: Segunda resolução do problema sobre a esfera formulado por Roberto

Solução por integral:

Considerando a figura:



Como a esfera está com a origem no centro a equação de sua circunferência será:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Então,

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Para encontrar o volume da esfera vamos supor fatias de larguras infinitesimais dx e raio y , logo podemos dizer que a esfera é formada por infinitos cilindros de alturas infinitesimais dx em que o raio y vai variar de acordo com cada cilindro.

Então o volume do cilindro será:

$$V_c = \pi y^2 dx$$

Logo para calcular o volume da esfera temos:

$$V = \int V_c$$

$$V = \int_{-r}^r \pi y^2 dx$$