

# CATEGORIZACIÓN DE ERRORES EN LA ESTIMACIÓN DE CANTIDADES DE LONGITUD Y SUPERFICIE

Jesús J. Castillo-Mateo<sup>1</sup>, Isidoro Segovia<sup>2</sup>, Enrique Castro<sup>2</sup> y Marta Molina<sup>2</sup>

<sup>1</sup>IES “Algazul” (Roquetas de Mar), <sup>2</sup>Universidad de Granada

## Resumen

*En una investigación de diseño en curso sobre estimación de cantidades continuas (longitud y superficie), se han detectado importantes deficiencias en la capacidad estimativa de alumnos de 3º de E.S.O. Se ha elaborado una categorización de los errores cometidos en la realización de tareas estimativas que permite analizar el efecto, del proceso de enseñanza implementado en la capacidad estimativa de los alumnos, y la vinculación del tipo de error con la magnitud a estimar.*

*Palabras Clave:* Magnitudes continuas, Estimación, Experimento de enseñanza, Investigación de diseño, Longitud, Superficie

## Abstract

*In an ongoing design research study on estimation of continuous quantities (length and surface), we detected significant deficiencies in 3<sup>er</sup> year of E.S.O students' estimation ability. We have developed a categorization of errors in estimation tasks that allow to analyze the effect of the teaching process implemented on the estimation ability of the students, and to link the type of error to the magnitude to be estimated.*

*Keywords:* Continuous magnitudes, Design research, Estimation, Length, Teaching experiment, Surface

## Introducción: Origen y Planteamiento

Esta investigación supone una continuación al previo Trabajo de Investigación Tutelada (T.I.T.), que lleva por título “Estimación de cantidades continuas: Longitud, Superficie, Capacidad y Masa” (Castillo, 2006). Dicho estudio tuvo su origen en unas prácticas que realizaban los estudiantes de magisterio de la Facultad de Ciencias de la Educación de Granada, en las que se les pedía que estimaran diversas cantidades de las magnitudes continuas: Longitud, Superficie, Capacidad y Masa. En estas prácticas se detectó que muchos de los estudiantes daban como respuesta a algunas cuestiones de estimación lo que cabría calificarse de “disparate”, en el sentido de que el error absoluto cometido era incluso superior al 100%.

La estimación es relevante para el currículo actual, pues la Estimación en Medida es en la actualidad un contenido obligatorio tanto en Educación Primaria como en Educación Secundaria según los reales decretos de contenidos mínimos correspondientes (el Real Decreto 1513/2006 para Primaria, y 1631/2006 para Secundaria).

El estudio que aquí presentamos trata de profundizar en las causas que provocan que los alumnos incurran en un error tan elevado. La investigación está centrada en la estimación, es decir, en el “juicio de valor del resultado (de una operación numérica o

*de la medida de una cantidad en función de circunstancias individuales del que lo emite*” (Segovia, Castro, Rico y Castro, 1989, p.18). Como se deduce de esta definición la estimación tiene dos grandes campos: la estimación en cálculo o cálculo estimativo, y la estimación en medida. Nuestra investigación se centra en la estimación en medida de cantidades de magnitudes continuas, en concreto, la longitud y la superficie.

Para investigar los factores que hacen que la capacidad estimativa mejore y las dificultades que surgen al enfrentarse a tareas de estimación de cantidades continuas, llevamos a cabo un experimento de enseñanza con un grupo de alumnos de 3º curso de E.S.O. multicultural siguiendo el modelo de las Investigaciones de Diseño (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011).

### **Validez o Aceptabilidad de una Estimación**

El error forma parte del conocimiento científico, y en el caso de la estimación su aceptación y el tratar de controlarlo constituye una parte esencial en el proceso enseñanza-aprendizaje.

El error admite muchos grados de incorrección, según Rico (1995): “Las características del error son muy variadas, sobre todo en cuanto al grado de incorrección: podemos estar hablando de resultados falsos, resultados parciales o aproximados, resultados correctos obtenidos mediante procedimientos deficientes o inaceptables, resultados que pueden ser correctos en un determinado contexto, pero no en otro...”. Cuando se realiza una estimación, estamos emitiendo una opinión, un juicio, una valoración. Por tanto, el valor que obtenemos difícilmente va a coincidir con el exacto, va a ser un valor aproximado, al que se dará mayor o menor validez en función de las necesidades de dicha estimación. En las diferentes investigaciones llevadas a cabo en el campo de la estimación, los investigadores no se ponen de acuerdo a la hora de establecer un criterio para determinar cuándo una estimación es aceptable, válida, correcta o razonable: Paul (1971) tomó como límite el 15%; Attivo (1979) establece el criterio en  $\pm 15\%$  de la respuesta exacta; Hildreth (1980) en  $1/3$  del valor exacto; Levine (1982) establece una escala graduada, según la cuál no valora la respuestas con un error superior al 30%; Reys et al (1982) toma como límite el 10% superior de los sujetos; Siegel et al (1982) toma como límite :  $\pm 50\%$  del valor exacto; Clayton (1992) tomo un criterio para cantidades inferiores a 100 (Criterion of Reasonableness, COR, que establece el límite en  $\pm 20\%$  del valor real) y otro para cantidades grandes. Por lo general, la mayoría de los autores define el límite o criterio para determinar cuándo una estimación es aceptable o razonable en función de la proximidad de dicha estimación al valor considerado exacto.

En nuestro estudio consideraremos que una medida o estimación es válida o aceptable si el error relativo cometido es en valor absoluto menor o igual al 30%, límite utilizado por Levine (1982), Segovia (1997), o De Castro (2012).

En general, cuando estamos realizando estimaciones podemos hablar de dos clases de error: errores intrínsecos al proceso de estimación, y errores extrínsecos al proceso de estimación. Los primeros son debidos a las características propias del proceso estimativo. Estos errores tienen un margen o rango de aceptación que, en general, variará en función de las características de la cantidad a estimar y, sobre todo, de la finalidad de dicha estimación. Los errores extrínsecos al proceso de estimación son los derivados de conceptos mal adquiridos o procedimientos utilizados erróneamente.

## Objetivos de la Investigación

El estudio que estamos realizando con un grupo de alumnos de 3º de E.S.O. persigue los siguientes objetivos específicos de investigación:

1. Analizar cómo construyen los alumnos, en la etapa de la educación obligatoria, los significados de la Estimación de Cantidades Continuas, Longitud y Superficie.
2. Detectar los errores que cometen y las dificultades que experimentan en la realización de tareas de estimación.
3. Explorar la influencia del tipo de tarea en la realización de estimaciones.
4. Analizar cómo evoluciona la Capacidad Estimativa de los alumnos con la práctica.

Para responder al segundo objetivo nos planteamos la posibilidad de realizar una clasificación de los errores. Ello nos llevó a una categorización que presentaremos a continuación.

## Metodología

Describimos a continuación el grupo de sujetos que formaron parte del estudio empírico, el método de investigación y el instrumento utilizado.

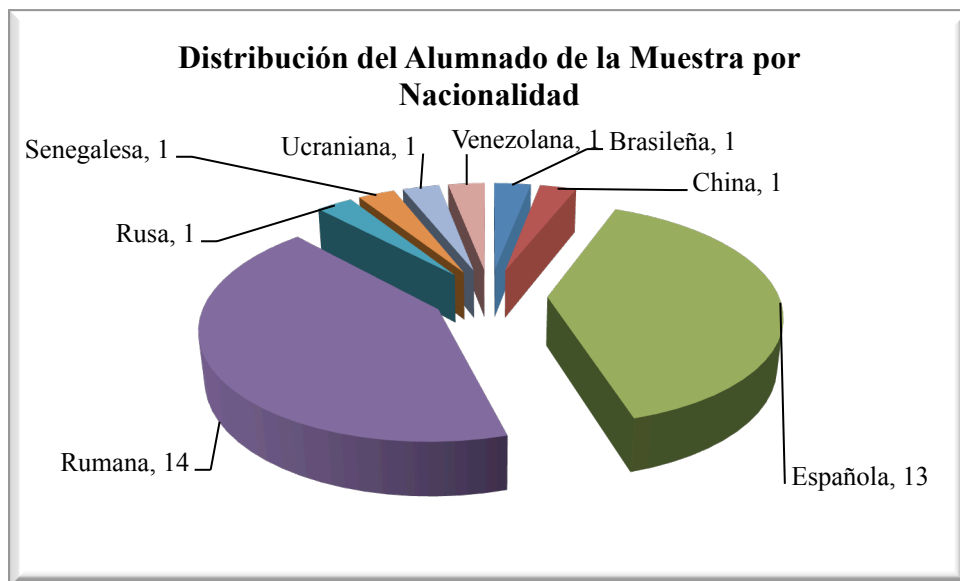


Figura 1. Distribución del Alumnado de la Muestra por Nacionalidades.

### Los Sujetos

El experimento de enseñanza se realizó con un grupo de 33 alumnos del IES “Algazul” de Roquetas de Mar (Almería), centro que desarrolla un Programa de Compensación Educativa, empleando entre otras medidas de atención a la diversidad, Grupos Flexibles en algunas materias, como es la que nos ocupa. Los grupos flexibles son una forma de organizar al alumnado de cada curso en varios subgrupos teniendo en cuenta el nivel de competencia curricular del alumno (ritmo de aprendizaje y nivel de conocimientos previos). El carácter flexible de estas agrupaciones, que se organizan en la misma banda horaria, permite que se vayan integrando los alumnos paulatinamente en el grupo que

sigue el currículo normal, una vez que han cubierto las carencias y lagunas de aprendizaje detectadas.

El grupo de alumnos estaba formado por 12 alumnos y 21 alumnas, de una gran variedad de nacionalidades: ocho nacionalidades distintas, de las cuales destacan dos la española y la rumana por ser las más numerosas (véase Figura 1).

### *Investigación de Diseño*

Para alcanzar los objetivos propuestos realizamos un experimento de enseñanza que enmarcamos dentro del paradigma metodológico denominado Investigación de Diseño. En palabras de Molina et al (2011) el objetivo de este tipo de estudios es “*analizar el aprendizaje en contexto mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza, de una forma sensible a la naturaleza sistémica del aprendizaje, la enseñanza y la evaluación*” (p.76). Nuestro trabajo es exploratorio y descriptivo. Pretendemos indagar en un proceso de enseñanza/aprendizaje y tratar de analizar qué ocurre y cómo ocurre, modelo que es adecuado para dar respuesta a los objetivos planteados.

La fase empírica de nuestra investigación, realizada durante el curso académico 2007/2008, consta de una sesión de evaluación inicial y otra de evaluación final y seis sesiones de trabajo intermedias en las que, utilizando diferentes agrupamientos, se propusieron a los estudiantes tareas de estimación dirigidas a incidir el desarrollo de su capacidad estimativa. En concreto, trabajamos los siguientes contenidos:

- ✓ Identificación y/o diferenciación de las magnitudes longitud y superficie.
- ✓ Representaciones de figuras planas y de cuerpos geométricos.
- ✓ Unidades de medida de longitud y superficie.
- ✓ Interiorización de referentes.
- ✓ Evaluación de errores por los estudiantes.
- ✓ Procesos o estrategias de comparación.
- ✓ Evaluación de la capacidad estimativa.

### *Ficha de Evaluación Inicial y Final*

Nos centramos aquí en detallar la primera y última sesión (Evaluación Inicial y Final) en las cuales centraremos el apartado de resultados. En ambas sesiones los estudiantes resolvieron una misma ficha de evaluación que contenían las tareas que se presentan en la Tabla 1, organizadas en dos bloques según correspondían a estimación de cantidades de longitud o de superficie.

En las fichas los alumnos contaban con espacio suficiente tras cada tarea, no sólo para realizar las estimaciones, sino también para expresar los razonamientos que habían seguido para llegar a las mismas. Además, no se les impusieron restricciones para expresar el resultado, por tanto, pudieron escoger libremente la unidad de medida a utilizar.

Las tareas son de dos tipos siguiendo la clasificación establecida por Del Olmo, Moreno y Gil (1989): tipo A, cuando se dispone del objeto y hay que estimar la medida respecto de una unidad; tipo B, cuando se dispone de la medida de un objeto respecto de una unidad y hay que estimar de qué objeto se trata. Atendiendo a esta clasificación las tareas se clasifican como sigue:

Tareas tipo A: I.1; I.3; I.5; I.7; II.1; II.3; y II.5.

Tareas tipo B: I.2; I.4; I.6; II.2; II.4; y II.6.

El análisis de ambos tipos de tareas es diferente puesto que lo que se les pide en ellas es diferente: para las tareas del tipo A se espera que los alumnos den un resultado (valor numérico acompañado de una unidad de medida) y expresen el razonamiento de cómo llegaron a obtener dicho valor numérico; en cambio, para las del tipo B se espera que los alumnos escriban tres palabras o frases alusivas a objetos o elementos con unas medidas determinadas. La categorización de errores que presentamos a continuación clasifica los errores que tuvieron lugar en las tareas tipo A.

Numeración	Pregunta
<b>BLOQUE I: ESTIMACIÓN DE CANTIDADES DE LONGITUD.</b>	
I.1	¿Cuánto mide aproximadamente de largo la mesa del profesor?
I.2	Cita tres objetos u elementos con una longitud aproximada de 1 dm.
I.3	¿Qué grosor tiene aproximadamente la mesa sobre la que estas escribiendo?
I.4	Cita tres objetos u elementos con una longitud aproximada de 1 m
I.5	¿Cuánto mide aproximadamente (de largo) el bote de pegamento en barra que hay encima de la mesa del profesor?
I.6	Cita tres objetos u elementos con una longitud aproximada de 1 cm.
I.7	¿Qué longitud aproximada tiene la cuerda que hay colgada en la pared?
<b>BLOQUE II: ESTIMACIÓN DE CANTIDADES DE SUPERFICIE</b>	
II.1	¿Cuánto mide aproximadamente la superficie de la pizarra?
II.2	Cita tres objetos u elementos con una superficie aproximada de 1 cm <sup>2</sup>
II.3	¿Cuánto mide aproximadamente la superficie de la diana?
II.4	Cita tres objetos u elementos con una superficie aproximada de 1 m <sup>2</sup> .
II.5	¿Cuánto mide aproximadamente la superficie del mapa de España?
II.6	Cita tres objetos u elementos con una superficie aproximada de 1 dm <sup>2</sup> .

*Tabla 1. Tareas Propuestas en la Fichas de Evaluación Inicial y Final*

### **Categorización de los Errores**

Para clasificar las respuestas según los resultados y los razonamientos expresados por los alumnos consideramos la siguiente tipología de errores:

#### *E1. Error de cálculo en las operaciones*

Consideraremos que un alumno comete un error de este tipo cuando se equivoca en la realización de los cálculos. Por ejemplo, el alumno A25 responde en la tarea II.3 de la Evaluación Final que la superficie de la diana es de “15x15 cm=30 cm<sup>2</sup>”. Como observamos el alumno suma en vez de multiplicar.

#### *E2. Error de percepción de la magnitud*

Diremos que un alumno comete este tipo de error cuando al resolver una tarea, en su argumentación pone de manifiesto que está confundiendo una magnitud con otra. Por ejemplo, el alumno A1 en la tarea II.1 de la Evaluación Inicial responde que la superficie de la pizarra es de “1 m” y lo justifica: “Si la cuerda mide 1 m y medio, si

ponemos la cuerda como medida nos sobrara.”. Claramente está confundiendo superficie con longitud.

### *E3. Error de significado de términos propios de la magnitud*

Un alumno comete un error de tipo E3 cuando utiliza inadecuadamente o confunde algún término relacionado con la magnitud que esta estimando. La confusión de la propia magnitud será considerada en el error tipo E2, como hemos concretado anteriormente. Por ejemplo, el alumno A5 responde en la tarea I.3 de la Evaluación Inicial que la mesa mide “1 metro” y argumenta: “Porque más o menos cuando extiendes los brazos es 1 metro aproximado y lo he comparado”. Entendemos a partir del razonamiento expresado, que el alumno confunde el significado de la palabra grosor.

### *E4. Ausencia de unidades de medida*

Un alumno comete error del tipo E4 cuando expresa como resultado de una medida o estimación un valor numérico sin revelar a qué unidad de medida se refiere. Así, el alumno A23 responde en la tarea I.1 de la Evaluación Inicial que la longitud de la mesa es de “1’50”, sin indicar ninguna unidad de medida.

### *E5. Empleo de unidades de medida no adecuadas*

Un alumno comete un error del tipo E5 cuando expresa la medida de una determinada cantidad de magnitud utilizando unidades de medida propias de otra magnitud. Por ejemplo, el alumno A12 en la tarea II.1 de la Evaluación Inicial responde que la superficie de la pizarra mide “8 m aproximadamente”, y argumenta “He multiplicado 4 m de ancho por 2 m de largo.  $4 \cdot 2 = 8$  m.”. Aquí podemos apreciar que el alumno se está refiriendo a la magnitud superficie, pero no ha utilizado una unidad coherente con la magnitud que está estimando al dar el resultado. Este sería un ejemplo de un alumno que incurre en error de tipo E5, pero no E2; conjuntamente también se dan.

### *E6. Error de conversión de unidades de medida*

Un alumno comete error de tipo E6 cuando transforma la medida de una determinada cantidad de magnitud de una unidad de medida a otra, múltiplo o divisor de la anterior, y no realiza correctamente la conversión. Por ejemplo, el alumno A13 en la tarea II.1 de la Evaluación Inicial indica que 2.5 metros son “0’25 dm”.

### *E7. Interiorización inadecuada de referentes de la propia magnitud a estimar*

Un alumno incurre en un error del tipo E7 cuando no tiene interiorizada una medida adecuada o aceptable de algún referente de la magnitud a estimar. Por ejemplo, el alumno A6 responde, en la tarea I.1 de la Evaluación Final, que la longitud de la mesa del profesor es “2 metros” porque “Si una mesa de alumno mide un metro la mesa de profesor mide aproximadamente dos mesas de alumno”. El referente utilizado (la mesa del alumno) medía 70 cm de largo (incurre en un porcentaje de error del 42.9%). El origen de este error es que no tiene interiorizada una medida adecuada para el referente que utiliza.

### *E8. Interiorización inadecuadas de unidades de medida del S.I. de la magnitud a estimar*

Un alumno comete error del tipo E8 cuando no tiene interiorizada una cantidad adecuada o aceptable de una unidad de medida del Sistema Internacional. Consideramos que el alumno comete este error cuando compara directamente con las unidades de medida del Sistema Internacional o utiliza sus múltiplos o divisores tomando como

unidad de medida una cantidad que no se corresponde con dicha unidad de medida. Por ejemplo, el alumno A21 responde en la tarea I.7 de la Evaluación Inicial que la longitud de la cuerda es de “cuatro metros” y argumenta “La he dividido en 4 partes, para ver si un cuarto, equivaldría a un metro. Sí equivale. Por lo que la cuerda mide cuatro m. aproximadamente”. Aquí el alumno compara la cuarta parte de la cuerda con la idea que tiene interiorizada de lo que es un metro y llega a la conclusión de que son iguales, incurriendo en un error del 33.3% (recordemos que la cuerda medía 3 metros) fuera del margen de aceptabilidad que hemos establecido.

#### *E9. Error en la comparación de cantidades*

Un alumno comete error del tipo E9 cuando realiza una comparación e iguala cantidades que no lo son, dando lugar a una estimación no aceptable.

Este tipo de error puede ser de tres subtipos:

##### a) Error en la comparación por igualdad de cantidades

Un alumno comete este error cuando considera iguales cantidades que no lo son. Por ejemplo, el alumno A14 respondió en la tarea I.7 de la Evaluación Final que la longitud de la cuerda era de “2 m” razonando: “He comparado la cuerda con la longitud de la puerta que tiene 2 m y creo que son aproximadamente iguales. Creo que tiene unos 2 m”. Si tomamos como válida la medida de la longitud de la puerta (ya que medía 2.05 m), y teniendo en cuenta que la medida exacta de la cuerda era 3 m obtenemos un porcentaje de error de -33%.

##### b) Error en la comparación aditiva de cantidades

Un alumno incurre en este error cuando obtiene un resultado fuera del margen de aceptabilidad mediante la suma de la medida de dos cantidades o la diferencia de cantidades. Por ejemplo, el alumno A11 contesta en la tarea I.1 de la Evaluación Final que la longitud de la mesa del profesor (recordemos que medía 1.4 m) es de “1 metro”, y argumenta: “Nuestra mesa mida más o menos 70 cm, y he pensado que la del profesor sería un poco más grande así que le he sumado 30 cm;  $70+30=100\text{ cm}=1\text{ m}$ .”

##### c) Error en la comparación multiplicativa de cantidades

El error lo comete el alumno al comparar una cantidad con un múltiplo de la otra cantidad o con un divisor de la otra cantidad y obtener un resultado fuera del margen de aceptabilidad. Por ejemplo, el alumno A10 responde en la tarea I.3 de la Evaluación Inicial que el grosor de la mesa sobre la que escribía era de “4 cm” justificándolo del siguiente modo: “porque sé que 1 cm es como 2 cuadritos de hoja de libreta normal y si la mesa es 4 veces más gorda significa que tiene 4 cm”. Como el grosor de la mesa era de 2 cm obtenemos que el alumno incurrió en un error del 100%.

#### *E10. Uso de procedimientos de cálculo incorrectos*

Diremos que un alumno comete error del tipo E10 cuando obtiene la estimación de la medida empleando una fórmula inadecuada. Consideramos que una fórmula inadecuada es aquella que no nos permite hallar una aproximación de la cantidad pedida. Las fórmulas inadecuadas son frecuentemente fórmulas erróneas. Por ejemplo, el alumno A4 utiliza en la tarea II.1 de la Evaluación Inicial como fórmula para medir el área de la pizarra: “ $2'5+1'5=4\text{m}$ ; Longitud+Altura=4 m”. Lógicamente, el alumno está utilizando una fórmula errónea, y por tanto, inadecuada.

Los errores descritos los clasificamos por una doble vía (véase Tabla 2): según el carácter del error, tenemos errores conceptuales y procedimentales; y atendiendo a la

relación con el proceso estimativo tenemos errores intrínsecos al proceso estimativo, que son los que se producen en la actividad propiamente estimativa, y los errores extrínsecos al proceso estimativo, que son los debidos a otros conceptos o procedimientos deficientemente adquiridos, como pueden ser los asociados a la magnitud o a su medida.

Tipos de Error	Carácter	Relación con el Proceso Estimativo
E1. Error de cálculo en las operaciones	Procedimental	Extrínseco
E2. Error de percepción de la magnitud	Conceptual	Extrínseco
E3. Error de significado de términos propios de la magnitud	Conceptual	Extrínseco
E4. Ausencia de unidades de medida	Conceptual	Extrínseco
E5. Empleo de unidades de medida no adecuadas	Conceptual	Extrínseco
E6. Error de conversión de unidades de medida	Procedimental	Extrínseco
E7. Interiorización inadecuada de referentes de la propia magnitud a estimar	Conceptual	Intrínseco
E8. Interiorización inadecuadas de unidades de medida del S.I. de la magnitud a estimar	Conceptual	Intrínseco
E9. Error en la comparación de cantidades	Procedimental	Intrínseco
E10. Uso de procedimientos de cálculo incorrectos	Procedimental	Extrínseco

*Tabla 2. Clasificación de los Tipos de Error*

Las anteriores categorías de error están referidas a estimación de longitudes y superficies. En muchos casos en los que los estudiantes estiman superficies, detectamos que al utilizar técnicas indirectas de estimación, como es el empleo de fórmulas matemáticas, la estimación de la superficie se reduce a estimar cantidades de la magnitud longitud y emplear dichas cantidades en la fórmula. Hay una tipología de error que solo tiene sentido para la magnitud superficie.

*E11. Error por propagación de la longitud a la superficie*

Diremos que un alumno comete error del tipo E11 cuando utiliza una fórmula adecuada en la estimación de la superficie, pero realiza una estimación deficiente de diferentes cantidades de la magnitud longitud, que utiliza posteriormente en la fórmula matemática, lo cual da lugar a que el porcentaje del error en la estimación de la magnitud superficie supere el 30%, y en consecuencia, la estimación sea no aceptable.

Para aplicar esta categoría no profundizaremos en la valoración de los motivos por los cuales las estimaciones de la magnitud longitud son deficientes, ni qué porcentaje de error se comete al realizar dichas estimaciones, ya que lo que nos interesa es controlar que el porcentaje de error de la estimación de la magnitud superficie no supere los límites establecidos (30% en nuestro caso). Téngase en cuenta que es posible que las estimaciones de la magnitud longitud sean aceptables (en el sentido de que no superan el 30%), pero resulte que la estimación de la magnitud superficie sea no aceptable. Por



ejemplo, el alumno A21, en la tarea II.3 de la Evaluación Final estima que el área de la diana es “530’66 cm<sup>2</sup>”. Estimación no aceptable (superior al 30%), porque comete un error relativo del 39.65% (recordemos que el valor considerado exacto es 380 cm<sup>2</sup>). En este caso el alumno utiliza la fórmula del área del círculo correctamente, pero comete un error al estimar el radio de la diana, ya que indica que el radio “estimado a simple vista valdría 13 cm”. Sin embargo, el error que comete al estimar el radio es aceptable, ya que tan sólo comete un error relativo del 18.18% (el valor considerado exacto del radio es de 11 cm). La explicación para esta propagación del error la encontramos en la Teoría de Errores. En nuestro caso, si llamamos “r” al radio exacto y “e” al error cometido al estimar el radio, al aplicar la fórmula del área del círculo se obtiene:

$$A_e = \pi(r + e)^2 = \pi(r^2 + e^2 + 2re) = A + \pi(e^2 + 2re)$$

En el desarrollo se observa que el área estimada “A<sub>e</sub>” es igual al área exacta “A” más un residuo: “ $\pi(e^2 + 2re)$ ” que es el error cometido en la estimación de la superficie, y depende del error cometido al estimar el radio “e” y del valor exacto del propio radio “r”.

No incluimos el error E11 en la Tabla 2 pues su clasificación depende de la naturaleza del error en que se incurre cuando se estima la magnitud longitud.

### Resultados del Análisis de Errores

Las respuestas dadas por los alumnos a cada una de las tareas tipo A, de la Evaluación Inicial y Final, son clasificadas atendiendo a la tipología anteriormente descrita. El proceso de clasificación ha sido realizado por tres investigadores, resolviéndose por consenso los desacuerdos. A partir de dicha clasificación generamos las frecuencias relativas utilizadas en los gráficos de la Figura 2, para la Evaluación Inicial, y de la Figura 3, para la Evaluación Final.

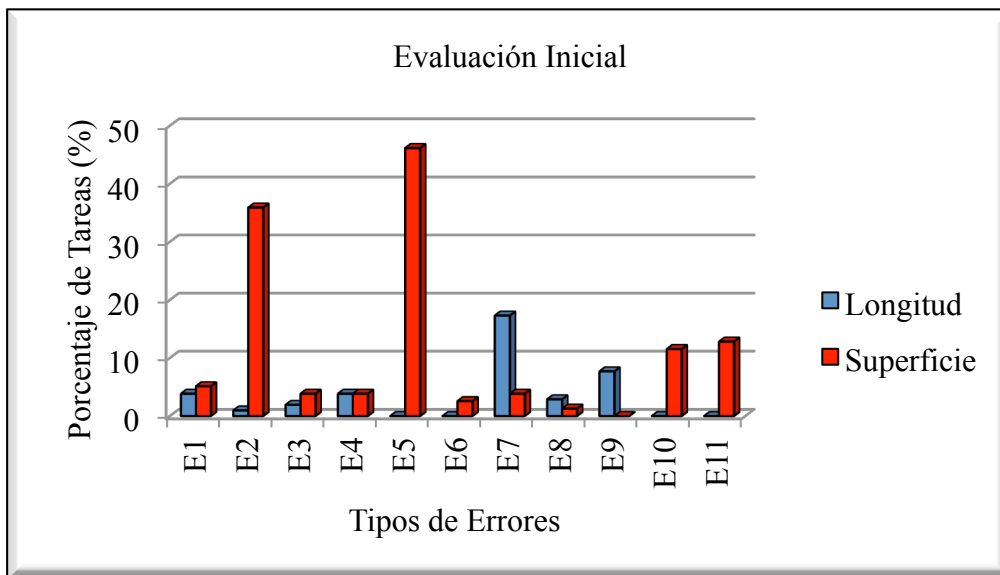


Figura 2. Frecuencias Relativas de los Tipos de Error en la Evaluación Inicial.

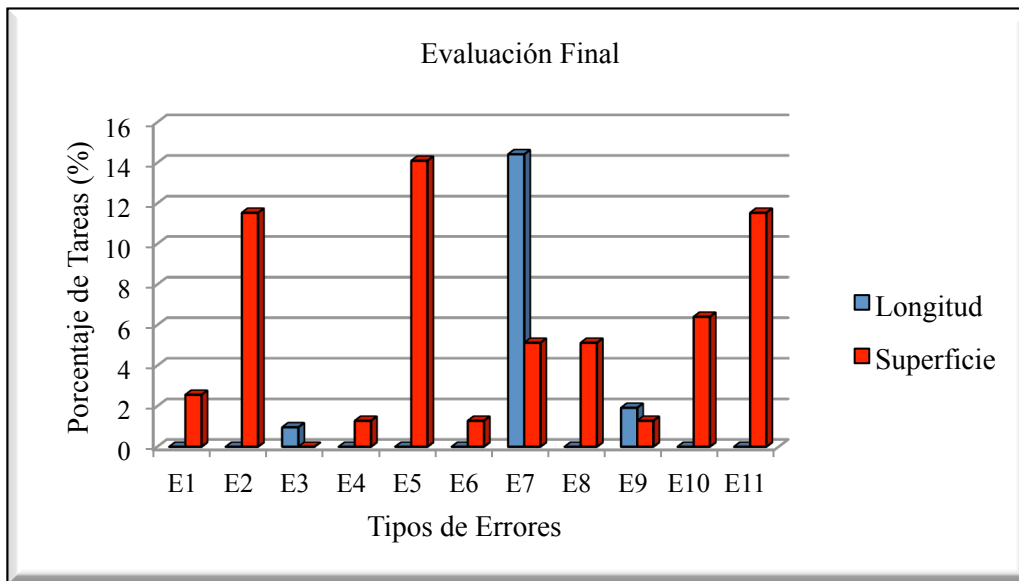
#### Resultados en la Evaluación Inicial

La Figura 2 muestra las frecuencias relativas en porcentaje de error de los diferentes tipos de error en la Evaluación Inicial. Observamos como para las estimaciones de longitudes el error más frecuente es del tipo E7 (se presenta en el 17.31% del total de tareas evaluadas) seguido del E9 (en el 7,69% del total de tareas), errores intrínsecos al

proceso estimativo. En cambio, para las estimaciones de superficies los errores más frecuentes son el E5 (se presenta en el 46.15% del total de tareas) y el E2 (35.9% del total de tareas), ambos son errores conceptuales extrínsecos al proceso estimativo, seguidos del error E11 (12.82%) y E10 (11.54%) que son errores asociados al uso de fórmulas matemáticas, por tanto, errores procedimentales extrínsecos al proceso estimativo de superficies.

*Resultados en la Evaluación Final*

En el caso de la Evaluación Final observamos (véase Figura 3) que se mantienen como más frecuentes los mismos tipos de error que para la Evaluación Inicial, aunque disminuyen las frecuencias para casi todos ellos. En las estimaciones de longitudes el tipo de error más frecuente sigue siendo el E7 (14.42%) seguido del E9 (1.92%). En las estimaciones de superficies los tipos de error más frecuentes son el E5 (14.1%), el E2 (11.54%), el E11 (11.54%) y el E10 (6.41%). En las estimaciones de superficies de la Evaluación Final disminuyen los errores extrínsecos a procesos estimativos respecto de la Evaluación Inicial, además algunos de ellos considerablemente, como ocurre con el E5 o el E2. Sin embargo, aumentan las frecuencias de los errores intrínsecos a procesos estimativos, como ocurre con el E8, E7 o E9. Esto creemos que es debido a que los alumnos, en la Evaluación Final, se “atrevían” a realizar estimaciones directas de las superficies, evitando tener que recurrir a fórmulas matemáticas, más frecuentes en la Evaluación Inicial.



*Figura 3. Frecuencias Relativas de los Tipos de Error en la Evaluación Final.*

*Comparativa Evaluación Inicial-Evaluación Final*

Realizamos la comparativa de errores entre las tareas tipo A de la Evaluación Inicial-Final distinguiendo la magnitud a estimar:

a) Para las tareas de estimación de longitudes:

La Figura 4 muestra como disminuyen las frecuencias de todos los tipos de error para las estimaciones de longitudes. El error más frecuente sigue siendo el E7, error propio de procesos estimativos.

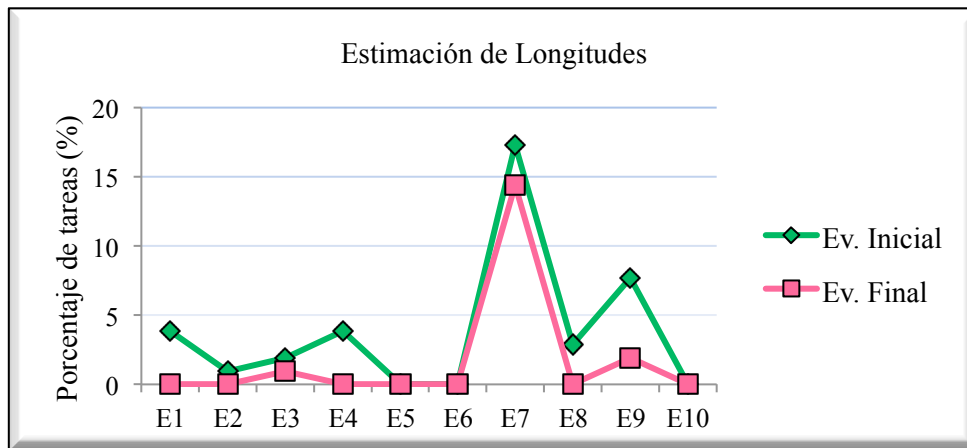


Figura 4. Frecuencias Relativas de los Tipos de Error en las Estimaciones de Longitudes

b) Para las tareas de estimación de superficies:

Es aquí donde encontramos una mejoría más notable (véase Figura 5), pues el número de respuestas erróneas desciende para casi todos los tipos de error, en algunos casos drásticamente, como ocurre con los tipos E2 o E5. Esto nos sugiere que se produjo una mejora en la interiorización del concepto de superficie y en el uso de sus unidades de medida. El error del tipo E10 también disminuye. Esto supone que las tareas de estimación de superficies propuestas contribuyeron a la interiorización de fórmulas matemáticas.

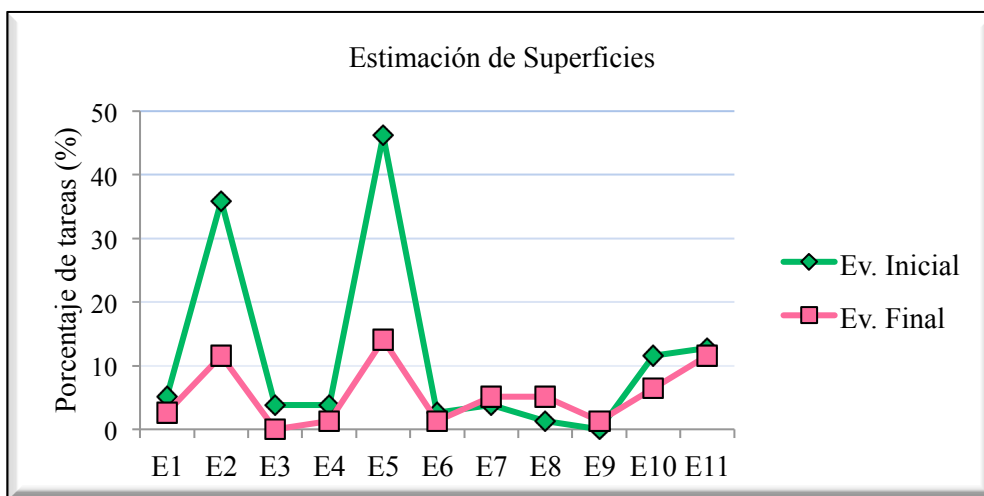


Figura 5. Frecuencias Relativas de los Tipos de Error en las Estimaciones de Superficies

### Conclusiones

Las conclusiones que presentamos a continuación son relativas a los resultados obtenidos con una muestra de conveniencia, y por tanto, con una representatividad limitada. En consecuencia, las conclusiones que se derivan servirán como una primera prospección.

Concluimos que los alumnos en las estimaciones ponen de manifiesto cierto dominio conceptual y procedimental de la magnitud longitud y su medida y sin embargo manifiestan falta de dominio conceptual y procedimental para la magnitud superficie

Esto supone, para el caso de la superficie, un obstáculo para evaluar la capacidad estimativa de los alumnos.

Los alumnos, manifiestan tendencia al uso de fórmulas matemáticas cuando realizan estimaciones de superficies. Posiblemente, porque la enseñanza no trabaja lo suficiente la medida directa de superficies.

Aunque la estimación mejora con la práctica, hay unos errores que son más persistentes que otros. Por ello, creemos que la estimación debería ser trabajada transversalmente, poniéndola en práctica en cualquier tarea que se preste. Además, la estimación constituye un campo de trabajo que permite detectar deficiencias conceptuales y procedimentales básicas, al mismo tiempo que constituye un campo de entrenamiento para el manejo de conceptos y destrezas relativos a las magnitudes y a su medida.

## Referencias

- Attivo, B. J. (1979). *The Effects of Three Instructional Strategies on Prospective Teacher's Ability to Estimate Length and Area in the Metric System*. PhD. Pensilvania: Universidad del Estado de Pensilvania.
- Castillo, J. J. (2006). *Estimación de Cantidades Continuas: Longitud, Superficie, Capacidad y Masa*. Granada: Universidad de Granada.
- Clayton, J. (1992). *Estimation in Schools*. Londres: Universidad de Londres.
- De Castro, C. (2012). *Estimación en Cálculo con Números Decimales: Dificultad de las Tareas y Análisis de Estrategias y Errores con Maestros en Formación*. Granada: Universidad de Granada.
- Del Olmo, M.A.; Moreno, M.F.; Gil, F. (1989). *Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con formulas?* Madrid: Síntesis.
- Hildreth, D. J. (1980). *Estimation Strategy Use in Length and Area Measurement Tasks by Fifth and Seventh Grade Students*. PdD. Columbia: Universidad del Estatal de Ohio.
- Levine, D. (1982). Strategy Use and Estimation Ability of College Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13(5), 350-359.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29 (1), 75-88.
- Paull, D. R. (1971). *The Ability to Estimate in Mathematics*. EdD. Nueva York: Universidad de Columbia.
- Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de las Matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico, y P. Gómez (Eds.). *Educación Matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Segovia, I., Castro, E., Castro, E. y Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Madrid: Síntesis.
- Segovia, I. (1997). *Estimación de cantidades discretas. Estudio de variables y procesos*. Granada: Comares.
- Siegel, A. W., Goldsmith, L. T. y Madson, C. R. (1982). Skill in estimation problems of extent and numerosity. *Journal for Research in Mathematics Education*. 13(3), 211-232.