

EXPLORACIÓN DEL SENTIDO ESTRUCTURAL DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO MEDIANTE TAREAS DE GENERAR EXPRESIONES ALGEBRAICAS¹

Danellys Vega-Castro, Marta Molina, Encarnación Castro
Universidad de Granada

Resumen

Dado nuestro interés por encontrar estrategias de enseñanza para ayudar a estudiantes de Educación Secundaria en la percepción de la estructura de igualdades algebraicas, nos propusimos realizar una investigación de carácter exploratorio. Esta investigación analiza el sentido estructural mostrado por un grupo de estudiantes al realizar tareas donde se les pide generar expresiones algebraicas distintas con estructura similar a una dada. Para el logro de este objetivo, diseñamos y aplicamos una prueba escrita a un grupo de estudiantes de un Instituto de Educación Secundaria en Granada. Las producciones obtenidas nos suministraron información sobre su sentido estructural y su forma de visualizar las subestructuras que componen una expresión algebraica.

Palabras Clave: *Sentido estructural, expresiones algebraicas, estructuras, igualdades notables.*

Abstract

Our interest in finding teaching strategies to help secondary students to perceive the structure of algebraic identities leads us to perform an exploratory research. This study analyzes the structural sense shown by a group of students when solving tasks that require generating different algebraic expressions with similar structure to a given one. To reach this aim, we designed a written test and administered it to a group of secondary students from a High school in Granada. The students' productions provide us with information about their structural sense and their way to visualize the substructures that form an algebraic expression.

Keywords: *Structure sense, Algebraic expressions, Structures, Algebraic identities.*

Con frecuencia los estudiantes de educación secundaria ponen de manifiesto falta de capacidad para aplicar técnicas algebraicas básicas en contextos distintos de los que han experimentado (Novotná y Hoch, 2008). De acuerdo con algunos investigadores como Booth (1982), Wagner, Rachlin y Jensen (1984), Steinberg, Sleeman, y Ktorza (1990) y Pirie y Martin (1997), los estudiantes presentan dificultades para concebir una expresión

¹ Este trabajo ha sido desarrollado en el marco del proyecto de investigación EDU2009-11337 "Modelización y representaciones en educación matemática" del Plan Nacional de Investigación, Desarrollo e Innovación 2010-2012 del Ministerio de Ciencia e Innovación de España; y con el apoyo otorgado a la primera autora por el Programa de Becas Doctorales que patrocina la Secretaría Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (SENACYT) de la República de Panamá.

compleja como un todo y reconocer semejanzas en la equivalencia de ecuaciones. La constante percepción de las diversas dificultades manifestadas por los estudiantes al trabajar con expresiones algebraicas de diferentes tipos, ha originado un progresivo interés en el campo de la investigación en Educación Matemática por indagar en el conocimiento relacionado con el Álgebra escolar que poseen o desarrollan los estudiantes de educación secundaria (Kaput, 1998; Herscovics y Linchevski, 1994; Linchevski y Herscovics, 1994; Ruano, Socas y Palarea, 2003; Kieran, 2007; Puig, Ainley, Arcavi y Bagni 2007; Vega-Castro, Castro y Molina, 2010). Destacamos recientes trabajos de Hoch y colaboradores (2006, 2007, 2010) en los que los autores reflexionan sobre las habilidades de los sujetos que intervienen en el trabajo con expresiones algebraicas y definen el constructo sentido estructural. Dicho constructo persigue precisar las habilidades necesarias para hacer un uso eficiente de las técnicas algebraicas aprendidas en la resolución de tareas escolares.

Sentido estructural

El constructo sentido estructural surge del análisis del trabajo con expresiones algebraicas, al distinguir entre las posibles actuaciones aquellas que hacen un uso efectivo de la estructura particular de las expresiones con las que se está trabajando. Por estructura entendemos el conjunto de términos que componen una expresión, los signos que los relacionan, el orden de los diferentes elementos y las relaciones que existen entre ellos (Molina, 2010). Se refiere a la forma gramatical de las expresiones en términos de Esty (1992), la denomina estructura superficial de una expresión en palabras de Kieran (1991) y la estructura sintáctica según Kirshner (1989). El término sentido estructural fue utilizado por vez primera por Linchevski y Livné (1999). Posteriormente, Hoch y Dreyfus han realizado varios estudios centrados en esta noción siendo estos autores los que han avanzado en su definición dando varias definiciones e identificando una serie de descriptores.

La primera definición tentativa fue presentada por Hoch en el CERME de 2003: “reconocer la estructura algebraica y utilizar las características apropiadas de una estructura en un contexto dado como guía para elegir las operaciones a realizar” (p. 2). Posteriormente, Hoch y Dreyfus (2004, 2005) precisan algunas de las habilidades que engloba el sentido estructural en el contexto del álgebra escolar: ver una expresión o una sentencia algebraica como una entidad, reconocer una expresión o sentencia algebraica como una estructura conocida, dividir una entidad en subestructuras, apreciar las conexiones mutuas entre estructuras y reconocer qué transformaciones es posible realizar y cuáles de éstas son de utilidad. A partir de estas habilidades en 2006 presentan una definición operacional de sentido estructural, por medio de tres descriptores, que permite identificar si un alumno está utilizando sentido estructural en el contexto del álgebra de Educación Secundaria. Indican que un alumno muestra sentido estructural en dicho contexto si realiza las acciones que se detallan en la tabla 1.

Descriptor	Definición de Hoch y Dreyfus (2006)
SSI	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Reconocer una estructura familiar en su forma más simple. Ejemplo: Al factorizar $81 - x^2$ <ul style="list-style-type: none"> • reconocer dicha expresión como una diferencia de cuadrados, e identificar los factores.

Tabla 1. Definición y ejemplos de los descriptores del Sentido Estructural.

Descriptor	Definición de Hoch y Dreyfus (2006)
SS2	<p>➤ Tratar un término compuesto como una única entidad y reconocer una estructura familiar en una forma más compleja. Ejemplo: Al factorizar $(x - 3)^4 - (x + 3)^4$</p> <ul style="list-style-type: none"> • tratar los binomios $(x - 3)^2$ y $(x + 3)^2$ como una sola entidad, • reconocer dicha expresión como una diferencia de cuadrados, e • identificar los factores implicados.
SS3	<p>➤ Elegir manipulaciones apropiadas para hacer el mejor uso de una estructura. Ejemplo: En las tareas anteriores,</p> <ul style="list-style-type: none"> • aplicar la igualdad notable diferencia de cuadrados $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ para factorizar dichas expresiones.

Tabla 1. Definición y ejemplos de los descriptores del Sentido Estructural.

Observamos que esta definición está influenciada por la consideración, por parte de Hoch y Dreyfus, de tareas en las que es necesario realizar transformaciones de expresiones algebraicas. Luego, habilidades como *dividir una entidad en subestructuras* y *apreciar conexiones mutuas entre estructuras*, recogidas en la definición previa, no son enfatizadas al no considerarse incluidas dentro de estos descriptores. En este trabajo, queremos destacarlas como habilidades implícitas dentro del constructo sentido estructural, las cuales pueden ser medidas separadamente de aquellas habilidades recogidas en los descriptores, por medio de tareas tales como la agrupación de expresiones según su misma estructura o la construcción de expresiones con estructura igual a otra dada. Por este motivo, añadimos a los anteriores un descriptor (**SS4**): “Distinguir subestructuras dentro de una entidad y reconocer relaciones entre ellas”.

Estudio empírico

En esta investigación se persigue analizar el sentido estructural puesto de manifiesto por un grupo de estudiantes de 1º de Bachillerato, al construir expresiones con la misma estructura que unas expresiones algebraicas dadas. Las expresiones algebraicas consideradas son fracciones algebraicas que involucran igualdades notables.

Centramos nuestra atención en las igualdades notables debido a la relevancia que estas expresiones algebraicas tienen en los programas de estudio de matemáticas a nivel de educación secundaria por sus frecuentes aplicaciones en temas posteriores al curso básico de estudio de las mismas, tanto en matemáticas como en otras áreas. En relación con el trabajo con este tipo de expresiones se encuentran objetivos curriculares de la educación matemática en secundaria y bachillerato, tales como “reconocer y generar formas equivalentes de expresiones algebraicas” y “comprender el significado de formas equivalentes de expresiones” (NCTM, 2000, p. 226 y p. 300).

Tipo de estudio y muestra

Esta investigación es de carácter exploratorio, descriptivo y cualitativo. Los sujetos que intervinieron en el estudio fueron un grupo de 33 alumnos de 1º de Bachillerato perteneciente a un centro de educación secundaria de la ciudad de Granada. La muestra fue seleccionada por el nivel educativo que cursaban los estudiantes y su disponibilidad para participar en esta investigación.

Diseño del Instrumento

Al no contar con ningún instrumento utilizado por otros investigadores que nos permitiera abordar nuestro objetivo de investigación, diseñamos una prueba tomando como guía los descriptores de sentido estructural señalados anteriormente. Se elaboró en

dos fases: una primera prueba que se sometió a pilotaje con estudiantes de 4º año de secundaria, y una segunda versión definitiva. En su redacción definitiva, el instrumento consta de cuatro tareas análogas en las que se presenta una fracción algebraica y se pide al estudiante que transforme la expresión en otra equivalente más sencilla y, posteriormente, que construya una expresión diferente con estructura igual a la dada. En ambos casos se le pide que explique su respuesta con el fin de obtener información adicional sobre la forma en que ha abordado la tarea, lo que ayudará a interpretar sus producciones. La tabla 2 presenta las expresiones algebraicas propuestas a los estudiantes, las cuales involucran las cuatro igualdades notables más comunes.

Tarea	Igualdades Notables	Fracción Algebraica	Nivel de Complejidad
1	Cuadrado de una diferencia	$\frac{x^2 - 14x + 49}{(x - 7)^2(x - 7)}$	Simple
2	Propiedad distributiva/ Factor común	$\frac{2m(2m - 1)}{4m^5 - 2m^4}$	Compleja
3	Suma por diferencia	$\frac{(4x^2 - 1)(4x^2 + 1)}{(2x + 1)(2x - 1)}$	Compleja
4	Suma por diferencia Cuadrado de una suma	$\frac{(5a^2 - 1)(5a^2 + 1)}{25a^4 + 1 + 10a^2}$	Compleja

Tabla 2. Diseño de las expresiones algebraicas propuestas en cada tarea.

En esta comunicación, nos centramos en el análisis de las expresiones construidas por los estudiantes al reproducir las estructuras de las fracciones algebraicas dadas (segunda parte de las tareas). En esta parte de la tarea le sugerimos que utilizaran diferentes números y letras para enfatizar la idea de que la expresión debía ser diferente y no una equivalente a la dada. En relación a este tipo de tareas, Hoch y Dreyfus (2010) y Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson y Zaslavsky (2006) argumentan que el arte de generar expresiones o estructuras es una actividad cognitiva muy significativa y que la capacidad de inventar ejemplos de acuerdo a una situación matemática es una herramienta cognitiva de expertos, que a menudo necesitan los principiantes.

Análisis de las producciones

Las producciones de los estudiantes fueron analizadas atendiendo a si conservaban la estructura de las fracciones dadas: tanto la estructura del numerador y del denominador, como la relación existente entre ambas. Estos análisis nos permitieron distinguir tres tipos de producciones —exitosas, parcialmente exitosas y no exitosas— según si se conservan las estructuras del numerador y del denominador y la relación existente entre ambas, la estructura del numerador o del denominador o la estructura de ambos pero no la relación existente entre las mismas, o no conservan la estructura ni del numerador ni del denominador. La tabla 3 recoge los casos que distinguimos en las producciones de los estudiantes.

PRODUCCIÓN	CÓDIGO	DESCRIPCIÓN DE LA PRODUCCIÓN
Exitosa	PE	Conserva las estructuras de P(x) y Q(x) relacionándolas
Parcial	PP	Conserva las estructuras de P(x) y Q(x) sin relacionarlas
No Exitosa	PQ	No conserva ninguna de las estructuras.

Tabla 3. Tipos de producción en las Tareas. [P(x) = numerador, Q(x) = denominador]

En el primer caso entendemos que el estudiante está poniendo de manifiesto un buen sentido estructural pues reconoce la estructura (familiar) del numerador y denominador y aprecia conexiones entre ambas subestructuras de la fracción. En el segundo caso el estudiante evidencia cierto sentido estructural en tanto que percibe parte de la estructura de la fracción. En el caso de las producciones no exitosas no hay muestras de sentido estructural. La figura 1 muestra ejemplos de cada uno de estos tipos de producciones.

Producción Exitosa Alumno N° 5	$\frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^2(x-7)} \Rightarrow \frac{(a-2)^2}{(a-2)^2(a-2)} \Rightarrow \frac{a^2 - 4a + 4}{(a-2)^2(a-2)}$
Producción Parcial Alumno N° 9	$\frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^2(x-7)} \quad \frac{a^2 - 10a + 36}{(a-8)^2(a-8)}$
Producción No Exitosa Alumno N° 1	$\frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^2(x-7)} \quad \frac{2a^2 - 28a + 98}{(2a-14)^2(2a-14)}$

Figura 1. Ejemplos de cada tipo de producción en la Tarea 1.

En la primera producción de la figura 1 observamos que el estudiante reconoce la estructura del numerador y del denominador y la equivalencia del numerador y el binomio cuadrado del denominador, haciendo uso de la igualdad notable cuadrado de la diferencia. Esto lo justifica de la siguiente forma: “*He empleado la igualdad notable del cuadrado de una diferencia*”. En el segundo ejemplo el estudiante muestra reconocer la estructura del denominador y genera correctamente el producto de binomios. También reconoció la estructura del polinomio de segundo orden del numerador pero no percibe la relación entre los coeficientes del mismo ni de éstos con el término independiente de los binomios del denominador. La explicación dada por este estudiante fue la siguiente: “*He hecho una fracción igual pero con diferentes números y otra letra*”. En el tercer ejemplo el alumno justifica su respuesta escribiendo: “*Con la misma estructura he cambiado x por a y he cambiado números multiplicando por 2*”. Esta explicación indica que el estudiante no ha reconocido la estructura del numerador ni del denominador aunque un análisis de la construcción dada podría sugerir otra interpretación.

Clasificación de las producciones de los estudiantes

Utilizando la codificación presentada, clasificamos las construcciones de los estudiantes, como se observa en la tabla 4. El 40% de las producciones fueron exitosas el 20.4% fueron parcialmente exitosas, un 25.8% fueron producciones no exitosas y el 13.6% no fueron realizadas. Entre las producciones exitosas se observa que el mayor porcentaje corresponde a la tarea 1, mientras que sobre las tareas 2, 3 y 4 recae el mayor

porcentaje de producciones no exitosas. Consideramos que este resultado se debe probablemente al hecho de que la fracción algebraica de dicha tarea sólo incluye términos simples mientras que las fracciones algebraicas de las restantes tareas (2, 3 y 4) incluyen términos compuestos. Construir una expresión algebraica que involucra términos compuestos requiere del estudiante concebir una entidad compuesta (en este caso productos y potencias) como un todo. Lo expuesto anteriormente es lo que diferencia entre los descriptores SS1 y SS2. Dentro de las tareas que involucraban términos compuestos, llama la atención el que en la tarea 4 los resultados en cuanto a la producción exitosa fueron mayores (36.4%) que en las tareas 2 y 3, (27.3% y 30.3% respectivamente) aunque un mayor número de estudiantes no responde esta tarea. Enfatizamos que la tarea 4 además de ser la última tarea, involucraba también dos igualdades notables a diferencia de las tareas 2 y 3, que solo involucraban una igualdad notable. Se necesita indagar en las características de esta tarea para explicar esta evidencia aparentemente contradictoria.

Código	Producción	Tareas				Total
		1	2	3	4	
PE	Conserva la estructura $P(x)$, $Q(x)$ y la relación entre ambas.	22 66.7%	9 27.3%	10 30.3%	12 36.4%	53 40.1%
PP	Conserva sólo la estructura de $P(x)$ o $Q(x)$ o la estructura de ambos pero no la relación existente entre las mismas.	3 9.1%	8 24.2%	9 27.3%	7 21.2%	27 20.4%
PQ	No conserva ninguna estructura.	8 24.2%	11 33.3%	9 27.3%	6 18.2%	34 25.8%
	No realiza	0 0.0%	5 15.1%	5 15.1%	8 24.2%	18 13.6%

Tabla 4. Frecuencia de Producciones. $P(x)$ = numerador, $Q(x)$ = denominador.

Niveles de Sentido Estructural

A partir de la codificación de las producciones de cada estudiante en cada una de las tareas (ver figura 2), identificamos diferentes niveles de sentido estructural puestos de manifiesto. Asociamos el nivel alto con los casos en que los estudiantes han reconocido la estructura total de las fracciones (es decir, sus producciones son exitosas) en al menos tres de las cuatro tareas. El nivel medio de sentido estructural corresponde con aquellos casos en que los estudiantes presentan producciones exitosas en la mitad de las tareas propuestas. En el resto de los casos, el sentido estructural se considera de nivel bajo o nulo según si hay alguna o ninguna evidencia de sentido estructural.

Los números ubicados en la columna izquierda indican la tarea a la que refiere. Los encabezados del resto de las columnas denotan con un número a cada uno de los estudiantes. En la figura 2 se aprecia que los primeros nueve alumnos (27%) muestran un buen sentido estructural por corresponder al menos tres de sus producciones a la conservación total de la estructura (Nº 4, 7, 20, 23, 25, 29, 14, 13, 30). Otros siete estudiantes (21%) evidencian nivel medio de sentido estructural pues en dos de las tareas sus producciones son exitosas (Nº 5, 11, 21, 33, 8, 14, 27). El nivel de sentido estructural puesto de manifiesto por el resto de los 17 estudiantes (52%) es

relativamente bajo, dentro de los cuales figuran 8 estudiantes (24%) cuyo sentido estructural es nulo.

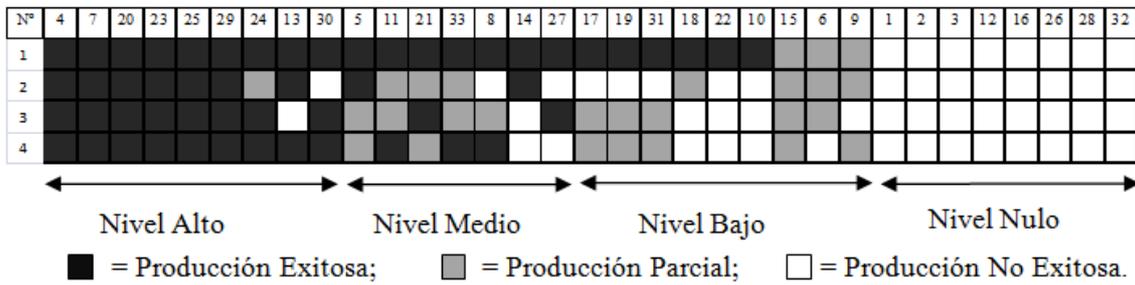


Figura 2. Nivel de SS mostrado por cada estudiante en las cuatro tareas.

Discusión y conclusiones

Dado que el objetivo de este estudio es analizar el sentido estructural que ponen de manifiesto estudiantes de 1º de Bachillerato en la construcción de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables, afirmamos que el instrumento diseñado en este trabajo se muestra de utilidad para inducir el uso de sentido estructural en los estudiantes. Añadido a los instrumentos considerados en investigaciones previas, las tareas aquí presentadas pueden constituir un elemento de medición del sentido estructural de estudiantes de secundaria. Así mismo se ha puesto de manifiesto la necesidad y pertinencia de considerar un nuevo descriptor para contextos o situaciones en las que no es necesario hacer transformaciones de unas expresiones dadas.

Al fijar nuestra atención en las cuatro tareas, observamos que el sentido estructural es notablemente variable entre los estudiantes participantes en este estudio. Sólo seis estudiantes (18%) generan una nueva expresión algebraica conservando la totalidad de las estructuras en las 4 tareas, tres estudiantes (9%) generan la nueva estructura conservando su totalidad en tres de las tareas, siete estudiantes (21%) generan la nueva estructura conservando su totalidad en dos de las tareas, y el resto de los estudiantes, que supera el 50%, generan la nueva estructura conservando su totalidad en una o ninguna de las tareas. El número de estudiantes que puso de manifiesto sentido estructural se redujo a la mitad cuando las expresiones incluían términos compuestos. Consideramos que son varios los factores que intervienen en la dificultad para la realización de las tareas propuestas, entre ellos, trabajar con términos compuestos (tareas 2, 3 y 4) y percibir una o parte de una expresión algebraica como un todo involucrando dentro de ella igualdades notables que son reglas fijas. También ha podido incidir el requerimiento de generar una nueva expresión, el cual no es una práctica habitual en las tareas escolares de los estudiantes.

Destacamos en este trabajo, que al relacionar los distintos niveles de sentido estructural de los estudiantes con su edad, género y rendimiento académico en la asignatura de matemáticas, dicho estudio nos permitió evidenciar que ninguna de estas variables ejerció influencia directa en el nivel de sentido estructural manifestado.

Referencias

Booth, L. R (1982). Ordering your operations. *Mathematics in School*, 11(3), 5-6.
 Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A., y Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in mathematics education. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the*

- International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 126-154). Prague, Czech Republic: PME.
- Esty, W. W. (1992). Language concepts of mathematics. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 14(4), 31-53.
- Herscovics, N. y Linchevski, L. (1994). Cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 27(1), 59-78.
- Hoch, M. (2003). Structure sense. En M. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the 3rd Conference for European Research in Mathematics Education* (CD). Bellaria, Italy: ERME.
- Hoch, M. y Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 49-56). Bergen, Norway: Bergen University College.
- Hoch, M. y Dreyfus, T. (2005). Students' difficulties with applying a familiar formula in an unfamiliar context. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 145-152). Melbourne, Australia: University of Melbourne.
- Hoch, M. y Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills: an unexpected result. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 305-312). Prague, Czech Republic: Faculty of Education, Charles University in Prague.
- Hoch, M. y Dreyfus, T. (2007). Recognising an algebraic structure. En D. Pitta-Pantazi y G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics* (pp. 436-445). Larnaca, Cyprus: CERME
- Hoch, M. y Dreyfus, T. (2010). Developing Katy's algebraic structure sense. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics* (pp. 529-538). Lion, Francia: CERME
- Kaput, J. (1998). *Teaching and Learning a New Algebra with Understanding*. Dartmouth, Massachusetts: NCISLAMS.
- Kieran, C. (1991). A procedural-structural perspective on Algebra Research. En F. Furunghetti (Ed.), *Proceeding of the Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 245-253). Assisi. Italy: PME Program Committee.
- Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: building meaning for symbols and their manipulation. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 707-762). Reston, VA: NCTM.
- Kirshner, D. (1989). The visual syntax of algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(3), 274-287.
- Linchevski, L. y Herscovics, D. (1994). Cognitives obstacles in pre-algebra. En J. P. Ponte y J. F. Martos (Eds), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 176-183). Lisboa: Universidad de Lisboa.
- Linchevski, L. y Livneh, D. (1999) Structure sense: the relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 40(2), 173-196.
- Molina, M. (2010). Pensar matemáticamente en el trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas. *Suma*, 65, 7-15.
- NCTM (2000). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla, España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

- Novotná, J. y Hoch, M. (2008). How structure sense for algebraic expression or equations is related to structure sense for abstract algebra. *Mathematics Education Research Journal*, 20(2), 93-104.
- Pirie, S. y Martin, L. (1997). The equation, the whole equation and nothing but the equation! One approach to the teaching of linear equations. *Educational Studies in Mathematics*, 34(2), 159-181.
- Puig, L., Ainley, J. Arcavi, A y Bagni, G. (2007). Working on algebraic thinking. Working Group 6. En D. Pitta-Pantazi y G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics* (pp. 812-815). Larnaca, Cyprus: CERME.
- Ruano, R., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2003). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *Investigación en Educación Matemática, VII* (pp. 311-322). Granada: SEIEM.
- Steinberg, R. M., Sleeman, D. H. y Ktorza, D. (1990). Algebra students' knowledge of equivalence of equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(2), 112-121.
- Vega-Castro, D., Castro, E. y Molina, M. (2010). Sentido estructural manifestado por alumnos de 1º de bachillerato en tareas que involucran igualdades notables. *Presentado en el XIV simposio de la SEIEM dentro del grupo de investigación Pensamiento Numérico y Algebraico*. Lérida, 7 al 10 de Septiembre de 2010. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/1555/>
- Wagner, S., Rachlin, S. L. y Jensen, R. J. (1984). *Algebra learning project: Final report*. Athens: Department of Mathematics, University of Georgia.