Sobre los orígenes de la teoría de Lie

Nicolás Andruskiewitsch[1]

El matemático noruego Sophus Lie (1842-1899) introdujo las nociones fundamentales de "grupo de Lie" y "álgebra de Lie" en una serie de trabajos a partir de 1872. La actividad científica en estas áreas ha sido intensa desde entonces, ocupando a muchos de los mejores matemáticos de cada generación; hoy en día esta actividad no ha decrecido y las técnicas básicas de la materia forman parte del bagaje académico de la mayoría de los investigadores matemáticos contemporáneos.

Si se quiere explicar la idea básica de los grupos de Lie, es conveniente remontarse a principios del siglo XIX. Tres fuentes constituyen la génesis de la teoría de Lie y de sus desarrollos más importantes. En primer lugar, consideremos las ideas del francés Evariste Galois (1811-1832). Uno de los problemas importantes que se trataba hacia 1800 era la búsqueda de una fórmula que expresara las raíces de un polinomio de grado 5 en función de los coeficientes del mismo, permitiéndose sólo las operaciones elementales y la radicación. Para grados menores que 5, tales fórmulas eran conocidas. Si bien el problema fue resuelto por Abel y Ruffini, quienes demostraron independientemente la imposibilidad de una fórmula de ese tipo, Galois fue más lejos. Él indicó que el estudio de las raíces de un polinomio debe efectuarse a través de las permutaciones del conjunto de raíces que sean de origen "algebraico". El conjunto de tales permutaciones es un grupo, que se conoce como "Grupo de Galois". En relación con la búsqueda mencionada de una fórmula para las raíces de un polinomio (de grado arbitrario), Galois probó que tal fórmula existe si, y sólo si, el grupo de Galois del polinomio pertenece a una clase especial de grupos– es un grupo "soluble".

[1]El autor agradece los comentarios de Roberto Miatello, Sonia Natale y Jorge Vargas sobre versiones preliminares de este texto.

La idea básica es que las propiedades esenciales de un objeto matemático (en este caso, las raíces de un polinomio) son las preservadas por la acción de un grupo asociado naturalmente al objeto en cuestión (en este caso, el grupo de Galois).

Otro descubrimiento de extrema importancia, realizado alrededor de 1830 por Bolyai, Lobachevsky y Gauss, fue la existencia de geometrías no euclídeas. Recuérdese que el quinto postulado de Euclides establece que, por un punto del plano exterior a una recta pasa una, y sólo una, paralela a la misma. Durante mucho tiempo, se realizaron esfuerzos para demostrar que este postulado se podía deducir de los anteriores. Sin embargo, los matemáticos mencionados construyeron ejemplos de "geometrías" -con puntos y planos- donde se satisfacen los cuatro postulados, pero no el quinto. En algunos casos, no pasa ninguna paralela por el punto exterior; en otros, hay un haz de rectas paralelas. De modo que el quinto postulado no se puede deducir de los anteriores; es, lógicamente, independiente de ellos. El descubrimiento de geometrías no euclídeas provocó una intensa actividad: se sucedieron los ejemplos de geometrías no euclídeas y las investigaciones sobre estos nuevos objetos.

Inevitablemente se cuestionó el significado de estos descubrimientos; se preguntó cuál era la esencia de la geometría, a qué se debían llamar propiedades geométricas. Una respuesta fue ofrecida por el alemán Félix Klein (1849-1925) en la lección de aceptación de la cátedra de matemática de la Universidad de Erlangen en 1872, a los 23 años (Klein, amigo de Lie, había publicado junto con él en 1870 y 1871 dos trabajos que estudiaban propiedades de grupos de transformaciones de ciertos objetos geométricos). La idea básica del "Programa de Erlangen", como se conoce hoy al discurso de Klein, es la siguiente: las propiedades básicas de un objeto geométrico son aquéllas que son preservadas por su grupo de transformaciones.

En tercer lugar, es menester evocar los célebres trabajos del francés Joseph Fourier (1768-1830). En una memoria presentada en 1807, pero publicada en

1822 tras dos rechazos sucesivos por "insuficiente rigor", Fourier presenta su método para resolver ecuaciones diferenciales. Veremos más adelante qué profundas generalizaciones de la teoría de Fourier están presentes en la teoría de representaciones de grupos de Lie.

Un grupo de Lie es un grupo G que depende "suavemente" o "continuamente" de una cantidad de parámetros. Esta es una definición imprecisa y algo inexacta, pero que puede sustituir intuitivamente a la definición formal, para la cual se requieren algunos conocimientos previos de geometría diferencial. El ejemplo paradigmático es el grupo $GL(n, \mathbf{R})$ de matrices $n \times n$ inversibles. En este caso hay $n \times n$ parámetros que varían en un subconjunto abierto del espacio vectorial de dimensión n^2 (precisamente, es el espacio de matrices de determinante no nulo). Es claro que la multiplicación y la inversión son funciones diferenciables de los coeficientes (más aún, son funciones racionales). Precisemos algunos detalles de esta definición informal. En primer lugar, los parámetros de los cuales se habla pueden ser reales (en cuyo caso se habla de grupos de Lie reales), complejos (y entonces,de grupos de Lie complejos), o bien pertenecer a un cuerpo cualquiera, en cuyo caso se tratará de "grupos algebraicos" (en este caso se pide que la multiplicación y la inversión sean funciones racionales).

En segundo lugar, y ésta es la característica fundamental de los grupos de Lie, la "dependencia diferencial" de los parámetros permite considerar "elementos infinitesimales" de los grupos de Lie. Bien entendido, no son elementos del grupo de Lie, sino que forman un espacio vectorial de dimensión finita; pero además la multiplicación del grupo de Lie induce una operación en este espacio vectorial -llamada "corchete de Lie"- que refleja las propiedades de la multiplicación del grupo de Lie. El corchete de Lie no es asociativo, sino que verifica una regla particular, llamada "identidad de Jacobi". El corchete no es conmutativo sino anti-conmutativo. Este espacio vectorial, munido del corchete de Lie, se llama un álgebra de Lie.

La primera preocupación de Lie fue constatar hasta qué punto el pasaje del grupo de Lie a su álgebra de Lie es fiel. Este es, *a grosso modo*, el contenido de los tres teoremas fundamentales de Lie, que establecen el así llamado "diccionario entre grupos de Lie y álgebras de Lie". Sintéticamente, y con cierta imprecisión, podemos decir que este diccionario garantiza que todo grupo de Lie conexo está caracterizado por su álgebra de Lie (¡aquí está la mayor imprecisión!), y que a toda álgebra de Lie real le corresponde un grupo de Lie. De modo que, para estudiar grupos de Lie, podemos, en primera instancia, reducirnos a estudiar álgebras de Lie. La gran ventaja es que los métodos para estudiar álgebras de Lie pertenecen, hablando vagamente, al Álgebra lineal.

El punto siguiente entonces es entender la estructura interna de las álgebras de Lie. Podemos considerar tres clases de álgebras de Lie: nilpotentes, solubles (de las cuales las nilpotentes son un caso particular) y semisimples. De hecho, toda álgebra de Lie se construye a partir de una soluble y una semisimple. Los teoremas básicos de álgebras de Lie nilpotentes y solubles fueron establecidos por Lie y su discípulo Engel.

Las álgebras de Lie semisimples se construyen en forma muy directa a partir de álgebras de Lie simples. Uno de los resultados más importantes y profundos de la matemática del siglo XIX -y tal vez de todos los tiempos- es la clasificación de las álgebras de Lie simples (sobre los números complejos), realizada por W. Killing, con algunas imprecisiones subsanadas por Elie Cartan (1869 - 1951). El resultado afirma que existen cuatro familias infinitas de álgebras de Lie simples (las llamadas álgebras de Lie clásicas), y otras cinco álgebras de Lie simples (llamadas excepcionales). Las llamadas clásicas corresponden a los grupos de matrices de determinante 1, y a sus subgrupos de elementos que preservan una forma bilineal simétrica o antisimétrica. Se puede codificar esta información mediante unos diagramas, llamados de Dynkin; estos diagramas aparecieron después en varias ramas de la matemática, y están relacionados con la clasificación -debida a los griegos- de los poliedros regulares.

El estudio de E. Cartan de esta clasificación, contenido en su tesis doctoral, fue el punto de partida para una serie de trabajos de fundamental importancia para la matemática del siglo XX. En primer término, partiendo de la clasificación mencionada, obtuvo, tras un delicado análisis técnico, la clasificación de las álgebras de Lie simples sobre los números reales. En segundo lugar, recordemos que la importancia capital de los grupos se pone de manifiesto a través de sus acciones en objetos matemáticos. Las acciones más simples son aquéllas en un espacio vectorial que preservan la suma y producto por escalares; son las representaciones lineales, o simplemente representaciones. Otro trabajo capital de E. Cartan fue la clasificación de las representaciones de dimensión finita de las álgebras de Lie simples (reales o complejas).

Finalmente, mencionemos otro resultado importantísimo de E. Cartan. Considerando cierta clase de geometrías, los así llamados "espacios simétricos", él demostró que necesariamente son cocientes G/K, donde G es un grupo de Lie real semisimple y K es un subgrupo bien determinado. La definición precisa de los espacios simétricos es demasiado técnica para ser tratada aquí; pero ella contiene a todas las geometrías no euclídeas "interesantes". Se puede así argumentar, que la clasificación de Cartan es la culminación del Programa de Erlangen de Klein.

En este punto cabe acotar, que si bien Lie estaba al tanto de las ideas de su amigo Klein y su visión de los grupos era fundamentalmente geométrica, su motivación inicial para considerar los grupos de Lie fue imaginar que estos grupos jugarían un rol análogo al de los Grupos de Galois, pero para soluciones de ecuaciones diferenciales. En efecto, Lie consideró sistemas de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de primer orden y determinó bajo qué condiciones sus soluciones pueden calcularse a partir de los coeficientes por medio de operaciones elementales, exponenciación y cálculo de primitivas. Concretamente, pensemos cada solución del sistema como una curva en un espacio vectorial adecuado. Lie asoció a cada sistema un grupo, llamado el "grupo de

Lie de la ecuación", formado por los difeomorfismos del espacio vectorial que transforman una curva solución del sistema en otra curva solución. Entonces Lie probó que las soluciones pueden calcularse a partir de los coeficientes del modo indicado si, y sólo si, el grupo de Lie de la ecuación es "soluble" de dimensión no demasiado pequeña respecto del sistema. Aquí, "soluble" es una condición técnica similar (aunque no idéntica) a la que aparece en el teorema de Galois. Nótese la semejanza entre los resultados de Galois y Lie. Digamos además que si bien este punto de vista no fue seguido durante cierto tiempo debido a las profundas aplicaciones de la teoría de Lie en geometría, ha sido retomado vigorosamente en los últimos años.

Para concluir, digamos que las representaciones unitarias irreducibles de dimensión infinita de los grupos de Lie han jugado un papel muy importante en la física teórica (especialmente en la cuántica) desde 1930. Ello motivó, a su vez, una intensa actividad sobre clasificación de tales representaciones. Sin entrar en más detalles, la formulación correcta de estos resultados tiene lugar en el contexto de una vasta generalización de la teoría de Fourier. En efecto, la teoría clásica de Fourier puede ser interpretada en el marco de una dualidad entre el grupo de números reales $\mathbf{R}$ y el grupo de números enteros $\mathbf{Z}$, o en varias variables, entre $\mathbf{R}^n$ y $\mathbf{Z}^n$. Sucintamente, $\mathbf{R}$ es el grupo de Lie más sencillo; sus representaciones irreducibles como grupo de Lie (o caracteres) son exactamente las funciones $t \mapsto exp(2\pi int)$, donde n recorre el grupo $\mathbf{Z}$. Así, la serie de Fourier de una función puede ser pensada como una función en los caracteres de $\mathbf{R}$. La teoría moderna de representaciones unitarias de grupos de Lie, debida a Harish-Chandra y muchos otros matemáticos, extiende apropiadamente estas ideas a los grupos de Lie generales. El análisis de los detalles de estas ideas excede holgadamente las intenciones de esta nota.