Una métrica simple y curiosa

Héctor H. Cuenya

El objetivo de este breve artículo es presentar un ejemplo de una métrica en un intervalo de la recta que, no obstante lo simple de su definición, tiene curiosas propiedades desde el punto de vista geométrico. Más precisamente, mostraremos que las "formas" de las bolas varían con los centros y los radios. Además, veremos como uno se puede estar "alejando" de un punto dado en el sentido usual (es decir, considerando la métrica euclidiana) y simultáneamente estar aproximándose tanto como se quiera a ese punto en esta nueva métrica. Estas cualidades de la métrica, que contrastan con la primera noción intuitiva de bolas que uno adquiere, hacen que pueda resultar interesante para dar, a manera de ejemplo, en un curso introductorio de espacios métricos.
Comenzamos por introducir el concepto de métrica ó distancia en un conjunto E no vacío.

Definición. Una métrica en el conjunto E es una función $d : E \times E \to \mathbf{R}$ la cual satisface

(1) $d(a,b) = 0$ si y sólo si $a = b$

(2) $d(a,b) = d(b,a)$ para todo $a,b \in E$. (Simétrica)

(3) $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$ para todo $a,b,c \in E$.(Desigualdad triangular)

El par (E,d) se denomina un espacio métrico.

Definición. En el espacio métrico (E,d), si $a \in E$ y r es un número real positivo llamaremos bola abierta(bola cerrada) de centro a y radio r al conjunto

$$B(a,r) = \{x \in E : d(a,x) < r\}, \quad (B\prime(a,r) = \{x \in E : d(a,x) \leq r\}, \quad \text{resp.}).$$

El conjunto $S(a,r) = \{x \in E : d(a,x) = r\}$ es llamado esfera de centro a y radio r.

Ejercicio Si d es una métrica, entonces $d(a,b) \geq 0$ para todo $a, b \in E$.

Un primer ejemplo de métrica en $\mathbf{R}$ es la llamada métrica euclidiana e definida por $e(x,y) = |x-y|$, para $x, y \in \mathbf{R}$.
Sea $E = [0,1)$ y $d : E \times E \to \mathbf{R}$ una función definida por $d(0,0) = 0$ y por

$$d(a,b) = \Big(\frac{m}{M} + \frac{1-M}{1-m}\Big)(M-m),$$

si $a \neq 0$ ó $b \neq 0$, donde m y M son el mínimo y el máximo entre a y b, respectivamente. Es decir $m = \min\{a,b\}$ y $M = \max\{a,b\}$.

Teorema. d es una métrica sobre $[0,1)$.
Demostración (1) y (2) quedan para verificación del lector.
Mostraremos la desigualdad triangular. Sean $a, b, c \in [0,1)$ con $a \leq b$. Los casos $b = 0$ ó bien $a = c$ se verifican directamente, luego suponemos de ahora en más $b > 0$ y $a \neq c$. Si $a < c \leq b$, entonces

$$\begin{aligned}
d(a,b) &= \frac{a}{b}(b-a) + \frac{b-a}{1-a}(1-b) \\
&= \frac{a}{b}(b-c) + \frac{a}{b}(c-a) + \frac{b-c}{1-a}(1-b) + \frac{c-a}{1-a}(1-b) \\
&\leq \frac{c}{b}(b-c) + \frac{a}{c}(c-a) + \frac{b-c}{1-c}(1-b) + \frac{c-a}{1-a}(1-c) \\
&= d(a,c) + d(c,b).
\end{aligned}$$

Supongamos ahora $a \leq b \leq c$ y consideremos la función $g(x) = d(a,x) + d(x,b)$, para $x \in [b,1)$. Como $1 - a > \dfrac{b-a}{b}$ tenemos

$$g(1^-) = a(1-a) + b(1-b) > d(a,b) = g(b)$$

Por otro lado, la derivada segunda de la función g es

$$g^{(2)}(x) = -\frac{2(a^2+b^2)}{x^3} - \frac{2}{1-a} - \frac{2}{1-b} < 0.$$

Luego la función g es cóncava y por lo tanto $g(x) \geq d(a,b)$ para todo $x \in [b,1)$, en particular para $x = c$.

El caso, $0 < c < a \leq b$ se reduce al anterior. En efecto, es fácil ver que d satisface

$$d(x, y) = d(1 - x, 1 - y), \quad \text{para } x, y \in (0, 1),$$

de aquí y del caso previo tenemos

$$d(a, b) = d(1 - a, 1 - b) \leq d(1 - a, 1 - c) + d(1 - c, 1 - b) = d(a, c) + d(c, b).$$

El caso faltante $0 = c < a \leq b$, queda para el lector.□

Ahora hacemos una pequeña disgresión para estudiar algunas propiedades de la función

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{a}{x} + \dfrac{1-x}{1-a}\right)(x - a) & \text{si} \quad a \leq x < 1 \\ \left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{1-a}{1-x}\right)(a - x) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq a \end{cases}$$

con $a \in (0, 1)$, que nos darán información sobre la "formas" de las bolas abiertas, bolas cerradas y esferas.

Ejercicio. La función f es dos veces derivable en $(0, 1)$ excepto en a y

$$f^{(2)}(x) = \begin{cases} -\dfrac{2a^2}{x^3} - \dfrac{2}{1-a} & \text{si} \quad a < x < 1 \\ -\dfrac{2(1-a)^2}{(1-x)^3} - \dfrac{2}{a} & \text{si} \quad 0 < x < a. \end{cases}$$

En todo caso la derivada segunda es negativa, luego la función es cóncava en cada uno de los intervalos $(0, a)$ y $(a, 1)$.

Ejercicio. Si $f(0^+)$ y $f(1^-)$ son los límites derecho e izquierdo de f en 0 y 1 respectivamente, entonces

$$f(0^+) = f(1^-) = a(1 - a).$$

Ejercicio. Si $0 < a < 1$, la función f alcanza un máximo A_1 en el intervalo $(0, a)$ y un máximo A_2 en el intervalo $(a, 1)$. Si $a = 0$ la función f alcanza un máximo en $[0, 1)$.

Supongamos ahora $0 < a \leq \frac{1}{2}$. Mostramos que en este caso $A_1 \leq A_2$, y que $A_1 = A_2$ si y sólo si $a = \frac{1}{2}$. En efecto, si $x \leq a$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x(1-x) + a(1-a)}{a(1-x)}(a-x) \\ &= \frac{1-a}{a}\Big(\frac{x(1-x)+a(1-a)}{(1-a)(1-x)}\Big)(a-x) \\ &= \frac{1-a}{a}\frac{a-x}{1-x-a}f(1-x) \\ &\leq f(1-x). \end{aligned}$$

Ejercicio. Probar la última desigualdad. Probar también que la desigualdad es estricta si y sólo si $a < \frac{1}{2}$.

De aquí sigue que $A_1 \leq A_2$ y $A_1 = A_2$ si y sólo si $a = \frac{1}{2}$. El caso $\frac{1}{2} < a < 1$ no merece consideración especial ya que produce resultados análogos al caso $0 < a < \frac{1}{2}$.

Retomando nuestro problema original, observamos de la discusión precedente que si $0 < a < \frac{1}{2}$ podemos elegir números reales r_1, r_2 , r_3 y r_4 tales que

$$0 < r_1 < a(1-a) < r_2 < A_1 < r_3 < A_2 < r_4.$$

Ahora es fácil ver que $B(a, r_1)$ es un intervalo abierto que contiene a a y contenido estrictamente en el $(0, 1)$. La bola abierta $B(a, r_2)$ es una unión de tres subintervalos disjuntos dos a dos, uno semiabierto que contiene al cero, y dos abiertos , uno conteniendo a a y el otro con extremo derecho 1. La bola abierta $B(a, r_3)$ es una unión de dos intervalos disjuntos, uno semiabierto conteniendo al cero y al a y otro abierto con extremo derecho el 1. Finalmente, la bola abierta $B(a, r_4)$ es igual al intervalo $[0, 1)$.

Ejercicio. En el caso $a = \frac{1}{2}$ probar que las bolas abiertas están compuestas por un intervalo ó por la unión de tres intervalos disjuntos dos a dos.

Ejercicio. En el caso $a = 0$ probar que las bolas abiertas están compuestas por un intervalo ó por la unión de dos intervalos disjuntos.

Ejercicio. Describir las bolas cerradas y esferas en todos los casos posibles.

Ejercicio. Sea δ el diámetro del conjunto E, es decir

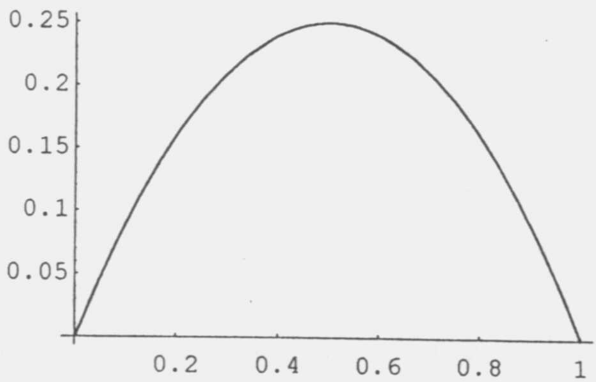
$$\delta = \sup_{x,y \in E} d(x,y).$$

Probar que

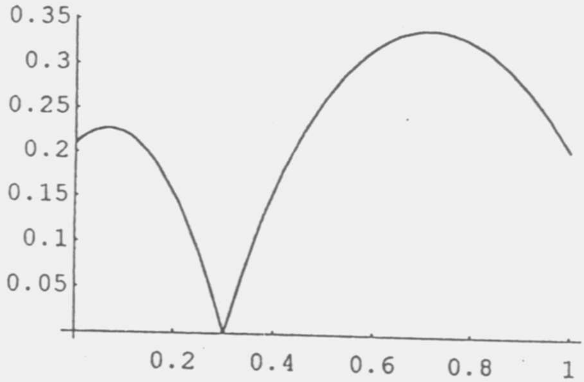
$$\delta = d(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = 6 - 4\sqrt{2}.$$

Las siguientes figuras ilustran los gráficos de la función $f(x) = d(a,x)$ para tres valores de a

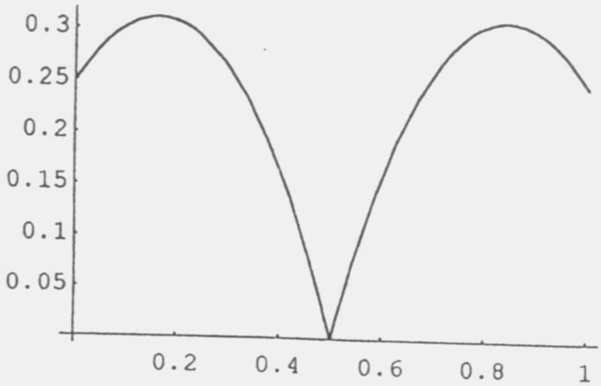
(1) $a = 0$



(2) $a = 0.3$



(3) $a = \frac{1}{2}$



Comentarios.

(1) Como dijimos en la introducción de este artículo, en el primer gráfico podemos observar que cuando en el eje de abscisas nos aproximamos en la métrica euclidiana por la izquierda al punto de abscisa 1, o dicho de otra manera nos alejamos en la métrica euclidiana del punto $0 \in E$, simultáneamente nos estamos acercando tanto como uno quiera al punto 0 en la métrica d.

(2) Es conveniente notar que métricas $d\prime$ sobre subconjuntos de $\mathbf{R}$ produciendo bolas de distinta forma también se pueden lograr, por ejemplo, tomando sobre el gráfico de una función sinusoidal $f(x) = sen(\alpha x)$ definida so-

bre el conjunto E, la métrica inducida por la métrica euclidiana en $\mathbf{R}^2$ y luego "transportando" esta métrica sobre E, es decir definiendo $d'(x,y) = \|f(x) - f(y)\|$. Podemos así conseguir bolas abiertas compuestas de muchos intervalos disjuntos dos a dos, tomando convenientemente el α. Sin embargo, nuestra métrica tiene un carácter si se quiere más intrínseco,ya que depende sólo de las propiedades que tiene $\mathbf{R}$ por ser un cuerpo ordenado. Además, lo sencillo de su definición permitió como hemos visto un rápido análisis de todas las situaciones posibles.

Para aquel lector familiarizado con el concepto de topología, puede resultar ser interesante comparar las topologías inducidas a partir de las métricas e y d.

Ejercicio. Probar que la topología inducida sobre E por d está estrictamente contenida en la topología inducida por e.

Como otra aplicación de nuestra métrica podemos ver que la misma nos provee de un ejemplo de métricas equivalentes (es decir, producen la misma topología), que no son uniformemente equivalentes (recordemos que dos métricas sobre un espacio métrico son uniformemente equivalentes si la función identidad de un espacio métrico en otro es uniformemente continua con inversa uniformemente continua). En efecto, si $E_1 = E - \{0\}$ y consideramos las métricas inducidas sobre E_1 por e y d, tenemos el siguiente resultado que dejamos como ejercicio.

Ejercicio. Las métricas e y d sobre E_1 son equivalentes, pero no uniformemente equivalentes.

Dpto. de Matemática. F.C.E.F.Q.y N..
Universidad Nacional de Río Cuarto. (5800) Río Cuarto.
E-mail hcuenya@exa.unrc.edu.ar