Actitudes investigativas en la enseñanza [2]

Roberto J. Miatello

El objetivo de la presente nota es insistir sobre la posibilidad de promover actitudes investigativas en la enseñanza de la Matemática, intercalando en los cursos, problemas que naturalmente llevan a nuevas preguntas y que pueden conducir a pequeñas investigaciones. Dichos problemas, además de ser útiles como ejercitación sobre un tema, debieran ser no cerrados, pudiendo dar lugar a variantes, generalizaciones, y en algunos casos a pequeños trabajos.

Desde luego, planteamos esta propuesta pensando principalmente en los cursos avanzados de la escuela secundaria y su factibilidad dependerá en gran medida de la respuesta de los alumnos. Creemos que el incluir problemas ingeniosos en los cursos de matemática es recomendable por muchos motivos, siendo tal vez el principal que se trata de un modo eficaz de motivar y estimular al alumno.

Dado que una de las dificultades básicas de implementación es la selección de los problemas, presentamos en esta nota varios que nos parecen atrayentes, con su discusión y con posibles continuaciones. En general ellos se enuncian en términos "concretos", no matemáticos, y como primer paso deben ser traducidos a un problema matemático. Algunos son tal vez algo difíciles y de una temática no adecuada al nivel secundario. Sin embargo, deseamos aclarar que ellos fueron elegidos pensando más bien en los profesores y sólo pretenden ser una guía, por el tipo de preguntas que generan. Es muy recomendable que el docente interesado busque (e invente) sus problemas él mismo, por ejemplo, creando variantes interesantes de problemas conocidos. Existe además una amplia bibliografía sobre problemas elementales (los libros de M. Gardner y de Y. I. Perelman, por ejemplo). Incluimos al final una lista que puede ser útil al lector.

---

[2] conferencia del autor en la Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina en la Universidad Nacional de Rio Cuarto, Oct. 1995.

Problema 1.

Se trata de averiguar un número telefónico de a lo más 5 cifras, con un mínimo número de preguntas que sólo admiten las respuestas "sí" o "no".

Sea el número a determinar $x = abcde$ con $0 \leq a, b, c, d, e \leq 9$. Antes de dar la solución óptima haremos algunos comentarios. Notemos que para el dígito a podemos preguntar, por ejemplo,
(1) ¿ $a \geq 4$? y en caso de respuesta afirmativa , (2) ¿ $a \geq 8$? y si la respuesta es negativa (3) ¿ $a \geq 6$? y, cualquiera sea la respuesta, vemos que una pregunta más es suficiente para determinar a. Aplicando este método a los dígitos b, c, d, e, vemos que x puede conocerse con $4 \times 5 = 20$ preguntas. Sin embargo, ésta no es la mejor estrategia posible. La observación básica es que las preguntas deben elegirse de modo que, como en el caso del dígito a, en cada una de ellas se eliminen la mitad (o la mitad menos uno) del total de números, independientemente de la respuesta.

Un modo de lograr esto es, por ejemplo: (1) ¿ $x \geq 50000$? no, (2) ¿ $x \geq 25000$? no , etc.

Es fácil ver que este método permite siempre determinar x con 17 preguntas.

Otro modo de lograr este objetivo es desarrollando x en sistema binario. Dado que $x \leq 100000$ y siendo $2^{16} < 100.000 < 2^{17} = 131072$, tenemos que x se expresa $x = \sum_0^{16} a_i\, 2^i$, $a_i = 0, 1$.

Luego, preguntando sucesivamente ¿ $a_0 = 0$? ¿$a_1 = 0$?... vemos de inmediato que 17 preguntas bastan para determinar x.

Preguntas.

1. Si se supone que x posee exactamente 5 dígitos, cuál es el número mínimo necesario de preguntas?. Generalizar el problema a un número de dígitos arbitrario.

2. Comparar con el resultado obtenido desarrollando x en otras bases 3,5,16...

3. Justificar que el número 17 no puede mejorarse. (Puede usarse un argumento inductivo.)

4. Plantear el mismo problema si se sabe que el número posee 5 cifras y es divisible por 3.

Problema 2.

Oscar tiene dos tías a quienes visita cada viernes por la noche. Cada una de ellas vive sobre la ruta de la línea de ómnibus B, una en dirección sur y la otra en dirección norte. Cada viernes, alrededor de las 7 de la tarde, Oscar camina hacia la parada y toma el primer ómnibus que pasa, en una dirección, o en la opuesta. En ambas direcciones la frecuencia es de 10 minutos. Al cabo de algún tiempo, una de las tías llama a Oscar reclamando que sólo ha ido a verla a ella una vez, mientras que ha visitado 9 veces a su hermana. ¿Cómo se explica esto?.

Para explicar esta aparente paradoja conviene "concretizar" el problema. Imaginemos una distribución de horarios en cada dirección, como sigue:

$N \quad ..., 7.30, 7.40, 7.50, 8.00, 8.10, ...$

$S \quad ...7.31, 7.41, 7.51, 8.01, 8.11, ...$

Resulta así que Oscar irá en dirección norte (resp. sur) si llega a la parada en los intervalos de tiempo: $...(7.31, 7.40], (7.41, 7.50], (7.51, 8.00], (8.01, 8.11]...$, (resp. ... $(7.30, 7.31], (7.40, 7.41], (7.50, 7.51]$ ...).

Luego, la longitud de los intervalos de tiempo para ir en dirección norte es 9 veces la de los intervalos para ir al sur, de donde resulta que la dirección norte es 9 veces más probable que la sur. Este es un ejemplo de "probabilidad continua" en el cual hay dos eventos complementarios (las dos direcciones posibles N y S), uno de los cuales es 9 veces más probable, siendo la razón entre las medidas de los intervalos que favorecen las direcciones norte y sur igual a 9.

Preguntas

1. Generalizar al caso de frecuencias diferentes en cada dirección N y S.

2. Generalizar al caso de n tías y n líneas de ómnibus.

3. Plantear otra variante del problema y resolverla.

Problema 3.

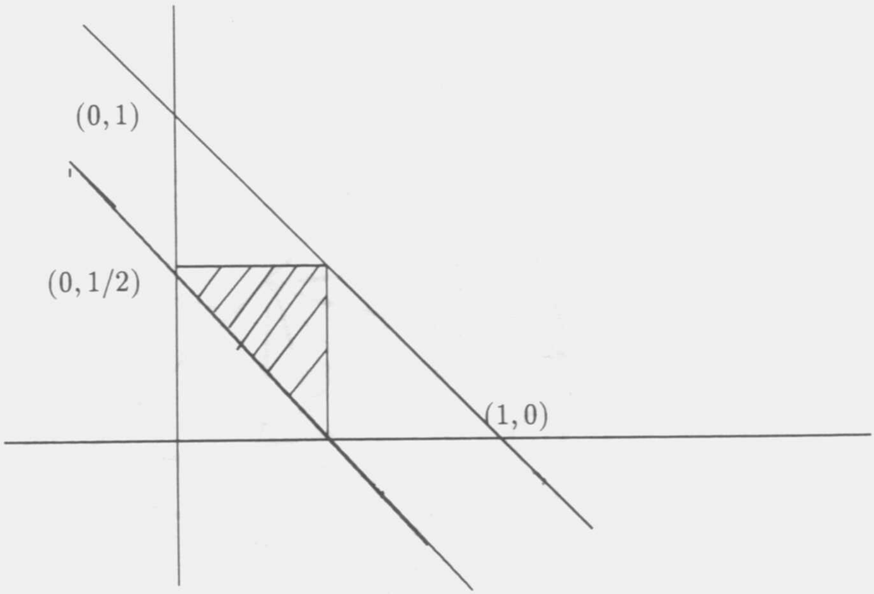
Si un trozo de alambre de longitud 1 se corta en 3 pedazos, ¿qué probabilidad hay de que estos pedazos puedan unirse formando un triángulo?. ¿ Cuál de formar un cuadrilátero si se corta en 4 pedazos?.

Dividimos el intervalo $[0,1]$ en 3 partes, de longitud x, y y $1-x-y$, con x e y variables que representan las longitudes de 2 de los lados del triángulo a construir.

El problema es representar matemáticamente al conjunto de todos los cortes que permiten formar un triángulo. Veamos que tales cortes se corresponden con los puntos de una región triangular del plano.

En efecto, para un corte dado, la condición necesaria y suficiente para formar un triángulo es que la longitud de cada trozo sea menor que la suma de las longitudes de los otros dos. Esto es

$$\begin{array}{rlcr} x+y & \geq 1-x-y & : & x+y>1/2 \\ x+1-x-y & > y & : & y<1/2 \\ y+1-x-y & > x & : & x<1/2 \end{array}$$



$x + y = 1/2 \qquad x + y = 1$

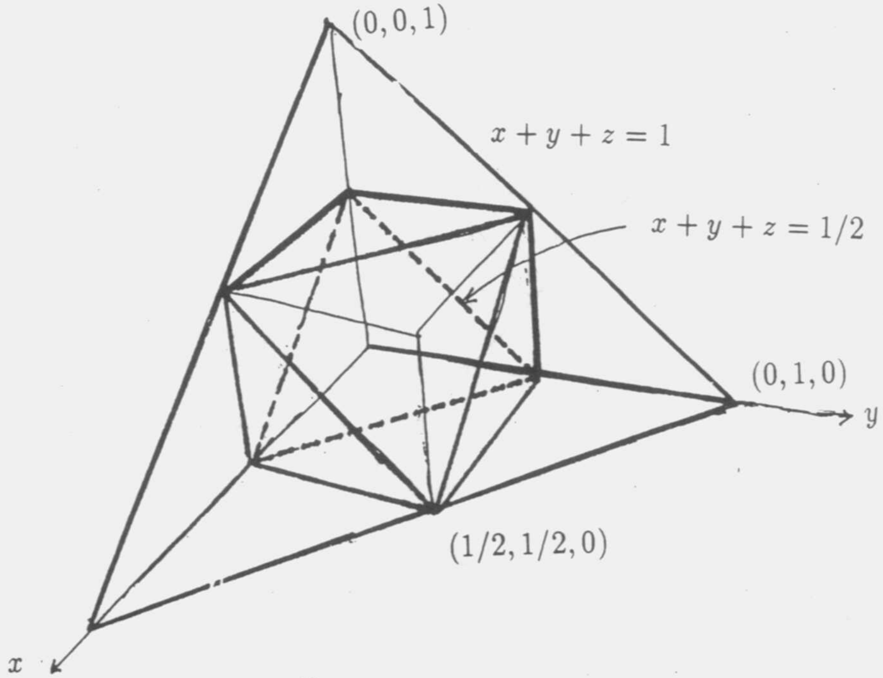
Luego se tiene que el área, A_f, de la subregión "favorable", en relación al área total $A_t = 1/2$, es $A_f = \frac{1}{8}\,A_t$. Luego $P = A_f/A_t = 1/4$.

De manera similar, en el caso de cortarse en 3 pedazos, si x, y, z son tales que

$$|\overset{x}{-----}|\overset{y}{-----}|\overset{z}{-----}|\overset{1-x-y-z}{-----}|$$

para formar un cuadrilátero se obtienen las condiciones

$$\begin{array}{rcl}
x+y+z > 1-x-y-z & : & x+y+z > 1/2 \\
x+y+1-x-y-z > z & : & 0 < z < 1/2 \\
x+z+1-x-y-z > y & : & 0 < y < 1/2 \\
y+z+1-x-y-z > x & : & 0 < x < 1/2
\end{array}$$



El cálculo del área puede hacerse por medio de una integral reiterada.

$$V_f = \int_0^{1/2}\int_0^{1/2-x}\int_{1/2-x-y}^{1/2} dz\,dy\,dx \;+ \int_0^{1/2}\int_{1/2-x}^{1/2}\int_0^{1-x-y} dz\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{1/2}\int_0^{1/2-x}(x+y)\,dy\,dx + \int_0^{1/2}\int_{1/2-x}^{1/2} dy\,dx - \int_0^{1/2}\int_{1/2-x}^{1/2}(x+y)\,dy\,dx$$

$$\int_0^{1/2} x\left(\frac{1}{2}-x\right)dx + \int_0^{1/2}\frac{(1/2-x)^2}{2}\,dx + \frac{1}{8} - \int_0^{1/2} x^2\,dx - \int_0^{1/2}\frac{y^2}{2}\Big|_{1/2-x}^{1/2} dx$$

$$= \int_0^{1/2}\frac{x}{2}\,dx - 2\int_0^{1/2} x^2\,dx + 2\int_0^{1/2}\frac{(1/2-x)^2}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16}$$

$$= \int_0^{1/2} \frac{x}{2}\,dx - \int_0^{1/2} x^2\,dx + \frac{1}{8} - \int_0^{1/2} x\,dx + \frac{1}{16}$$

$$= -\int_0^{1/2} \frac{x}{2}\,dx - \int_0^{1/2} x^2\,dx + \frac{3}{16} = \frac{1}{8} - \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$$

Como $V_t = \text{vol}\ \{(x,y,z) : x+y+z \leq 1,\ x,y,z \geq 0\} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$, se obtiene $P = \frac{1/12}{1/6} = \frac{1}{2}$.

Un modo alternativo de hallar V_f (evitando integrales) es el que sigue:

$$\begin{aligned} V_f &= \text{Vol (cubo de lado 1/2) - 2 Vol (tetraedro)} \\ &= \tfrac{1}{8} - 2 \times \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{8} \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{24} = \tfrac{1}{12} \end{aligned}$$

Preguntas.

1. Hallar la probabilidad de formar un polígono de n lados si se realizan n cortes.

2. Tres puntos A, B, C en una circunferencia se eligen al azar. Probar que la probabilidad de que todos los ángulos del triángulo ABC sean agudos es igual a $1/4$.

Problema 4.

Tres políticos A, B, y C deciden resolver sus diferencias mediante un duelo triangular a pistola bajo las siguientes reglas. Luego de sortear quien dispara en $1^{er}, 2^{do}$ y 3^{er} lugar, se ubican en cada uno de los vértices de un triángulo equilátero. Se conviene que cada uno disparará en la dirección que desee, un tiro por turno, continuando en el orden sorteado hasta que 2 de ellos queden fuera de combate. Además, los 3 conocen que las precisiones de tiro de A, B y C son de 100 %, 80 % y 50 % respectivamente.

Suponiendo que cada uno adopta la estrategia más favorable y que nadie cae a causa de una bala perdida que no ha sido disparada contra él, ¿Quién tiene más chances de sobrevivir y cuáles son las probabilidades de cada uno?.

Dado que A y B son los mejores tiradores, ambos tratarán de eliminarse el uno al otro, luego la mejor estrategia para C es disparar al aire hasta que A ó B caigan. De este modo, C tiene el primer disparo contra el sobreviviente, con una chance del 50% de vencer.

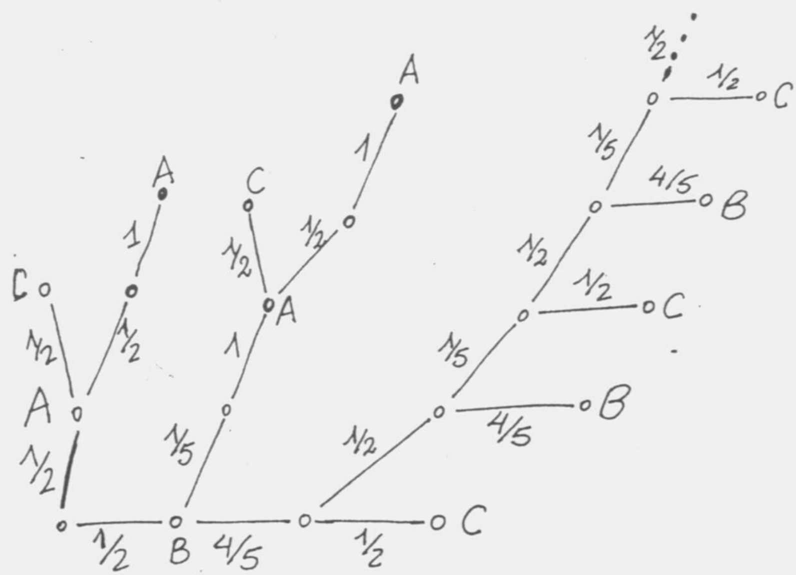
Calculemos las probabilidades de vencer de cada uno, empezando con A.

Si A comienza (probabilidad 1/2), A mata a B y C dispara contra A, con probabilidad 1/2. Si C yerra, A mata a C. Entonces la probabilidad de A vencer en este caso es $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Si B dispara primero (probabilidad $\frac{1}{2}$) y yerra (probabilidad $\frac{1}{5}$), A mata a B y C dispara contra A. Si C yerra (prob. $\frac{1}{2}$), A elimina a C. Luego la probabilidad en este caso es $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{20}$

Por lo tanto la probabilidad para A es $\boxed{P_A = \frac{1}{4} + \frac{1}{20} = \frac{3}{10}}$

Para determinar las probabilidades de B y C es instructivo hacer un gráfico que describe las diversas posibilidades.



$$P_B = \left(\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\right)$$

$$+\ldots = \left(\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{4}{25}.\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{8}{45}$$

Luego $\boxed{P_B = \frac{8}{45}}$. Finalmente

$$P_C = \frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\right)^2\times\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{5}\times\sum\left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{2}{9}$$

Además, C puede vencer contra A con probabilidad

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \text{ó} \frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{20}$$

luego $\boxed{P_C = \frac{2}{9}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20} = \frac{47}{90}}$.

Sumando tenemos: $P_A + P_B + P_C = \frac{3}{10}+\frac{8}{45}+\frac{47}{90} = \frac{27+16+47}{90} = 1$

Preguntas.

1. Suponiendo que C no dispara al aire, pruebe que en este caso $P_A = 0.24$ $P_B = 0.31$ $P_C = 0.45$.

2. Considerando variables x, y, z, las precisiones de A, B y C respectivamente, determinar las probabilidades de vencer de cada uno. Por ejemplo, manteniendo como en el problema $x = 100\%$, $y = 80\%$, ¿cuál es el mínimo valor de z que le garantiza la victoria?.

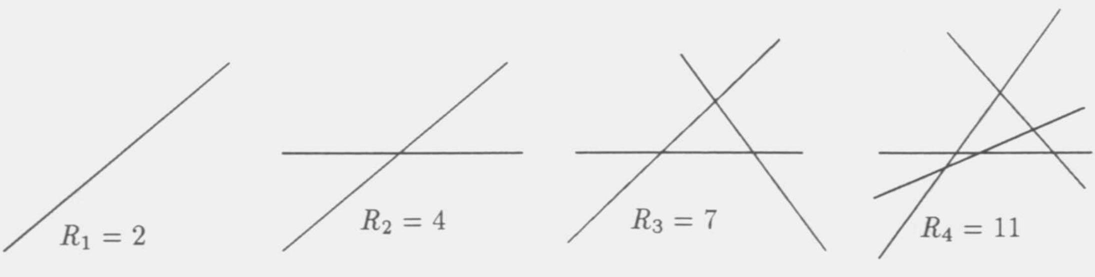
Problema 5.

Dados n planos en posición general en el espacio, ¿en cuántas regiones queda éste particionado?.

Nota. Posición general significa, intuitivamente, que los planos no tienen relaciones entre sí. Esto es, que la intersección de 2 planos cualesquiera de la familia es una recta, la intersección de 3 de ellos es un punto y la de 4 ó más es vacía. Notamos que para cualquier familia de planos, siempre es posible deformar ligeramente la configuración de modo que se cumplan estas condiciones, de ahí el término "posición general". Es claro que se debe incluir esta condición pues, por ejemplo, 2 planos paralelos dividen al espacio en 3 regiones y 2 planos no paralelos en 4 regiones.

Antes de encarar el problema conviene considerar un caso más simple, el de n rectas en posición general en el plano. Esto es, las rectas son no paralelas dos a dos y no hay 3 de ellas que se intersecten en un punto.

Sea R_n = número de regiones en que n rectas dividen el plano.



Dos observaciones cuya verificación dejamos al lector son las siguientes:

(a) La recta n-ésima corta las $n-1$ rectas anteriores en $n-1$ puntos y queda dividida en n partes.

(b) Cada una de estas n partes ($n-2$ intervalos y 2 semirrectas) yace en *una* de las R_{n-1} regiones y divide a ésta en 2 subregiones.

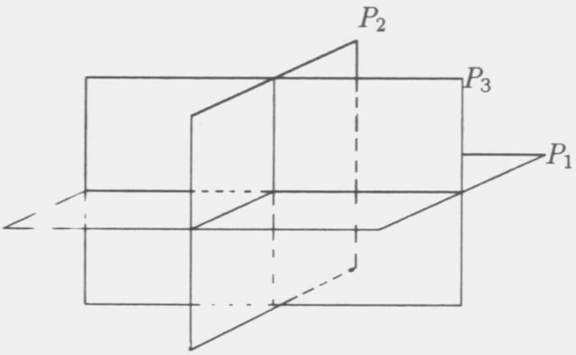
Luego se obtiene

$$\begin{aligned} R_n &= (R_{n-1} - n) + 2n = R_{n-1} + n \\ &= R_{n-2} + (n-1) + n = R_0 + \sum_{i=0}^{n} i \end{aligned}$$

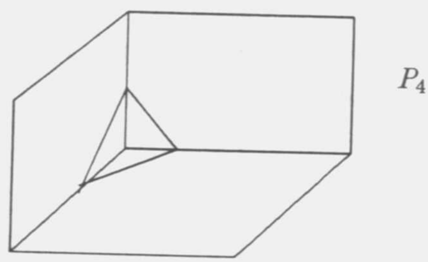
$$\boxed{R_n = 1 + \tfrac{n(n+1)}{2}}$$

Denotemos ahora R'_n = número de regiones en que es dividido el espacio por n planos en posición general. Hallaremos una expresión para R'_n.

Nuevamente observamos que para $n = 0, 1, 2, 3, 4$, se tiene $R'_0 = 1$, $R'_1 = 2$, $R'_2 = 4$, $R'_3 = 8$.



$R'_3 = 8$



$R'_4 = 8 + 7 = 15$

Además, los análogos de las observaciones (a) y (b) continúan válidos, esto es:

(a') El plano n-ésimo P corta los n-1 planos anteriores en $n-1$ rectas distintas que dividen a P en R_{n-1} regiones.

(b') Cada una de estas R_{n-1} regiones yace en *una* de las R'_{n-1} regiones existentes y la divide en dos subregiones.

Luego se tiene $R'_n = (\underbrace{R'_{n-1} - R_{n-1}}_{no\,tocadas\,por\,P}) + 2R_{n-1} = R'_{n-1} + R_{n-1}$

$$R'_n = R'_0 + R_0 + R_1 + ... + R_{n-1}$$
$$= 1 + \sum_{i=0}^{n-1}\Big(1 + \frac{i(i+1)}{2}\Big)$$
$$R'_n = 1 + n + \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=0}^{n-1} i^2\Big) + \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=0}^{n-1} i\Big)$$
$$= 1 + n + \frac{1}{2}\Big(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2}\Big)$$
$$= 1 + n + \frac{n(n-1)(2n+2)}{2 \times 6}$$

o sea, $$\boxed{R'_n = n + 1 + \frac{n(n^2-1)}{6}}$$

Si denotamos por R^0_n = número de segmentos en que una recta queda dividida por n puntos $= n + 1$ tenemos la tabla:

n	0	1	2	3	4	5	6
R^0_n	1	2	3	4	5	6	7
R_n	1	2	4	7	11	16	22
R'_n	1	2	4	8	15	26	42

Preguntas.

1. Hallar una fórmula para el número de regiones determinadas por n hiperplanos en posición general en el espacio m-dimensional.

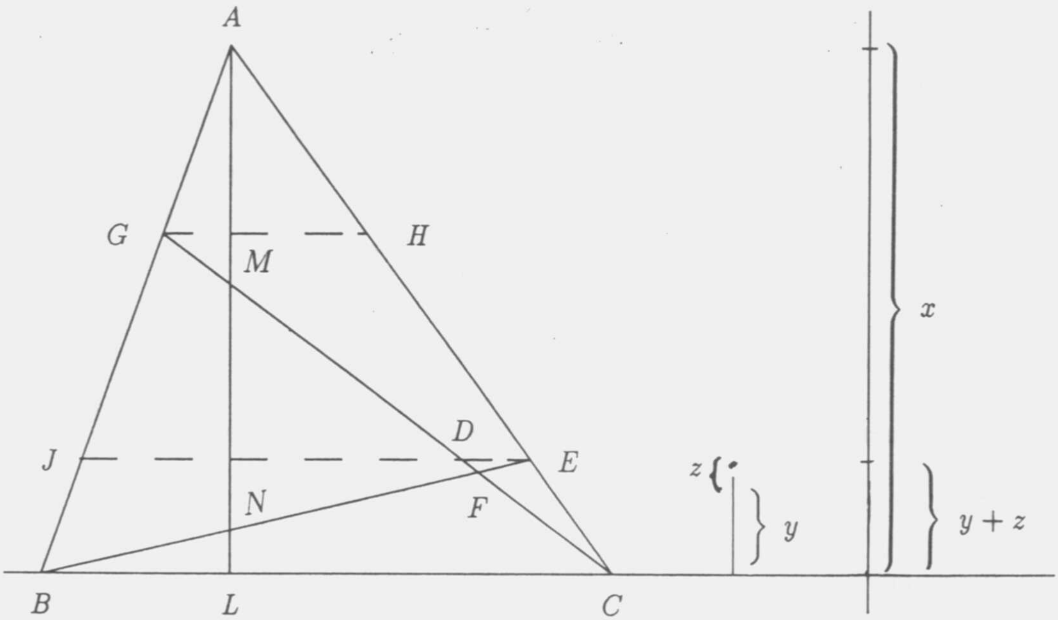
2. Usando que $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ y $f'(x) = \sum_{i=1}^{n} i\, x^{i-1}$ y $f''(x) = \sum_{i=1}^{n} i(i-1)x^{i-2}$ obtenga las expresiones $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$,

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Halle una expresión para $\sum_{i=1}^{n} i^3$.

Problema 6.

Se dividen los 3 lados de un triángulo T en n partes iguales. Se traza una recta de cada vértice a la posición $1/n$ del lado opuesto formándose un triángulo interior. El problema es hallar la razón entre las áreas del triángulo interior T_i y el original. Verificar que si $n = 3$ es $a(T_i) = \frac{1}{7}a(T)$, para todo triángulo.



1. $a(ABC) = a(MNF) + a(BFC) + a(AMC) + a(ABN)$

2. $a(BFC) = \frac{1}{2}BC.y = a(ABC) \times \dfrac{y}{x}$

3. $y + z = \dfrac{x}{n}$, luego $\frac{x}{y} = n\left(1 + \frac{z}{y}\right)$

4. $\dfrac{z}{y} = \dfrac{DE}{BC}$

5. $\dfrac{BC}{GH} = n \qquad \dfrac{GH}{DE} = n - 1$, o sea $\qquad \dfrac{DE}{BC} = \dfrac{1}{n(n-1)}$

$$\frac{x}{y} = n\left(1 + \frac{1}{n(n-1)}\right) = \frac{n^2 - n + 1}{n - 1}$$

luego $\qquad a(BFC) = a(T)\left(\dfrac{n-1}{n^2 - n + 1}\right)$

y la misma relación vale para $a(MAC)$ y $a(ABN)$.

6. De 1 y 5 resultan

$$a(ABC) = a(MNF) + 3a(ABC)\frac{n-1}{n^2 - n + 1}$$

$$a(ABC)\left(1 - \frac{3n - 3}{n^2 - n + 1}\right) = a(MNF)$$

En conclusión $\boxed{a(T_i) = \dfrac{(n-2)^2}{n^2 - n + 1}\,a(T)}$,

En particular, si $n = 3, n = 4, n = 5$ se obtienen, respectivamente, $\dfrac{1}{7}, \dfrac{4}{13}$, y $\dfrac{9}{21}$.

Preguntas.

1. Note que si $n = 2$ la fórmula anterior da $a(T_i) = 0$, esto es, las 3 medianas de T se cortan en un punto. Compare con otras demostraciones que conozca de este hecho.

2. Analice la posibilidad de generalizar a cuadriláteros.

Bibliografía

Graham L.A., *Ingenious Mathematical proplems and methods*, Dover, 1959.

Kordemsky B., *The Moscow puzzles*, Dover, 1972.

Kraitchik M., *Mathematical recreations*, Dover, 1942.

LLoyd S., Mathematical Puzzles, ed. M. Gardner, Dover, 1959.

Perelman Y.I.,*Fun with Maths and Physics*, MIR, Moscow, 1984.

Trigg Ch., *Mathematical Quickies*, Dover, 1967.

Yaglom A.M., Yaglom I.M., *Challenging Mathematical problems with elementary solutions* V. I, II, Dover, 1964.

(Dirección, Dover: Dover Publications Inc., 180 Varick St, New York, N.Y.10014)

Facultad de Matemática, Astronomía y Física

Universidad Nacional de Córdoba

5000 Córdoba.