El Método de Enumeración de G. Pólya

N.E. Aguilera [1]

Introducción.

¿De cuántas maneras distintas puedo "juntar" (hacer conjuntos de) 10 bolillas si puedo elegirlas de colores amarillo, azul y rojo?. Esta pregunta viene disfrazada de varias formas, por ejemplo: ¿de cuántas maneras puedo distribuir 10 bolillas en 3 cajas pintadas de amarillo, azul y rojo?, o más para uso matemático: ¿cuántos monomios (mónicos) de 3 variables y grado 10 hay?. La respuesta, el número combinatorio $\binom{12}{2} = \frac{12!}{2!\,10!} = 66$, es bien conocida, y a veces se la ilustra alineando una serie de 10 puntos y 2(=3 - 1) rayas (para la segunda pregunta, las rayas representan la división entre las cajas, los puntos son las bolillas).

La relación entre el número de bolillas de 3 colores y los monomios de 3 variables se puede expresar mediante las funciones generatrices. Así, la expansión del polinomio $(x_1+x_2+x_3)^{10}$ tiene precisamente 66 términos y, por ejemplo, el coeficiente de $x_1^2x_2^3x_3^5$ en esta expansión, $\frac{10!}{2!\,3!\,5!} = 2520$, es el número de formas distintas en que puedo alinear (de izquierda a derecha) 2 bolillas amarillas, 3 azules y 5 rojas.

También podemos hacernos las siguiente pregunta: ¿Cuántos collares "distintos" de 10 cuentas pueden hacerse en cuentas de colores amarillo, azul y rojo?. Por supuesto, primero tenemos que precisar qué entendemos por distintos. Para fijar ideas, pensemos que estamos trabajando sobre una mesa, y que dos collares son iguales si podemos rotar uno de ellos (sin levantarlo de la mesa) de modo de verlos idénticos, es decir, sólo permitimos movimientos en 2 dimensiones. Otra posibilidad sería permitir movimientos en 3 dimensiones dando vuelta los collares (como las tortillas o los panqueques). En fin, también

[1] Nota: Para una introducción al concepto de grupo y sus aplicaciones a los problemas de coloreo, ver el artículo de P. Tirao "¿Cómo pintar un cubo?", REM Vol. 10 N^o 3.

podríamos considerar "tiras" de cuentas en una dimensión diciendo que son iguales si después de rotarlas 180^o lo son. También podemos hacer una pregunta más particular: ¿Cuántos collares distintos hay que tengan exactamente 2 cuentas amarillas, 3 azules y 5 rojas?. Como puede verse, para obtener las respuestas hay que considerar el tipo de movimientos permitidos, en este caso los movimientos rígidos del plano (o el espacio o las simetrías en una dimensión).

Este tipo de preguntas, contar configuraciones que son indistinguibles mediante ciertas transformaciones, es el objetivo del "Método de Enumeración de Pólya", presentado por G. Pólya en el artículo "Kombinatorische Anzahlbestimmungen fur Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen" (Acta Mathematica, vol. 68, p. 145-254 (1937)).

Nuestro propósito es dar una breve introducción a esta teoría ya que no se ve usualmente en los cursos de matemática discreta o combinatoria. Por supuesto, no es nuestra intención explicar las más de 100 páginas del artículo de Pólya, sino dar un muy rápido pantallazo sobre el tema. Como veremos, Pólya dio una fórmula para el denominado *inventario de configuraciones indistinguibles*, expresándolo como un polinomio, similar a $(x_1 + x_2 + x_3)^{10}$, cuyos coeficientes dan la enumeración de las distintas configuraciones.

Como puede intuirse a partir del título del artículo de Pólya, el interés del autor era estudiar grupos, grafos y compuestos químicos. Aunque a primera vista no parece que los collares y los compuestos químicos estén muy relacionados, notemos que una molécula está constituída por átomos de distinta valencia, por lo que en principio pueden formarse distintas moléculas a partir de los mismos átomos (isómeros), lo que matemáticamente puede pensarse como formar grafos a partir de un número determinado de nodos con grados dados. En el caso del collar, por ejemplo cuando tenemos 2 cuentas amarillas, 3 azules y 5 rojas, podemos pensar que tenemos tres tipos distintos de átomos (2 del primer tipo, 3 del segundo y 5 del tercero), todos de valencia 2, y estamos tratando de encontrar cuántas moléculas distintas podemos formar (en ese caso permitiendo movimientos tri-dimensionales).

G. Pólya es el conocido autor del libro "How to solve it", y co-autor de los también clásicos libros sobre "Desigualdades" junto con G.H. Hardy y J.E. Littlewood y "Problemas y Teoremas en Análisis" junto con G. Szegö. Las técnicas que usó para el desarrollo del método de enumeración que presentamos fueron anticipadas por J.H. Redfield en 1927, en un trabajo que pasó desapercibido. Las técnicas usan como herramienta fundamental un resultado de W. Burnside (1897), pero quien primero se ocupó de este tipo de problemas de enumeración fue A. Cayley, quien en 1874 enumeró los isómeros de hidrocarbonos saturados, planteando el problema como uno de árboles. Fue el mismo Cayley quien anteriormente (en 1857) definió por primera vez la noción de árbol al considerar cambios de variables en cálculo diferencial (Cayley también hizo importantes contribuciones al análisis). Es interesante relacionar estas fechas con otros hitos en la teoría de grafos: el juego de W. Hamilton (el mismo del "hamiltoniano" de mecánica) de las 20 ciudades sobre un dodecaedro, que dio el nombre a los "circuitos de Hamilton", data de 1859, mientras que la teoría de grafos (y la topología fue iniciada por Euler en 1736 al resolver el problema de los puentes Könisberg, dando a su vez nombre a los "circuitos de Euler". Por otra parte, los nombres de Cayley y Hamilton se juntan en el conocido teorema sobre matrices y sus polinomios característicos que demostró Cayley en 1853 para matrices de 2x2 y Hamilton generalizó posteriormente.

Nuestro plan es el siguiente: primero introducimos algunos resultados sobre grupos de permutaciones que actúan sobre un conjunto como paso previo al lema de Burnside. A continuación presentamos el polinomio de índices de ciclos y luego el teorema de Pólya. Finalmente damos algunas indicaciones sobre el uso de la computadora para el cálculo de las fórmulas resultantes, y planteamos algunos problemas para el lector entusiasta (que pueden resolverse sin el uso de la computadora). Para la presentación de las primeras secciones hemos tomado ideas de los libros de A. Tucker ("Applied Combinatorics", John Wiley & Sons, 1980); de Grimaldi ("Matemática discreta y combinatoria - Introducción y Aplicaciones", Addison-Wesley Iberoamericana, 1989), que sigue la presentación de Tucker; de F. Harary ("Graph Theory", Addison-Wesley, 1969), orientada hacia grafos y árboles; y de N. G. de Bruijn ("Applied Combinatorial Mathematics", E.F. Beckenbach ed., Wiley, 1964, cap. 5). Los algoritmos de computación siguen las ideas presentadas por S. Skiena ("Implementing discrete Mathematics", Addison-Wesley, 1990).

En nuestra presentación supondremos que el lector está familiarizado con los conceptos de grupo, clases de equivalencia definidas a partir de una relación de equivalencia, y permutaciones. No es necesario el conocimiento de funciones generatrices. Por otra parte, el lector puede omitir la sección de algoritmos, si así lo desea.

Quiero agradecer a la Olimpíada Matemática Argentina (OMA) el haberme permitido usar sus facilidades computacionales, y especialmente a la Prof. Celina Veronesi (Universidad Nacional del Litoral) por haber despertado mi interés en el tema a partir de sus preguntas y observaciones.

Grupos de Permutaciones.

Simplifiquemos nuestro problema del collar para hacerlo más sencillo: supongamos que queremos colorear los vértices de un cuadrado en blanco y negro. En este caso es fácil hacer todas las configuraciones posibles, ordenándonos al hacerlo: ningún vértice negro y después uno, dos, tres o todos los vértices negros. Hay $2^4 = 16$ posibilidades como se indica en la Figura 1, donde hemos agrupado las configuraciones que son iguales si tenemos en cuenta las rotaciones en el plano (pensando en que el centro del cuadrado es el origen común de las rotaciones).

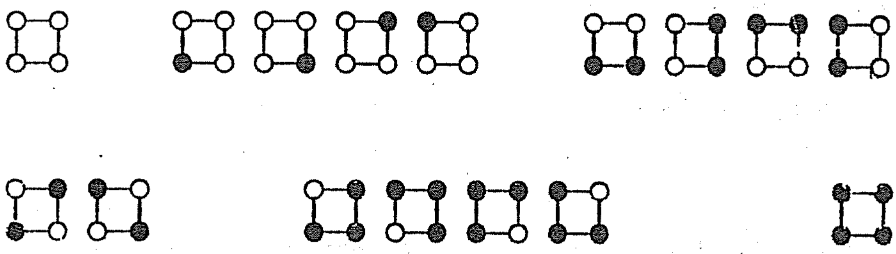


Figura 1

Nuestro primer problema es cómo representar estas rotaciones. Numerando los vértices del cuadrado en sentido antihorario, como se indica en la Figura 2,

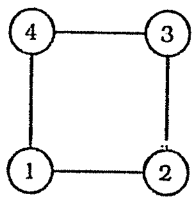


Figura 2

podemos pensar en las rotaciones como permutaciones en el conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$. De esta forma, un giro antihorario en 90^o es la permutación (función biyectiva) que manda 1 en 2,2 en 3,3 en 4 y 4 en 1. Contando las rotaciones posibles, vemos que tenemos 4 permutaciones correspondientes a los giros de $0^o, 90^o, 180^o$ y 270^o. Observemos que estas permutaciones forman un grupo si tomamos como producto en este grupo la composición (de permutaciones): por ejemplo, hacer una rotación de 90^o seguida de una de 270^o es lo mismo que hacer una rotación de 360^o, o sea lo mismo que hacer una de 0^o (la identidad), y entonces la inversa de la rotación en 90^o es la rotación en 270^o. Dejamos que el lector verifique estas propiedades en términos de las permutaciones que definen las rotaciones, según hemos descripto (este grupo de permutaciones se llama grupo cíclico). Si consideramos también los movimientos en 3 dimensiones, habría que incluir permutaciones como la que intercambia el 1 con el 3 y el 2 con el 4. Recordemos que hay $4! = 24$ permutaciones de 4 elementos, es decir, ya sea que consideremos las rotaciones en 2 ó 3 dimensiones, aún nos falta considerar unas cuantas permutaciones que no corresponden a movimientos rígidos (por ejemplo la que intercambia el 1 y el 2 pero deja fijos el 3 y el 4). Al grupo de permutaciones (en este caso las rotaciones en 2 dimensiones) lo llamaremos G.

Ya hemos descripto las rotaciones en términos de permutaciones. Ahora incorporamos los colores (en este caso blanco y negro). Dar una coloración a los vértices significa dar una función del conjunto $\{1,2,3,4\}$ en el conjunto $\{blanco, negro\}$. Para ser un poco más formales llamemos F al conjunto de funciones $f : D \to R$, donde en este caso $D = \{1,2,3,4\}$ y $R = \{blanco, negro\}$.

Combinando las coloraciones con las rotaciones, vemos que queremos identificar las coloraciones f y g (dos elementos en F) cuando hay una permutación π en el grupo de permutaciones G tal que $g = f \circ \pi$ (la composición de f y π). Dado que G es un grupo de permutaciones, no es difícil ver que esta "identificación" define una relación de equivalencia (con las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad). Nuestro próximo paso es contar las clases de equivalencia, para lo cual usamos el lema de Burnside que describimos a continuación.

El lema de Burnside.

Tenemos ahora un conjunto D (en el ejemplo los vértices del cuadrado), un grupo de permutaciones G (las rotaciones en dos dimensiones) que actúa sobre D, un conjunto R (los colores), las funciones de D en R que llamamos F, y clases de equivalencia definidas en F a partir de G. Nuestro propósito es calcular el número N de clases de equivalencia.

Consideremos fija por un momento la "coloración" $f \in F$ y la clase de equivalencia a la cual pertenece, $E_f = \{g : g = f \circ \pi$ para algún $\pi \in G\}$. Podemos asociar con cualquier permutación π de G un elemento g en E_f mediante la construcción $g = f \circ \pi$. En general, la asignación $\pi \to g$ no es inyectiva, pero observemos que si π y α son tales que $f \circ \pi = f \circ \alpha$, entonces la permutación $\sigma = \alpha \circ \pi^{-1}$ satisface $f \circ \sigma = f$, puesto que si $t \in D$ ponemos $s = \pi^{-1}(t)$ y entonces $f \circ \sigma(t) = f(\alpha \circ \pi^{-1}(t)) = f(\alpha(s)) = f \circ \alpha(s) = f \circ \pi(s) = f(\pi(s)) = f(t)$. Claro que si $g \in E_f$ y $g = f \circ \beta$, entonces $g = f \circ \sigma \circ \beta$ para cualquier $\sigma \in G$ tal que $f \circ \sigma = f$. Entonces, en la clase de equivalencia E_f hay tantos "elementos repetidos" mediante la asignación $\pi \to f \circ \pi$ como elementos hay en el conjunto $\{\sigma \in G : f \circ \sigma = f\}$, y podemos escribir (indicando por # el cardinal).

$$\#(G) = \#(\{\sigma \in G : f \circ \sigma = f\})\#(E_f)$$

Por ejemplo, en el caso de los vértices del cuadrado y rotaciones en el plano que estamos considerando si f es la coloración que pone los vértices 1 y 3 en negro y los vértices 2 y 4 en blanco, las permutaciones que satisfacen $f \circ \sigma = f$ son las correspondientes a las rotaciones de 0^o (la permutación identidad) y 180^o, por lo que en este caso $\#(G) = 4, \#(\{\sigma : f \circ \sigma = f\}) = 2$, y se puede ver a partir de la Figura 1 que $\#(E_f) = 2$.

Podríamos pensar al revés: para $\pi \in G$ definamos la función $\psi(\pi) = \#(\{f : f \circ \pi = f\})$, es decir el número de funciones (coloraciones) que permanecen invariantes por π. Por ejemplo, en el caso de los vértices del cuadrado que estamos considerando, la permutación correspondiente a la rotación en 90^o deja invariantes 2 coloraciones (todos los vértices blancos y todos los vértices negros), mientras que la permutación correspondiente a la rotación en 180^o deja invariantes las coloraciones 1, 10, 11 y 16 (numerando según la Figura 1, de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo), por lo que el correspondiente valor de $\psi(\pi)$ es 4.

Los números $\#(\{\pi : f \circ \pi = f\})$ para $f \in F$, y $\psi(\pi)$ para $\pi \in G$ se pueden relacionar mediante la función $\chi(\pi, f)$ definida como 1 si $f \circ \pi = f$ y como 0 en otro caso. Entonces

$$\sum_{\pi \in G} \psi(\pi) = \sum_{\pi \in G} \sum_{f \in F} \chi(\pi, f) = \sum_{f \in F} \sum_{\pi \in G} \chi(\pi, f) = \sum_{f \in F} \#(\{\pi : f \circ \pi = f\})$$

Pero para $f \in F$ fija, $\#(\{(\pi : f \circ \pi = f\}) = \#(G)/\#(E_f)$ por lo que vimos anteriormente, así que

$$\sum_{\pi \in G} \psi(\pi) = \sum_{f \in F} \frac{\#(G)}{\#(E_f)} = \#(G) \sum_{f \in F} \frac{1}{\#(E_f)}$$

Podemos calcular la suma en el último miembro agrupando las funciones de F según la clase de equivalencia a la que pertenecen, es decir,

$$\sum_{f \in F} \frac{1}{\#(E_f)} = \sum_{E \text{ clase de equivalencia}} \sum_{f \in E} \frac{1}{\#(E)} =$$

$$= \sum_{E \text{ clase de equivalencia}} \frac{1}{\#(E)} \sum_{f \in E} 1 =$$

$$\sum_{E \text{ clase de equivalencia}} 1 =$$

$$= \text{ número de clases de equivalencia } = N$$

Resumiento, obtenemos el *Lema de Burnside:* el número N de clases de equivalencia es

$$N = \frac{1}{\#(G)} \sum_{\pi \in G} \psi(\pi)$$

En nuestro ejemplo con los vértices del cuadrado, tenemos 4 permutaciones en G, digamos π_1, π_2, π_3 y π_4, correspondientes respectivamente a las rotaciones de $0^o, 90^o, 180^o$ y 270^o. Aquí podemos calcular la función ψ sin mayores problemas: $\psi(\pi_1) = 16$ (deja todas las coloraciones invariantes), $\psi(\pi_2) = 2, \psi(\pi_3) = 4$ y $\psi(\pi_4) = 2$. Ya sabemos (por la Figura 1) que $N = 6$, con lo que comprobamos que (efectivamente!)

$$N = \frac{1}{4}(16 + 2 + 4 + 2) = \frac{24}{4} = 6$$

El problema con el lema de Burnside es que en general es difícil, o mejor dicho, complicado, calcular $\psi(\pi)$ y es conveniente introducir nuevas herramientas, aunque ya podríamos usarlo para resolver el problema de los collares que planteamos originalmente, poniendo una buena cuota de paciencia y cuidado.

Ciclos de una permutación - El polinomio de índices de ciclos.

Repasemos un poco la estructura de una permutación π sobre el conjunto $\{1, 2, ..., n\}$. Si tomamos un elemento $a, 1 \leq a \leq n$, podemos calcular su órbita según π, es decir las imágenes $\pi^0(a) = a, \pi^1(a) = \pi(a), \pi^2(a) = \pi(\pi(a))$, y así sucesivamente. Dado que la permutación actúa sobre un conjunto finito, eventualmente volveremos a repetir el mismo valor, es decir, existirán i y k tales que $\pi^{i+k}(a) = \pi^i(a)$, pero puesto que π es una función biyectiva y tiene inversa, aplicando $\pi^{-1} i$ veces a la igualdad anterior, vemos que $\pi^k(a) = a$ (atención: π no es un número!). En otras palabras, dada la permutación π y el número a, existe k mínimo tal que $\pi^k(a) = a$. El conjunto cíclicamente ordenado $\{a, \pi(a), ..., \pi^{k-1}(a)\}$ es un *ciclo* de π, y haciendo variar a obtenemos una *descomposición en ciclos* de π. Es claro que si b está en el ciclo $\{a, \pi, (a), ..., \pi^{k-1}(a)\}$, también las imágenes sucesivas de b por π están las imágenes sucesivas de b por π están en $\{a, \pi, (a), ..., \pi^{k-1}(a)\}$, en particular $\pi^{k-1}(b) = b$ y $\{a, \pi(a), ..., \pi^{k-1}(a)\} = \{b, \pi(b), ..., \pi^{k-1}(b)\}$.

Por ejemplo, en nuestro caso de los vértices del cuadrado, tenemos $n = 4$

y la permutación π correspondiente a una rotación de 180^o (es decir $\pi(1) = 3, \pi(2) = 4, \pi(3) = 1, \pi(4) = 2$) tiene los ciclos (1,3) y (2,4).

Además del grupo de permutaciones G tenemos funciones $f : D \to R$ (las coloraciones), y nos interesan las permutaciones π y funciones f tales que $f \circ \pi = f$, pero observemos que en este caso $f(\pi(d)) = f(d)$ para todo $d \in D$, y por lo tanto f debe ser constante sobre los ciclos de π

Dejemos fija la permutación π y pongamos $m = \#(R)$ (el número de colores). Pensando que cada ciclo de π es una caja, tenemos m posibilidades para elegir una f constante en cada caja, o sea hay $m^{\text{número de ciclos de } \pi}$ configuraciones que quedan invariantes por π. En otras palabras, la función ψ que aparece en el lema de Burnside satisface

$$\psi(\pi) = \psi(\{f : f \circ \pi = f\}) = m^{\text{número de ciclos de } \pi}$$

Para uso en las secciones siguientes, vamos a resumir esta información construyendo un polinomio de variables $x_1, x_2, ..., x_n$ asociando la variable x_i con los ciclos de longitud i: para cada permutación $\pi \in G$ consideramos el vector $j(\pi = (j_1, j_2, ..., j_n)$, de modo que j_i indica la cantidad de ciclos de longitud i en π. El polinomio, llamado el *polinomio de índice de ciclos*, está definido como

$$P_G(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{\#(G)} \sum_{\pi \in G} x_1^{j_1} x_2^{j_2} ... x_n^{j_n}$$

donde cada término del polinomio se llama *representación de la estructura de ciclo* de la respectiva permutación π. Dado que si $j(\pi) = (j_1, j_2, ..., j_n)$, entonces $j_1 + j_2 + ... + j_n =$ número de ciclos de π, podríamos reescribir el lema de Burnside como

$$N = P_G(m, m, ..., m)$$

Volviendo al ejemplo de los vértices del cuadrado, tenemos $n = \#(D) = 4, m = \#(R) = 2$, y $\#(G) = 4$ permutaciones que hemos llamado π_1, π_2, π_3 y

π_4. En este caso,

$$\text{ciclos de } \pi_1 = \{(1),(2),(3),(4)\} : 4 \text{ de longitud } 1;$$

$$\text{ciclos de } \pi_2 = \{(1,2,3,4)\} : 1 \text{ de longitud } 4;$$

$$\text{ciclos de } \pi_3 = \{(1,3),(2,4)\} : 2 \text{ de longitud } 2;$$

$$\text{ciclos de } \pi_4 = \{(1,4,3,2)\} : 1 \text{ de longitud } 4$$

Entonces

$$P_G(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{4}(x_1^4 + x_4^1 + x_2^2 + x_4^1)$$

y

$$N = P_G(2,2,2,2) = \frac{1}{4}(2^4 + 2^1 + 2^2 + 2^1) = \frac{1}{4}(16+2+4+2) = 6$$

como ya habíamos visto.

Para abundar, si en vez de 2 colores tuviéramos 3 para elegir, el número de coloraciones de los vértices indistinguibles mediante rotaciónes sería

$$P_G(3,3,3,3) = \frac{1}{4}(3^4 + 3^1 + 3^2 + 3^1) = \frac{1}{4}(81+3+9+3) = \frac{96}{4} = 24$$

mientras que en número total de coloraciones, $\#(F)$, es $3^4 = 81$.

Podemos ahora tratar de responder una de nuestras preguntas originales: ¿Cuántos collares "distintos" de 10 cuentas pueden hacerse con cuentas de colores amarillo, azul y rojo?. Suponiendo que los collares están puestos sobre una mesa y son indistinguibles si coinciden después de una rotación sobre el plano de la mesa, vemos que en este caso las rotaciones difieren en múltiplos de $\frac{360^o}{10} = 36^o$. Numeramos las cuentas del collar de 1 á 10 en sentido antihorario. El grupo G de permutaciones asociadas a las rotaciones tiene 10 elementos, $n = \#(D) = 10, m = \#(R) = 3$. Debemos estudiar ahora cada permutación por separado para obtener los ciclos correspondientes. Llamando $\pi_1, ..., \pi_{10}$ a las permutaciones correspondientes a las rotaciones antihorarias de $0^o, ..., 324^o$, con un poco de paciencia podemos ver que

$$\begin{aligned}
&\text{ciclos de } \pi_1 = \{(1),(2),(3),(4),(5),(6),(7),(8),(9),(10)\};\\
&\text{ciclos de } \pi_2 = \{(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)\};\\
&\text{ciclos de } \pi_3 = \{(1,3,5,7,9),(2,4,6,8,10)\};\\
&\text{ciclos de } \pi_4 = \{(1,4,7,10,3,6,9,2,5,8)\};\\
&\text{ciclos de } \pi_5 = \{(1,5,9,3,7),(2,6,10,4,8)\};\\
&\text{ciclos de } \pi_6 = \{(1,6),(2,7),(3,8),(4,9),(5,10)\};\\
&\text{ciclos de } \pi_7 = \{(1,7,3,9,5),(2,8,4,10,6)\};\\
&\text{ciclos de } \pi_8 = \{(1,8,5,2,9,6,3,10,7,4)\};\\
&\text{ciclos de } \pi_9 = \{(1,9,7,5,3),(2,10,8,6,4)\};\\
&\text{ciclos de } \pi_{10} = \{(1,10,9,8,7,6,5,4,3,2)\};
\end{aligned}$$

Entonces, en este caso (observar que no todas las variables aparecen en el miembro derecho):

$$P_G(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10}) = \frac{1}{10}(x_1^{10} + x_2^5 + 4x_5^2 + 4x_{10})$$

Por lo tanto, en este caso hay $\#(F) = 3^{10} = 59049$ collares posibles, pero el número de collares indistinguibles por rotaciones en dos dimensiones es

$$\frac{1}{10}(3^{10} + 3^5 + 43^2 + 43) = 5934$$

Obviamente sería muy complicado hacer el análisis de todos los casos posibles como hicimos con el cuadrado!

El teorema de Pólya - El inventario

Todavía nos queda por responder la pregunta: ¿Cuántos collares distintos de 10 cuentas hay que tengan exactamente 2 cuentas amarillas, 3 azules y 5 rojas?

Volviendo al ejemplo más sencillo de los vértices del cuadrado, una pregunta similar sería:

¿Cuántas coloraciones hay que tengan 2 vértices blancos y 2 vértices negros, y sean indistinguibles por rotaciones en el plano?. Mirando la Figura 1, vemos que la respuesta en este caso es 2, pero queremos tener un método más general que nos permita obtener la respuesta sin tener que analizar todos los casos posibles.

Vamos a introducir una función *inventario* que, como su nombre lo indica, enumera los objetos que deseamos. Por ejemplo, si en casa tenemos 2 botellas de aceite, 5 de gaseosas y 3 de vino, una forma de escribir este inventario de botellas sería $2a + 5g + 3v$. De esta forma, conociendo este polinomio en las variables a, g y v, podemos saber, mirando los coeficientes, cuántos objetos hay de cada tipo. Para adaptar esta idea de inventario a nuestro caso, escribimos el inventario como un polinomio que en vez de tener a, g y v como variables, tiene las variables (por llamarlas de algún modo) $y_1, y_2, ..., y_m$, una por cada elemento de R (una por color). Así, el inventario de colores en el caso de los vértices del cuadrado que se pintan de blanco o negro, pensando que y_1 representa el blanco y y_2 el color negro, es $y_1 + y_2$.

Para formar el inventario de configuraciones indistinguibles, es conveniente para nuestros propósitos asignar el *producto* de variables y_i. Por ejemplo, en el caso del cuadrado con 2 colores, el inventario de configuraciones indistinguibles (según las permutaciones dadas) será, a partir de la Figura 1,

$$y_1^4 + y_1^3 y_2 + 2y_1^2 y_2^2 + y_1^1 y_2^3 + y_2^4$$

en donde el coeficiente del término en el que aparece $y_1^i y_2^{n-i}$ es el número de coloraciones indistinguibles en donde hay i elementos de D (los vértices del cuadrado) de color y_1 y $n-i$ elementos de color y_2. Claro que cuando el coeficiente es nulo, en general no escribimos el término correspondiente.

Pero nos gustaría obtener el inventario de configuraciones indistinguibles a partir del inventario de colores para casos generales, sin tener que recurrir a la construcción de una lista exhaustiva como la de la Figura 1.

Una forma de pensar estas funciones inventarios, es que los $y_i's$ o los productos de $y_i's$ representan "pesos" o "costos" que adjudicamos a cada color o configuración deseada. Así, el "peso" del "color" $r \in R$ es $p(r) = y_r$. Por otra parte, si $f \in F$ toma el valor (color) r un número j_r de veces, su peso será (con $m = \#(R)$).

$$P(f) = y_1^{j_1} y_2^{j_2} \dots y_m^{j_m}$$

Consideremos ahora dos funciones f y g en F equivalentes, es decir, $g = f \circ \pi$ para algún $\pi \in G$, y tratemos de comparar sus pesos, $P(f)$ y $P(g)$. Veremos que si $g(a) = r$, y $b = \pi(a)$, entonces $f(b) = r$. Puesto que π es biyectiva, la relación $a \leftrightarrow b$ es uno a uno, por lo que si g toma el valor r exactamente j veces, entonces f también toma el valor r exactamente j veces. En otras palabras, $P(f) = P(g)$. De esta forma, vemos que P es constante sobre las clases de equivalencia y tiene sentido definir $P(E)$ cuando E es una clase de equivalencia.

Definimos ahora el inventario de "colores", que denotamos por c:

$$c(y) = c(y_1 y_2, \dots, y_m) = \sum_{r \in R} p(r) = \sum_{r \in R} y_r$$

y el inventario de configuraciones indistinguibles según el grupo de permutaciones G, que denotamos por C :

$$C(y) = C(y_1 y_2, ..., y_m) = \sum_{E \text{ clase de equivalencia}} P(E)$$

Recordando la definición del polinomio de índice de ciclos, P_G, podemos enunciar ya el resultado principal:

Teorema de Pólya:

$$c(y) = P_G(\sum_{r \in R}, y_r, \sum_{r \in R}, y_r^2, \sum_{r \in R} y_r^3, ..., \sum_{r \in R} y_r^n)$$

Antes de ver la demostración, tratemos de entender un poco esta fórmula. En el caso en que cada y_i es 1 (asignamos a cada color el mismo peso), el inventario de colores,

$$\sum_{r \in R}, y_r,$$

se reduce a m. Claro que también en este caso

$$\sum_{r \in R} y_r = \sum_{r \in R} y_r^2 = \sum_{r \in R} y_r^3 = ... = \sum_{r \in R} y_r^n = m$$

y obtenemos la variante del lema de Burnside que ya conocemos:

$$N = \frac{1}{\#(G)} \sum_{\pi \in G} \psi(\pi) = P_G(m, m, ..., m)$$

Veamos cómo funcionaría la fórmula de Pólya con los ejemplos que vimos. En el caso del cuadrado, según ya sabemos,

$$P_G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{4}(x_1^4 + x_4^1 + x_2^2 + x_4^1) = \frac{1}{4}(x_1^4 + x_2^2 + 2x_4)$$

por lo que el inventario de configuraciones según la fórmula es

$$C(y) = (\frac{1}{4}((y_1 + y_2)^4 + (y_1^2 + y_2^2)^2 + 2(y_1^4 + y_2^4))$$

Expandiendo y simplificando obtenemos la expresión del inventario que ya vimos al principio de la sección:

$$C(y) = y_1^4 + y_1^3y_2 + 2y_1^2y_2^2 + y_1y_2^3 + y_2^4$$

Mirando ahora al problema de los collares de 10 cuentas y 3 colores, como sabemos.

$$P_G(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}) = \frac{1}{10}(x_1^{10} + x_2^5 + 4x_5^2 + 4x_{10})$$

El inventario de configuraciones indistinguibles es, entonces,

$$C(y) = \frac{1}{10}((y_1+y_2+y_3)^{10}+(y_1^2+y_2^2+y_3^2)^5+4(y_1^5+y_2^5+y_3^5)^2+4(y_1^{10}+y_2^{10}+y_2^{10}))$$

Hacer la expansión de esta expresión nos llevaría bastante tiempo, pero si lo que queremos es saber cuántas formas "distintas" hay de colorear 2 cuentas de amarillo, 3 de azul y 5 de rojo, lo que queremos es el coeficiente de $y_1^2y_2^3y_3^5$ en la expansión. El único término que contribuye es el que tiene potencia 10, de modo que hay $\frac{1}{10}\,\frac{10!}{2!\,3!\,5!} = 252$ formas "distintas".

Pasemos ahora a la demostración del teorema, que el lector puede omitir si así lo desea.

Demostración del teorema de Pólya:

Recordemos que estamos tratando de contar las clases de equivalencia de F definidas a partir de las permutaciones en G,

$$C(y) = C(y_1y_2, ..., y_m) = \sum_{E \text{ clase de equivalencia}} P(E)$$

Ya hemos visto una suma similar a la del miembro derecho cuando estudiamos el lema de Burnside, sólo que en ese caso asignamos el peso 1 a cada clase y por lo tanto la suma era N. Modificando lo hecho entonces, tenemos por una parte

$$\sum_{\pi\in G}\sum_{f\in F}\chi(\pi,f)P(f)=\sum_{f\in F}\sum_{\pi\in G}\chi(\pi,f)P(f)=\sum_{f\in F}\#(\{\pi : f\circ\pi=f\})P(f)=$$

$$=\sum_{f\in F}\frac{\#(G)P(f)}{\#(E_f)}=\#(G)\sum_{f\in F}\frac{(f)}{\#(E_f)}=$$

$$\#(G)\sum_{E\text{ clase de equivalencia}}\frac{1}{\#(E)}\sum_{f\in E}P(f)=$$

$$\#(G)\sum_{E\text{ clase de equivalencia}}P(E)$$

Dejando fija la permutación $\pi\in G$ por el momento, si $f\circ\pi=f$ y μ es un ciclo de π, entonces existe $r\in R$ tal que $f(a)=r$ para todo $a\in\mu$. Si μ tiene longitud k_μ,μ contribuye con un factor de $y_r^{k_\mu}$ en $P(f)$. Manteniendo π fija, r recorre todos los valores en R al variar f, de modo que al sumar todas las $f's$ con $f\circ\pi=f$, se suman todos los productos posibles de la forma

$$\prod_{\mu\text{ ciclo de }\pi} y_{r_m}^{k_m}$$

donde k_μ es la longitud del ciclo μ y r_μ toma todos los valores posibles en R. Pero esta suma es lo mismo que

$$\prod_{\mu\text{ ciclo de }\pi}\left(\sum_{r_\mu\in R} y_{r_m}^{k_m}\right)$$

lo que se puede ver al expandir este último producto. A su vez, podemos reagrupar este producto de acuerdo a las longitudes de los ciclos

$$\prod_{i}^{n} \prod_{\mu \text{ ciclo de longitud i}} (\sum_{r \in R} y_r^i)$$

teniendo en cuenta que si para algún i no hay ciclos de esa longitud, el correspondiente producto es 1 (y no 0!). Entonces, recordando que π tiene j_i ciclos de longitud i, este producto de productos es igual a

$$\prod_{i}^{n} (\sum_{r \in R} y_r^i)^{j_i}$$

Para $\pi \in G$ fija este producto es

$$\sum_{f \in F} \chi(\pi, f) P(f) = \sum_{\text{f tales que } f \circ \pi = f} P(f)$$

por lo que recordando la definición del polinomio de índice de ciclos, haciendo variar π obtenemos

$$C(y) = C(y_1 y_2, \ldots, y_m) = \sum_{E \text{ clase de equivalencia}} P(E) =$$

$$\frac{1}{\#(G)} \sum_{\pi \in G} \sum_{f \in F} \chi(\pi, f) P(f) = \frac{1}{\#(G)} \sum_{\pi \in G} \prod_{i}^{n} (\sum_{r \in R} y_r^i)^{j_i} =$$

$$= P_G(\sum_{r \in R} y_r, \sum_{r \in R} y_r^2, \sum_{r \in R} y_r^3, \ldots, \sum_{r \in R} y_r^n)$$

que es el resultado deseado.

Algoritmos computacionales

En general, hay dos dificultades al tratar de resolver problemas donde se puede usar el método de Pólya. Por una parte está la identificación del grupo de permutaciones que está actuando, y por otra, cuando los números que intervienen son un poco más grandes las cuentas pueden ser sumamente complicadas. No hablaremos del primer problema, ya que es un tema bien extenso que depende del enfoque (por ejemplo si geométrico) que se quiera ver. Además, los algoritmos para generar o identificar grupos de permutaciones son un poco extensos como para incluirlos y explicarlos aquí. Sí hablaremos del segundo problema, donde, como puede intuirse, las computadoras pueden ser sumamente útiles, especialmente cuando se utiliza software que permite un tratamiento simbólico.

Aunque es imposible dar un algoritmo que sea sencillo y pueda usarse en todos los casos, presentamos ahora una versión para el software Mathematica. Claro, supondremos que el lector tiene acceso a este software. De no poder hacerlo, en el libro de N. Nijenhuis y H. Wilf ("Combinatorial Algorithms", Academic Press, 1978) se presentan algoritmos en fortran, (perdiendo naturalmente la operatoria simbólica).

En lo que sigue, pondremos tanto entradas como respuestas a Mathematica en `distinto tipo de letra`, resaltando en **negrita** las entradas.

Daremos 6 funciones, **PermutationQ, ToCycles, estructura, indice, burnside** y **polya**. Las 2 últimas son en realidad las que uno usaría para resolver problemas, siendo las 4 primeras "subrutinas" que se usan en **burnside** y **polya.** El lector que quiera usar los algoritmos en la resolución de problemas, debe copiar sólo estas 6 funciones.

Pasemos a la descripción de los algoritmos. En todos ellos pensamos a las permutaciones como funciones, de modo que para representarlas damos una lista donde el i–ésimo elemento de la lista es el valor de la función en i.

Las dos primeras funciones, **PermutacionQ** y **ToCycles**, están tomadas del paquete `DiscreteMathematics 'Combinatorica'` de Mathematica, cuyo autor es S. Skiena.

PermutationQ[p] pregunta si la lista **p** dada es una permutación, ordenando la lista **p** de menor a mayor y después comparándola con la lista { **1,2, ..., n**}, donde n es la longitud (número de elementos) de **p**.

PermutationQ[p_List] := (Sort[p] == Range[Length[p]]);

(**Nota para curiosos:** En otros lenguajes (como Basic o Pascal) hay algoritmos más rápidos (de tiempo $O(n)$), pero no se conocen algoritmos más rápidos que el que presentamos para Mathematica (de tiempo $O(n \quad log(n))$). **Fin de nota**).

Por ejemplo,

PermutationQ[{1,4,2,3}]
```
True
```

PermutationQ[{1,1,1}]
```
False
```

ToCycles[p] devuelve los ciclos de la permutación **p**, construyendo (mediante **Table**) una lista de las órbitas de los elementos, poniendo una señal (**p1** en 0) si el elemento ya ha sido incluido en alguna órbita, para no repetirlo. Finalmente, se sacan de esta lista los ciclos vacíos (iguales á {}) mediante **select**.

```
ToCycles[p_ ?PermutationQ]  :=
  Block[{p1 = p, m, n, cycle, i},
    Select[
      Table[
        m = n p1[[i]];
        cycle = {};
        While[ p1[[n]]  != 0,
          AppendTo[cycle, m = n];
          n = p1[[n]];
          p1[[m]] = 0];
        cycle,
       {i,Length[p]}],
    !SameQ[#,  {}]&]];
```

Por ejemplo, si $n = 7$, una posible permutación es $\{6, 2, , 5, 3, 4, 1, 7\}$:

```
PermutationQ[ {6,2,5,3,4,1,7 }]
True
```

```
ToCycles [ {6,2,5,3,4,1,7 } ]
{{6,  1 },   {2},    {5,  4,   3 },   {7}}
```

Teniendo en cuenta que no nos interesan los ciclos en sí, sino sólo sus longitudes, ahora construimos una lista con estas longitudes a partir de la permutación dada. Primero miramos a las longitudes mediante **Map**, por ejemplo

```
Map[   Length,     {{6,1}, {2}, {5,4,3}, {7}}]]
{2, 1, 3, 1}
```

Después contamos cuántas veces aparecen los números $1, ..., n$, mediante **Count**. En el ejemplo anterior hay 2 ciclos de longitud 1 y ninguno de longitud 4:

```
Count [{2,1,3,1},    1]
2

Count [{2,1,3,1},    4]
0
```

Hacemos esto para todos el conjunto {**1, ..., n** } de una vez mediante un **Map** sobre el conjunto **Range[n]**, usando una función pura (el corchete terminado en &), que toma como primer argumento las longitudes de los ciclos que encontramos, y como segundo argumento el respectivo número en {**1, ..., n** }. De esta forma obtenemos los exponentes que en la estructura de diclos hemos llamado $j_1, ..., j_n$ (recordemos que en este ejemplo $n = 7$):

```
Map[   Count[{ 2,1,3,1}, # ] &,      {1,2,3,4,5,6,7}]
{2,1,1,0,0,0,0}
```

Para fabricar la estructura de ciclos de una permutación necesitamos variables x_i, construir los exponentes y tomar las potencias. Observamos que en Mathematica (y otros paquetes), al elevar un vector con las potencias coordenada a coordenada.
Concretamente:

```
{x,y,z} ^{a,b,c}
  a    b    c
{x, y, z }
```

Entonces el producto de potencias se puede poner como

```
Apply {   Times,    {x,y,z } ^{a,b,c}]
 a  b  c
x  y  z
```

Fabricamos la función **estructura** que produce este resultado para cada permutación y lista de variables, poniendo la condición (mediante / ;) que la permutación y la lista de variables tengan la misma longitud:

```
estructura[p_?PermutaionQ,  x_List] :=
 Module[{j,  longs},
  longs  =  Map[ Length,  ToCycles[p]];
  j  =  Map[  Count[longs,#]&,  Range[  Length[p]  ]];
  Apply[  Times,  x^j  ]]  /;
 (Length[x]  ==  Length[p];
```

Por ejemplo, la permutación {3,2,1} tiene un ciclo de longitud 1 y un ciclo de longitud 2, y su estructura de ciclos en variables x_1, x_2, x_3 es x_1x_2:

```
ToCycles[{3,2,1}]
{{3,  1},  {2}}

estructura [{3,2,1}, {x1,x2,x3}]
x1   x2
```

Estamos ahora en condiciones de construir el polinomio de índice de ciclos. Bastará encontrar la estructura de cada permutación en el grupo (entrado como primer argumento) en las variables dadas (segundo argumento), y después sumar y dividir por la cantidad de elementos en el grupo:

```
indice[g_List, x_List] :=
  Apply[ plus, Map[ estructura[#,x]&, g] ] / Length[g];
```

En el ejemplo de los vértices del cuadrado, el grupo de permutaciones es el grupo cíclico de las permutaciones de 4 elementos:

```
p[1] = {  1,2,3,4};
p[i_] := RotateLeft[ p[i -1], 1];
g = Array[p, 4];
g // ColumnForm
{1, 2, 3, 4}
{2, 3, 4, 1}
{3, 4, 1, 2}
{4, 1, 2, 3}
```

Veamos las descomposiciones en ciclos de los elementos del grupo:

```
Map[ ToCycles, g] // ColumnForm
{{1}, {2}, {3}, {4}}
{{2, 3, 4, 1}}
{{3, 1}, {4, 2}}
{{4, 3, 2, 1}}
```

y obtengamos el polinomio de índices de ciclos:

```
indice[g, {x1,x2,x3,x4}]
  4       2
x1  +  x2  2  x4
---------------
        4
```

Como es molesto escribir la lista de x's cuando la permutación tiene mayor longitud, vamos a poner una variante de **indice** que acepte un símbolo como segundo argumento:

```
indice[g_List, x_Symbol] := indice[g, Array[x, Length[g]]];
```

Entonces

```
indice[g, x]
    4        2
x[1] + x[2] + 2 x[4]
--------------------
         4
```

El resultado del lema de Burnside se obtiene haciendo cada variable x_i igual al número de "colores", pero podemos hacer una construcción más directa recordando que

$\psi(\pi) = \#(\{f \in F : f \circ \pi = f\}) = m^{\text{número de ciclos de } \pi}$

Entonces podemos poner (este algoritmo está en *combinatorica.m,* pero con otro nombre):

```
burnside[g_List, m_Integer] :=
Apply[ plus, Map[(m^Length[ToCycles[#]]&,g] ] / Length[g];
```

Como ya hemos visto, para 2 colores obtenemos 6 configuraciones:

```
burnside[g,2]
6
```

y para el cuadrado con 3 colores tenemos (como ya sabemos)

```
burnside[g,3]
24
```

En el caso del collar con 10 cuentas, el grupo de permutaciones también es cíclico, pero ahora cada permutación tiene 10 elementos:

```
q[1] = Range[10];
q[i_] := RotateLeft[ qq[i-1], 1];
g2 = Array[q, 10];
```

Obtenemos el polinomio de índices de ciclos:

```
indice[g2,x]
     10      5        2
x[1]   + x[2]  +4 x[5]  + 4[10]
-----------------------------
             10
```

En la computadora con la que trabajamos, construir este polinomio de índices tarda menos de 1 segundo!. Ahora obtenemos la cantidad de collares, indistinguibles por rotaciones en el plano, que tienen 10 cuentas y a lo sumo 3 colores distintos:

```
burnside[g2,3]
5934
```

Finalmente, damos la fórmula de Pólya para el inventario de configuraciones indistinguibles. En este caso será conveniente ponr como primer argumento el grupo de permutaciones, como segundo el símbolo genérico para las variables, y como tercero el número de variables ("colores");

```
polya[g_List, y_Symbol, m_Integer] :=
  Block[{c = Array[y,m]}
    indice[g, Array[ Apply[Plus,c^# ]&, Length[ g[[1]] ]]] //
      Expand];
```

Para el caso de los vértices del cuadrado con 2 colores tenemos

```
polya[g,y,2]
```

$$y[1]^4 + y[1]^3\ y[2] + 2\ y[1]^2\ y[2]^2 + y[1]\ y[2]^3 + y[2]^4$$

(recordemos que esto significa que hay una configuración con 4 vértices blancos, 1 con 3 vértices blancos y 1 negro, etc., comparar con la Figura 1).

Calculamos ahora el polinomio correspondiente a los collares de 10 cuentas y 3 colores. No lo escribimos (poniendo ; al final) pues como sabemos tiene 66 términos y ocuparía mucho espacio en la página:

s = polya[g2,y,3];

Ahora podemos calcular la cantidad de collares indistinguibles con exactamente 2 cuentas amarillas, 3 azules y 5 rojas buscando el coeficiente del término con $y_1^2 y_2^3 y_3^5$:

Coefficient[s, y[1]^2 y[2]^3 y[3]^5]

```
252
```

También podemos calcular la cantidad de collares indistinguibles que tienen exactamente 2 cuentas amarillas y las restantes 8 de color azul o rojo. Para ello buscamos todos los términos que tienen el factor y_1^2 :

Coefficient[s, y[1]^ 2]

```
       8          7                6     2             5    3
5 y[2]  + 36 y[2]  y[3] + 128 y[2]  y[3]  +  252 y[2]  y[3]  +
              4    4           3    5           2    6              7
  318 y[2]  y[3]  +  252 y[2]  y[3]  + 128 y[2]  y[3]  + 36 y[2] y[3]  +
         8
  5 y[3]
```

lo que nos dice que entre las configuraciones indistinguibles con exactamente 2 cuentas amarillas, hay 5 con 8 cuentas azules y 1 roja, 128 con 6 azules y 2 rojas, etc. Si sólo nos interesa el número total, podemos sustituir y_2 y y_3 por 1 en la expresión anterior

Coefficient[s, y[1]^2] /. {y[2] → 1, [3] → 1}

```
1160
```

Por supuesto, poniendo todas las variables y's en 1 en el polinomio, obtenemos el mismo resultado que **burnside:**

```
s /. y[_] → 1
5934
```

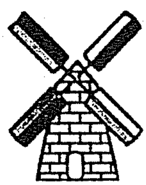
Terminamos este artículo proponiendo algunos problemas para el lector.

Problemas.

1. ¿De cuántas maneras "distintas" se pueden pintar de blanco y negro los vértices de un cuadrado, si se permiten movimientos en 3 dimensiones?

2. ¿Cuántos collares de 10 cuentas "distintos" hay, si las cuentas se pueden elegir de amarillo, azul o rojo, y se permiten movimientos en 3 dimensiones?. ¿Cuántos de ellos tienen exactamente 3 cuentas rojas?

3. En aquel remoto país, tenían la curiosa costumbre de pintar, en cada una de las 4 aspas de los molinos, dos franjas longitudinales de distinto color por delante, eligiendo entre amarillo, azul y rojo, pero por detrás las pintaban completamente de negro.



Era un día de sol resplandeciente y las aspas de los molinos giraban tranquilamente bajo la suave brisa cumpliendo su misión, cuando don Quijote llegó a la cima de la colina y se encontró con la miríada de molinos que lo enfrentaba. "Ay!", se quijó don Quijote, quien por otra parte contaba rápidamente y conocía las costumbres de aquel país, "¡estos molinos tienen pintadas las aspas en todas las combinaciones posibles!". Y, sin resignarse completamente a su destino de atacar todos los molinos que veía, decidió atacar sólo a un molino de cada coloración.

a) ¿A cuántos molinos intentó atacar don Quijote?.

b) ¿Y si las franjas estuvieran pintadas transversalmente (como en el país vecino?

c) ¿Y si las aspas pudieran tener franjas del mismo color?

4. ¿De cuántas maneras "distintas" se pueden pintar las caras de un tetraedro regular, si se dispone de 4 colores (amarillo, azul, rojo y verde) y se permiten movimientos en 3 dimensiones? ¿Cuántas de estas formas tienen exactamente una cara amarilla y una azul?. Repetir para el caso de un cubo y de una pirámide con base cuadrada y caras que son triángulos equiláteros. Repetir para los tres cuerpos, cambiando "caras" por "aristas".

5. La función ϕ de Euler se define como $\phi(n) =$ número de enteros positivos menores que n y coprimos con n (incluyendo 1). Usando ϕ y sumando sobre todos los divisores de n (incluyéndolo), encontrar una expresión para el número de collars indistinguibles por movimientos en 2 dimensiones que tienen n cuentas de m colores. *(Ayuda*: En el medio se debe llegar a una fórmula del estilo $P_G(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{p} \sum_{k|n} \phi(k) x_k^{p|k}$).

Universidad Nacional del Litoral y Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas.