Unidades de medida

Norberto A. Fava(*) , *Ursula Molter*(*)

Introducción. La teoría de la medida experimentó un progreso espectacular cuando, a principios del presente siglo, los matemáticos franceses Camile Jordan, Emile Borel y Henri Lebesgue advirtieron que la *longitud*, el *área* y el *volumen* eran un *problema* que valía la pena **definir con claridad, resolver y generalizar.**

En esta nota nos proponemos **pensar** en la medida desde un punto de vista teórico, de carácter elemental, que tenga en cuenta la práctica y las aplicaciones a la Física.

1. Longitud.

Como es sabido, el *problema de la longitud* consiste en asignar a cada segmento S un número no negativo $\lambda(S)$. llamado *longitud de* S, de modo tal que se cumplan las siguientes propiedades:

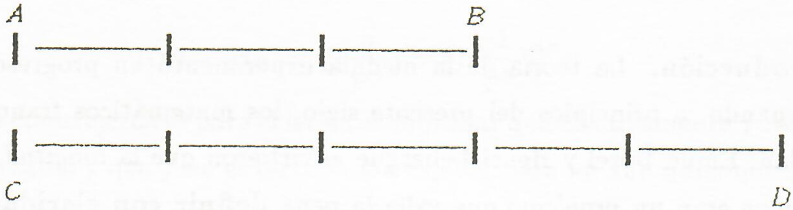
1a) Segmentos congruentes tienen la misma longitud; es decir, si $S_1 \equiv S_2$, entonces $\lambda(S_1) = \lambda(S_2)$.

2a) Si S_1 y S_2 son segmentos consecutivos sobre una recta, entonces $\lambda(S_1 \cup S_2) = \lambda(S_1) + \lambda(S_2)$.

Se tiene entonces el siguiente teorema:

Teorema. *Dados un segmento* AB *(con* $A \neq B$*) y un número* $u > 0$*. existe una única función* λ *que satisface las propiedades anteriores y verifica* $\lambda(AB) = u$.

El segmento AB es el **patrón de comparación** que permite expresar la longitud de cualquier segmento en forma a veces sencilla, como en el siguiente ejemplo que intercalamos sólo para ilustrar:



Si $u = \lambda(AB)$, entonces tendremos $\lambda(CD) = 5(u/3) = \dfrac{5}{3}u$.

Cualquier segmento MN tiene una longitud $\lambda(MN) = \rho u$.

El número ρ, que puede ser irracional, es la **medida** de MN con respecto al segmento AB.

El valor de u (un número positivo) no necesita ser especificado y todas las longitudes se expresan en términos de él.

En esta interpretación, medir un segmento significa determinar (en forma exacta o aproximada) el coeficiente ρ de una función lineal.

El segmento AB es la *unidad de medida*, y sólo sería la unidad de longitud si se eligiera $u = 1$, lo que se hace con frecuencia en los textos de Matemática para simplificar la expresión de las cantidades geométricas.

En realidad, la unidad de longitud *no puede determinarse sin especificar el valor de u,* cosa que no haremos.

En la práctica se elige un nombre y un símbolo para designar la longitud de un segmento que todos conocemos y sobre el que nos hemos puesto de acuerdo. La referencia a unas unidades concretas es insoslayable en las aplicaciones.

Ejemplo: Si AB es el metro patrón que se conserva en la oficina de pesas y medidas de Sévres, llamando m a su longitud, *un número positivo cualquiera*, todas las distancias se expresan en términos del número m, o como se dice habitualmente, "en metros". Así,

$$3m, \qquad 1.62\,m, \qquad 360\,m, \qquad \sqrt{2}\,m$$

expresan las longitudes de ciertos segmentos fácilmente construibles.

2. Area.

En forma simplificada, el *problema del área* consiste en asignar a cada figura plana F un número no negativo $\phi(F)$, llamado *área de* F, de modo que se cumplan las siguientes propiedades:

1a) Si F_1 y F_2 son figuras congruentes, entonces

$$\phi(F_1) = \phi(F_2).$$

2a) Si F_1 y F_2 son figuras disjuntas, entonces

$$\phi(F_1 \cup F_2) = \phi(F_1) + \phi(F_2).$$

Llamando Q a un cuadrado que tenga como lado el segmento AB del párrafo anterior, al que hemos atribuido la longitud $u = \lambda(AB)$, podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema. *Para cualquier número $C > 0$, existe una única función ϕ que satisface las propiedades anteriores y verifica $\phi(Q) = C$.*

El área de un rectángulo R cuyos lados tienen longitudes $a = \alpha u$ y $b = \beta u$ será entonces $\phi(R) = C\alpha\beta$.

Sugerencia: suponer primero que α y β son números racionales.

Eligiendo $C = u^2$, donde $u = \lambda(AB)$, tendremos $\phi(R) = \alpha\beta u^2 = ab$.

Notemos que en tal caso, *el área de un rectángulo es el producto de las longitudes de sus lados.*

Para que la última afirmación sea correcta es **crucial** la elección de C.

Cada figura F tiene un área $\phi(F) = \rho u^2$. El número ρ es la *medida* de F con respecto al *cuadrado unitario* Q, cuya área es u^2.

Hay que destacar que en esta interpretación $u^2 = u.u$ no es un mero símbolo, sino *el cuadrado del número u.*

Ejemplos

1. La longitud de un pie (f) está dada por la función lineal

$$f = 0.3048\, m$$

Luego, un pie cuadrado se expresa en metros cuadrados así:

$$f^2 = (0.3048m)^2 = (0.3048)^2 m^2 = 0.0929m^2.$$

2. En la Física se presentan unidades compuestas, que se expresan como producto o cociente de unidades "heterogéneas", porque miden magnitudes de naturaleza diferente, como longitud y tiempo. Así,

$$30\frac{km}{h} = 30\frac{1000\, m}{3600\, s} = 8.33\frac{m}{s}$$

Con nuestra interpretación, los símbolos s y h son los números positivos *arbitrarios* que asignamos a la duración de ciertos intervalos temporales; sólo que entre ambos existe la relación lineal

$$h = 3600\, s.$$

En la medida del tiempo, la duración de un intervalo juega un papel análogo al de la longitud de un segmento.

Los símbolos de unidades en que se expresan todas las cantidades de una misma magnitud geométrica o física son variables reales positivas *entre las* *cuales existen ciertas relaciones lineales (exactas o aproximadas) que se establecen por definición, por medición o por cálculo.*

3. *Problema del trapecista.* ¿Desde qué altura hay que caer para alcanzar, al chocar contra el piso, una velocidad igual a la del ejemplo anterior?

$$h = \frac{v^2}{2\,g} = \frac{[8.33\ \frac{m}{s}]^2}{2 \times 9.8\ \frac{m}{s^2}} = 3.54.\frac{m^2}{s^2}.\frac{s^2}{m} = 3.54\ m$$

4. *(variante del anterior)* ¿qué velocidad alcanza al chocar contra el piso un objeto pesado que cae de una altura de $10m$?

$$v = \sqrt{2\,g\,h} = \sqrt{2 \times 9.8\ \frac{m}{s^2} \times 10\ m} = 14\sqrt{m^2/s^2} = 14\ m/s.$$

5. Sabiendo que la presión atmosférica normal (at) corresponde a una columna de 76 **cm de** mercurio, cuyo peso específico es $\rho = 13.6\ gr/cm^3$, calcular el valor de **at** y expresarlo en hectopascales (hPa), teniendo en cuenta las relaciones:

$$hPa = 100\ Pa = 100\ \frac{Newton}{m^2}, \qquad kgr = 1000\ gr = 9.8\ Newton.$$

Resumiendo: *Las unidades de las distintas magnitudes son susceptibles de una interpretación que justifica operar con ellas utilizando las leyes del Algebra.*

Bibliografía

H. Lebesgue, *La mesure des grandeurs* (nueva edición), Blanchard, París, 1975.

(*)Departamento de Matemática - Facultad de Ciencias Exactas.
Universidad de Buenos Aires.
Güemes 3931 - (1425) Capital Federal.