Principio de Inducción

María Isabel Viggiani Rocha - Gabriela Paola Ovando

Supongamos tener 1.000.000 de lamparitas eléctricas alineadas de tal forma que al encenderse una de ellas se enciende la siguiente. En un momento dado queremos saber si todas las lamparitas están encendidas. La verificación directa sería bastante trabajosa, pero el lector ya habrá encontrado otra forma de resolver el problema. Dirá: "Basta con observar si la primera lamparita está encendida". Investiguemos ahora, en nuestro razonamiento, cuáles han sido las hipótesis que nos han permitido asegurar que todas las lamparitas están encendidas.

1) Sabemos que la primera lamparita está encendida,

2) sabemos que si una lamparita está encendida, también está encendida la siguiente.

Para generalizar este razonamiento a otros casos similares, numeremos las lamparitas de 1 en adelante y asociemos a cada número n una proposición que abreviaremos $P(n)$ y dice lo siguiente: "la lamparita n está encendida". La proposición $P(n)$ puede ser, evidentemente, verdadera o falsa.

Con estas convenciones, y teniendo en cuenta que el siguiente de un número natural se obtiene sumando 1 a ese número (el siguiente de n es $n+1$), las hipótesis anteriores se expresan

1) Sabemos que $P(1)$ es verdadera,

2) para cualquier n sabemos que si $P(n)$ es verdadera,entonces $P(n+1)$ es verdadera.

La conclusión, es decir, que todas las lamparitas están encendidas se expresa: "la proposición $P(n)$ es verdadera para todo n".

La posibilidad de obtener tal conclusión a partir de las hipótesis 1) y 2) es una propiedad intrínseca de los números naturales que puede aplicarse a toda situación similar a la dada. El número de lamparitas que dimos como dato al principio, no desempeña ningún papel en este razonamiento, puede aumentarse tanto como se quiera. Con este ejemplo el lector habrá captado el soporte intuitivo del "principio de inducción", que damos a continuación.

Principio de Inducción

Sea $P(n)$ una proposición asociada a todo número natural n. Si se cumple:

1) la proposición $P(1)$ es verdadera,

2) si la proposición $P(n)$ es verdadera, entonces también lo es $P(n+1)$ para cualquier n,

Entonces $P(n)$ es verdadera para cualquier número natural n.

Demostración:

Definamos $S = \{n/P(n) \ \textit{es verdadera}\}$. Queremos probar que $S = \mathbb{N}$. Notemos que

(i) $1 \in S$

(ii) Si $n \in S$ entonces $(n+1) \in S$

Sea $T = \mathbb{N} - S$. Es suficiente probar que $T = \emptyset$. Supongamos que $T \neq \emptyset$. Entonces T contiene un menor elemento m . Por hipótesis $m \neq 1$ y entonces $m \geq 2$. Pero como $0 < 1$, $0 < m - 1 < m$. Como m es el menor elemento de

La existencia de este elemento mínimo es consecuencia del principio de buena ordenación en los números naturales: " todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$, tiene menor elemento".

T, se sigue que $m-1 \in S$. Pero entonces, por hipótesis

$$(m-1)+1=m$$

pertenece a S, lo cual es un absurdo.

La validez de este principio es una de las propiedades fundamentales de los números naturales. Consideremos otras formas alternativas al Principio de Inducción:

a) Sea $P(n)$ tal que

a1) $P(p)$ es verdadera

a2) $\forall\, k \geq p$ si $P(k)$ es verdadera entonces $P(k+1)$ es verdadera

Entonces $P(n)$ es verdadera cualquiera sea $n \geq p$

b) Sea $P(n)$ tal que

b1) $P(1)$ es verdadera

b2) $\forall\, k \in \mathbb{N}$ si $P(m)$ es verdadera $\forall \ m \leq k$, entonces $P(k+1)$ es verdadera.

Entonces $P(n)$ es verdadera $\forall\, n \in \mathbb{N}$. A esta forma se la suele denominar ¿Principio de Inducción Completa?'.

Estudiemos a continuación algunos ejemplos

I) Sea $P(n)$:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Observemos que $P(1)$ es verdadera pues $1 = \frac{1.2}{2}$

Supongamos $P(k)$ verdadera (es decir $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$), debemos probar que $P(k+1)$ es verdadera

$\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^{k} i + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + k+1 = (k+1)(\frac{k}{2}+\frac{2}{2}) = (k+1)\frac{(k+2)}{2}$

Por lo tanto $P(n)$ es verdadera $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

El lector puede probar

$a)$ $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Esta fórmula puede deducirse como sigue. Empezamos con la fórmula

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

Escribiendo esta fórmula para $k = 1, ..., n$ y sumando obtenemos:

$$\begin{aligned}
2^3 - 1^3 &= 3.1^3 + 3.1 + 1 \\
3^3 - 2^3 &= 3.2^2 + 3.2 + 1 \\
&\vdots \\
(n+1)^3 - n^3 &= 3.n^2 + 3.n + 1 \\
(n+1)^3 - 1 &= 3(1^2 + ... + n^2) + 3(1 + ... + n) + n
\end{aligned}$$

Así podemos encontrar $\sum_{k=1}^{n} k^2$ si ya conocemos $\sum_{k=1}^{n} k$ .Este método puede utilizarse para hallar las fórmulas $b)$ y $c)$; $d)$ y $e)$ quedan como ejercicio.

$b)$ $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$c)$ $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

$d)$ $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$

$e)$Encontrar una fórmula para: $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + ... + \frac{n}{(n+1)!}$

II) Si m es impar entonces m es de la forma $2s+1$ con $s \in \mathbb{Z}$. Afirmación;

$$m^n \; es \; impar$$

$P(n)$ es la proposición "m^n es impar"

$P(1)$ es verdadera pues m es impar

Supongamos válido $P(k)$, veamos $P(k+1)$

$$\begin{aligned} m^{k+1} = m^k m &= (2t+1)(2r+1) \\ &= 4tr + 2t + 2r + 1 = 2(2tr + t + r) + 1 \end{aligned}$$

III) Probemos

a) $6^{n+2} + 7^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ es divisible por 43

b) 8 divide a $3^n + 7^n + 6$, $n \in \mathbb{N}$

c) 73 divide a $8^{n+2} + 9^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$

Veamos a). Sea $P(n)$ la proposición "$6^{n+2} + 7^{2n+1}$ es divisible por 43"
$P(1)$ es verdadera, en efecto $6^3 + 7^3 = 216 + 343 = 559 = 43.13$
Supongamos $P(k)$ verdadera, es decir $6^{k+2} + 7^{2k+1} = 43.s\ \ con\, s \in \mathbb{Z}$.
Probemos $P(k+1)$

$$\begin{aligned} 6^{(k+1)+2} + 7^{2(k+1)+1} &= 6^{(k+2)+1} + 7^{(2k+1)+2} \\ &= 6^{k+2}6 + 7^{2k+1}49 \\ &= 6^{k+2}6 + 7^{2k+1}(6+43) \\ &= 6(6^{k+2} + 7^{2k+1}) + 43.7^{2k+1} \\ &= 6.43.s + 43.7^{2k+1} = 43(6s + 7^{2k+1}) \quad s \in \mathrm{N} \end{aligned}$$

Verificamos que la proposición es verdadera. b) y c) se dejan como ejercicio.

IV) Mostremos que para $n \in \mathbb{N} \quad x \in \mathbb{R} \ \ x \geq -1$, tenemos

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Si $n = 1$, $1 + x \geq 1 + x$
Si $n = k$, asumimos que $(1+x)^k \geq 1 + kx$, demostremos para $n = k+1$
$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1+kx+x+kx^2 \geq 1+(k+1)x$

Con lo cual concluimos la demostración.

V) Probemos que

$$3^n > 2^n + 64 \quad , n \geq 4$$

Si $n = 4$ tenemos $2^4 + 64 = 80 < 81 = 3^4$

Supongamos que la proposición es verdadera para $k > 4$, probémosla para $k + 1$

$3^{k+1} = 3.3^k > 3(2^k + 64) > 2(2^k + 64) = 2^{k+1} + 128 > 2^{k+1} + 64$

Con lo que concluimos la prueba.

VI) Mostraremos que n rectas en el plano, las cuales no son paralelas dos a dos, y tres de ellas no se intersecan en un mismo punto dividen el plano en $\frac{(n^2+n+2)}{2}$ regiones.

Una recta divide al plano en dos regiones, llamadas semiplanos (axioma de división del plano).

Supongamos que k rectas dividan al plano en $\frac{(k^2+k+2)}{2}$ regiones. La $(k+1)$-ésima recta deberá cortar a las k anteriores en k diferentes puntos y, por lo tanto aumentará en $(k + 1)$ el número de regiones existentes (Verifique esto). Es decir

$$\begin{aligned} \frac{k^2+k+2}{2} + (k+1) &= \frac{k^2+k+2+2k+2}{2} \\ &= \frac{k^2+k+2+1+2k+1}{2} \\ &= \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2} \end{aligned}$$

VII) (*)

$$(\cos x + \cos 2x + ... + \cos nx) sen\frac{x}{2} = \cos(\frac{x(n+1)}{2}) sen(\frac{nx}{2})$$

Recordemos:

$sen(-x) = -senx; \quad sen\alpha - sen\beta = 2sen\frac{\alpha-\beta}{2} \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$sen\alpha.\cos\beta = \frac{1}{2}sen(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}sen(\alpha+\beta)$

Probaremos (*) por inducción en n.

Si $n = 1 \qquad \cos x sen\frac{x}{2} = \cos\frac{2x}{2}sen\frac{x}{2}$

Supongamos que la proposición es verdadera para $n = k$. Probemos para $k+1$:

$(\cos x + ... + \cos kx + \cos[(k+1)x])sen\frac{x}{2} =$

$$\begin{aligned}
&= (\cos x + ... + \cos kx)sen\tfrac{x}{2} + \cos[(k+1)x]sen\tfrac{x}{2} \\
&= \cos\tfrac{(k+1)x}{2}sen\tfrac{kx}{2} + \cos[(k+1)x]sen\tfrac{x}{2} \\
&= \tfrac{1}{2}(sen\tfrac{-x}{2} + sen\tfrac{(2k+1)x}{2} + sen(-\tfrac{(2k+1)x}{2}) + \\
&+ sen\tfrac{(2k+3)x}{2}) \\
&= \tfrac{1}{2}(sen\tfrac{(2k+3)x}{2} - sen\tfrac{x}{2}) \\
&= sen\tfrac{(2k+2)x}{4}\cos\tfrac{(2k+4)x}{4} \\
&= sen\tfrac{(k+1)x}{2}\cos\tfrac{(k+2)x}{2}
\end{aligned}$$

VIII) La sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, a_3, ...$ se define como sigue

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 1$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\ , n \geq 3$$

Esta sucesión, cuyos primeros términos son $1, 1, 2, 3, 5, 8, ...$ fue descubierta por Fibonacci (1175-1250 aproximadamente) en relación con un problema de conejos. Fibonacci supuso que de cada pareja de conejos, a partir del segundo mes de vida nacía una nueva pareja cada mes. Partiendo de una pareja inicial, sea a_n el número de parejas nacidas al cabo de los primeros n- meses. En el mes n-ésimo mes tendremos las a_{n-2} parejas correspondientes al mes $n-2$, mas las $n-2$ que nacerán de estas, más $a_{n-1} - a_{n-2}$, que no aportarán nuevas ya que todavía son muy jóvenes. En total en el n-ésimo mes tendremos

$$a_n = a_{n-2} + (a_{n-1} - a_{n-2}) + a_{n-2} = a_{n-2} + a_{n-1} \quad \text{parejas}$$

Vamos a demostrar que

$$a_n = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}$$

Si $n = 1$ ó $n = 2$ tenemos

$$\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})] = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1 = a_1$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2] = \frac{1}{\sqrt{5}}[\frac{4\sqrt{5}}{4}] = 1 = a_2$$

Sea $n \geq 2$ y supongamos el resultado válido para $k < n$, veamos para $k = n$

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{5}}[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1} - (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1} + (\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-2} - (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-2}] \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{5}}[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-2})(\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}) - (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}^{n-2})(\tfrac{3-\sqrt{5}}{2})] \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{5}}[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-2}(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^2 - (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-2}(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^2] \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{5}}[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n]
\end{aligned}$$

Observemos que en este ejemplo es necesario hacer uso de la hipótesis inductiva para $k \leq n$.Veamos otro ejemplo de la misma situación.

IX) Sea $f : I\!N \rightarrow I\!N$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ 3n+1, & \text{si } n \text{ es de la forma } 4k+1 \text{ con } k \in \mathbb{N}_0 \\ 3n-1, & \text{si } n \text{ es de la forma } 4k-1 \text{ con } k \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Calculemos por ejemplo $f^4(3)$ y $f^8(7)$. Tenemos respectivamente

$$3 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$$

$$7 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$$

Más generalmente afirmamos que la aplicación reiterada de f a cualquier n conduce a 1, al cabo de un número m de pasos (m dependiendo de n).

En efecto, si $n = 1$, tenemos $f(1) = 4, f^2(1) = 2, f^3(1) = 1$.

Supongamos $P(k)$ verdadera para todo $k < n$ y probemos que es cierta para n. Si n es par, entonces $f(n) = \frac{n}{2} < k$; por lo tanto reiterando la aplicación de f se llega a 1. Sea, pues $n = 4s+1$. Se tiene que $f(n) = 3(4s+1)+1 = 12s+4$; $f^2(n) = 6s + 2$; $f^3(n) = 3s + 1$. Si $3s + 1 < 4s + 1 = n$, es posible aplicar la hipótesis inductiva y concluir que la aplicación reiterada de f a $3s + 1$ conduce a 1. Queda la posibilidad $3s + 1 = 4s + 1$, o sea $s = 0$ y por lo tanto $n = 1$, en cuyo caso la afirmación es claramente válida.

Dejamos como ejercicio la posibilidad $n = 4s - 1$. Considerados todos los casos, concluimos que $P(n)$ es verdadera para todo n.

X) Probemos que la suma de los ángulos de un polígono convexo de n lados es $S_n = 2R(n-2)$,($R = 90^o$). En este caso trabajaremos con el conjunto $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

Para $n = 3$, sabemos que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es $2R = 2R(3-2)$, lo cual dice que la propiedad es cierta.

Supongamos que es cierta para $n \geq 3$, $S_n = 2R(n-2)$ (polígono de n lados). Sea $...LMNPQ...$ un polígono convexo de $n + 1$ lados. Si trazamos la diagonal MP, se obtienen dos polígonos convexos $...LMPQ...$ y MNP; $...LMPQ...$ tiene n lados y por lo tanto $S_n = 2R(n-2)$, MNP es triángulo y $S_3 = 2R$. Luego $S_{n+1} = S_n + S_3 = 2R(n-2) + 2R = 2R(n-2+1) = 2R[(n+1)-2]$,lo que demuestra la validez de la fórmula.

XI) Parece normal que $\sqrt{n}$ tenga que ser irracional siempre que el número natural n no sea cuadrado de otro número natural. Un número natural p se dice que es un número primo si es imposible escribir $p = ab$ para números naturales a y b a no ser que uno de éstos sea p y el otro 1; por convención se considera que 1 no es un número primo. Los primeros números primos son $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$.

El Teorema Fundamental de la Aritmética afirma que

Todo número natural $n \geq 2$ puede escribirse de manera única como producto de números primos, salvo por el orden de los mismos.

Probemos esta afirmación por inducción; supongamos que todo número menor que n pueda expresarse como producto de primos. Si n es primo no hay nada que probar. De lo contrario $n = ab$ con ambos $a > 1$, $b > 1$. Según lo supuesto por hipótesis inductiva, a y b son ambos productos de números primos, con lo que también lo es $n = ab$. Supongamos que existen dos descomposiciones de n como producto de factores primos, o sea $n = p_1^{j_1} p_2^{j_2} ... p_s^{j_s} = q_1^{i_1} q_2^{i_2} ... q_r^{i_r}$ con p_k, q_k primos $p_i \neq p_j, i \neq j$ $i, j = j_1, ..., j_{s-1}$ y $q_k \neq q_l$, $k \neq l$; $k, l = i_1, ..., i_{r-1}$. Usemos inducción para probar la unicidad de la descomposición. Recordemos que si un número primo divide a un producto divide a uno de los factores. Como p_1 divide a n, divide a algún q_t. Por cancelación eliminamos p_1 y q_t. Como $m = \frac{n}{p_1} < n$ y $m = p_1^{j_1-1} p_2^{j_2} ... p_s^{j_s} = q_1^{i_1} q_2^{i_2} ... q_t^{i_t-1} ... q_r^{i_r}$, aplicando ahora hipótesis inductiva, resulta que los factores primos y sus respectivas potencias deben ser iguales, salvo por el orden, y por lo tanto también para n ambas descomposiciones sólo pueden diferir en el orden en que aparecen sus factores.

Volvamos a nuestra inquietud original. Si $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$ entonces $b^2 n = a^2$ con lo cual las respectivas descomposiciones primas de nb^2 y de a^2 deberán coincidir. Ahora bien, cada número primo debe aparecer una cantidad par de veces en la descomposición de a^2 y en la de b^2 y por lo tanto deberá ocurrir lo mismo con la descomposición de n. Esto implica que n es un cuadrado perfecto.

E. Gentile "Notas de Algebra", Editorial Eudeba

XII) Sea $f(n,k)$ el número de formas de seleccionar k objetos de un conjunto de n objetos dispuestos en fila, de modo que dos de ellos no sean consecutivos. Afirmamos que

$$(1) \qquad f(n,k) = \binom{n-k+1}{k}$$

Tenemos las condiciones iniciales $f(n,1) = \binom{n}{1} = n$ y si $n > 1$, $f(n,n) = 0 = \binom{1}{n}$

Sea $1 < k < n$. podemos dividir las selecciones en aquellas que incluyen el primer objeto y aquellas que no.

Las selecciones que incluyen el primer objeto no deben incluir el segundo objeto y son numeradas por $f(n-2, k-1)$.

Las selecciones que no incluyen el primer objeto son enumeradas por $f(n-1, k)$

Por lo tanto tenemos la recurrencia (2) $\quad f(n,k) = f(n-1,k) + f(n-2, k-1)$ (pues las divisiones anteriores producen una partición en el conjunto de selecciones).

Probaremos (1) por inducción. Por hipótesis inductiva,

$$f(n-1,k) = \binom{n-k}{k} \quad ; f(n-2,k-1) = \binom{n-k}{k-1}$$

(2) dice

$$f(n,k) = \binom{n-k}{k} + \binom{n-k}{k-1} = \binom{n-k+1}{k}$$

Para la prueba de la última igualdad recomendamos desarrollar cada uno de los binomios del miembro de la izquierda por sus expresiones factoriales y operar para obtener el miembro de la derecha, con lo cual concluimos la demostración.

XIII) Supongamos un rectángulo y n rectas que pasan por puntos interiores del rectángulo, determinando en él diferentes regiones. Probaremos que podemos bicolorear el mapa, es decir, podemos asignarle a cada una de las regiones, uno de dos colores de manera tal que dos regiones que comparten un segmento tienen colores diferentes.

Una recta divide el rectángulo en dos partes y a cada una de ellas le damos un color .

Por hipótesis inductiva supongamos tener bicoloreadas las regiones determinadas por n rectas. Agreguemos una recta más. Esta nueva recta divide al rectángulo en dos partes A y B. Elijamos una de esas partes y en ella dejamos los colores como estaban, mientras que en la otra cambiamos los colores, da tal forma que cada región tiene ahora el color distinto del que tenía. De esta manera hemos bicoloreado el rectángulo pues, la primera región está bicolorerada; la última recta interseca a m regiones, cada una de las cuales fue dividida en dos. Aquellas partes que están en la primera región A tienen su color original, las otras tienen uno distinto por estar en la otra región B y entonces hasta el momento, logramos que este mapa parcial fuera bicoloreado. Puesto que el mapa original estaba bicoloreado, con el cambio hecho en esta etapa conseguimos bicolorear el nuevo mapa y concluimos la demostración.

APENDICE

Este principio puede ser generalizado en el principio de inducción transfinita, el cual permite trabajar con conjuntos que no sean $\mathbb{N}$. Para la demostración de este principio necesitamos algunas definiciones:

Sea A un conjunto. Una relación de orden en A es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Se llama conjunto (parcialmente) ordenado a un par (A, R), donde A es un conjunto y R una relación de orden en A.

Se dice que $(A, \leq)$ está totalmente ordenado por la relación "$\leq$" si, para todo par a,b de elementos de A, se cumple $a \leq b$ o $b \leq a$.

Sea B un conjunto no vacío de un conjunto $(A, \leq)$ parcialmente ordenado, un elemento $c \in B$ es el menor elemento de B, si $c \leq b$ para todo $b \in B$.

Si todo subconjunto no vacío de $(A, \leq)$ tiene menor elemento, A se dice bien ordenado.

Se puede observar que todo conjunto bien ordenado está totalmente ordenado, pues si a, b son elementos de $(A, \leq)$, luego $\{a, b\}$ es un conjunto no vacío de A y tiene un menor elemento, es decir, $a \leq b$ ó $b \leq a$.

La recíproca no es cierta: no todo conjunto totalmente ordenado es bien ordenado. (Por ejemplo en $\mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in \mathbb{R}: x > 3\}$ no tiene menor elemento).

Teorema - Principio de Inducción Transfinita

Sea B un subconjunto no vacío de un conjunto $(A, \leq)$ bien ordenado tal que para todo $a \in A$

$$\{c \in A / c < a\} \subset B \ \Rightarrow a \in B$$

Entonces $B = A$.

Demostración:

Supongamos que existe $x \in A$ tal que $x \notin B$. Sea $C = A - B$; observemos que C es no vacío y que existe $\tilde{c} \in C$ tal que $\tilde{c} \leq c$ para todo $c \in C$ (primer elemento de C).

Sea $D = \{d \in A \,/\, d < \tilde{c}\}$; entonces $D \subset B$ pues si existiera $z \in D$ (por lo tanto $z < \tilde{c}$) tal que $z \notin B$, (ie $z \in C$), entonces $\tilde{c}$ no sería menor elemento.

Luego, por hipótesis $\tilde{c} \in B$; lo cual es una contradicción.

Este teorema permite el uso del siguiente

Criterio de demostración

Sea $(A, \leq)$ un conjunto bien ordenado y sea $P(x)$ una proposición asociada a cada elemento $x \in A$. Si para todo $x \in A$, se cumple que la validez de P(y), cada vez que $y \in S_x = \{a \in A \ / \ a < x\}$, implica la validez de P(x), entonces la proposición es verdadera para todo $x \in A$.

El principio de Inducción en $\mathbb{N}$ es equivalente al principio de Buena Ordenación.

Principio de Buena Ordenación

Si A es un subconjunto no vacío de los números naturales, entonces A tiene un elemento mínimo.

Demostración:

Supongamos que A no tiene elemento mínimo. Sea B el conjunto de los números naturales n tales que $1, 2, ..., n$ no están ninguno en A. Evidentemente 1 está en B (pues si 1 estuviese en A, entonces A tendría 1 como elemento mínimo). Además si $1, 2, ..., k$ no están en A, entonces $k + 1$ no está en A (de este modo sería el elemento mínimo de A); de manera que $1, 2, ..., k+1$ no están ninguno en A. Esto demuestra que si $k \in B$ entonces $k + 1 \in B$, con lo cual $B = \mathbb{N}$ y por lo tanto $A = \emptyset$.

La otra parte de la equivalencia fue demostrada en el texto del artículo.

Fa.C.E.y T. Universidad Nacional de Tucumán
Fa.M.A.F. Universidad Nacional de Córdoba