Entretenimientos con una moneda en el aire

Leandro R. Cagliero

En numerosas ocasiones nuestra intuición nos indica equivacadamente cómo cierto acontecimiento, que es regido por el puro azar, debe comportarse. Lo que nos proponemos hacer es estudiar a fondo un ejemplo de este fenómeno el cual, además de ser sencillo y mostrararnos cómo la matemática puede brindarnos en algunos casos más información que nuestro propio razonamiento, tendrá una divertida aplicación.

Lanzar una moneda al aire repetidas veces es el juego de azar más simple que existe y, sin embargo, es capaz de engañar nuestra intuición arrojando resultados que a nuestro juicio son "lógicamente" improbables.

Supongamos que tiramos diez, cincuenta, cien o inclusive mil veces la moneda y anotamos con *ceros* y *unos* el resultado de cada uno de los lanzamientos. Podemos inmaginar, si queremos, que éstos representan los colorados y negros de una ruleta durante una noche de casino. Nos interesará saber es si existen o no períodos muy largos de *mala racha*, es decir que salga *uno* o *cero* muchas veces repetidas.

Una menera matemática de plantear el problema sería la siguiente: se elige al azar un número de n cifras formado sólo por *ceros* y *unos*, y se desea saber qué probabilidad hay de que haya más de k *ceros* o *unos* seguidos en dicho número.

Como en la mayoría de los problemas de cálculo de probabilidades, debemos contar el número de casos faborables, para luego dividir éste por el número de casos posibles. En nuestro caso la cantidad de casos posibles son 2^n, mientras que los casos favorables son la cantidad de números binarios de n cifras con por lo menos $k+1$ *ceros* o *unos* seguidos.

Comencemos a resolver nuestro problema intentando como primer paso tomar un caso que nos resulte más simple. Supongamos que la moneda es arrojada diez veces y que k es igual a 1, es decir, calculemos la probabilidad de que se den dos o más repeticiones en diez tiros.

Es fácil verificar que los dos resultados siguientes:

$$(1,0,1,0,1,0,1,0,1,0) \quad (0,1,0,1,0,1,0,1,0,1)$$

son los únicos dos posibles sin dos o más repeticiones, por lo cual, los casos favorables, son $2^{10}-2$ y así la probabilidad buscada es: $\frac{2^{10}-2}{2^{10}} = \frac{1022}{1024} \sim 99.8\%$

Notemos además que el hecho de haber arrojado la moneda sólo diez veces no influyó en absoluto para que solamente hubiera dos casos desfavorables, por lo cual podemos afirmar que si se tira la moneda n veces hay una probabilidad de $\frac{2^n-2}{2^n}$ (es decir casi el 100% cuando n es grande) de que obtengamos por lo menos dos repeticiones.

Nuestro próximo paso sería ver que es lo que sucede si en lugar de pensar $k=1$, lo pensamos igual a dos. Desgraciadamente este caso no resulta ser tan simple como el primero por lo cual será conveniente dar algunas definiciones antes de seguir adelante.

Definición 1: *Sea $\{0,1\}^n$ el conjunto de los 2^n números binarios. Dado que a cada elemento de $\{0,1\}^n$ lo pensaremos como a un número expresado en sistema binario llamaremos dígitos a sus coordenadas, y los enumeraremos de derecha a izquierda. En particular el primer dígito será el que corresponda a las cifra de las unidades (el del extremo derecho).*

Para cada $v \in \{0,1\}^n$ definamos $\|v\|$ = norma del número v = máximo *número de repeticiones que hay en v. (No debemos confundir esta norma con la longitud de un vector).*

Ejemplos:

$$v = (1,1,0,0,0,1) \in \{0,1\}^6; \quad \|v\| = 3$$

$$v = (1,0,1,0,1,0,1,0) \in \{0,1\}^8; \quad \|v\| = 1$$

$$v = (1,1,1,1,1,0,1) \in \{0,1\}^7; \quad \|v\| = 5$$

$$v = (0,0,0,0,0,0) \in \{0,1\}^6; \quad \|v\| = 6$$

Definición 2: *Sea $B(n,k) = \{v \in \{0,1\}^n : \|v\| = k\}$ = al conjunto de todos los números de norma k en $\{0,1\}^n$. Además denotemos con $\#B(n,k)$ a la cantidad de elementos que tiene $B(n,k)$ y en general, si A es un conjunto arbitrario, sea $\#A$ la cantidad de elementos que tiene A.*

Ejemplo: Teniendo en cuenta lo que dijimos anteriormente, sabemos que

$$B(n,1) = \{(1,0,1,0,1,...);(0,1,0,1,0,...)\} \subset \{0,1\}^n \ \forall n$$

y por lo tanto $\#B(n,1) = 2$ cualquiera sea el n.

Haciendo uso de la terminología que acabamos de introducir nuestro problema consiste en calcular la probabilidad de extraer un número de norma mayor que k cada vez que se saca un número al azar del $\{0,1\}^n$. Observemos que los casos favorables serán todos los v que estén en $\cup_{j=k+1}^{n} B(n,k)$, mientras que los desfavorables son los de $\cup_{j=1}^{k} B(n,k)$. Por esta razón nos será útil calcular $\#B(n,k)$.

Pasemos, pues, a calcular $\#B(n,2)$. Para ello cosideremos $n \geq 2$ y dividamos el conjunto $B(n,2)$ en dos subconjuntos disjuntos:

$$\mathcal{R}_1(n) = \{v \in B(n,2) : v = (...,0,1) \text{ o } v = (...,1,0)\}$$

$$\mathcal{R}_2(n) = \{v \in B(n,2) : v = (...,0,1,1) \text{ o } v = (...,1,0,0)\}$$

Sean además $\alpha_1(n) = \#\mathcal{R}_1(n)$ y $\alpha_2(n) = \#\mathcal{R}_2(n)$. Es fácil verificar que $B(n,2) = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ lo cual implica que $\alpha_1(n) + \alpha_2(n) = \#B(n,2)$.

Ejemplos:

$$\mathcal{R}_1(3) = \{(1,1,0);(0,0,1)\} \qquad \alpha_1(3) = 2$$
$$\mathcal{R}_2(3) = \{(0,1,1);(1,0,0)\} \qquad \alpha_2(3) = 2$$

$$\mathcal{R}_1(4) = \{(0,1,1,0);(0,0,1,0);(1,0,0,1);(1,1,0,1)\} \qquad \alpha_1(4) = 4$$
$$\mathcal{R}_2(4) = \{(1,0,1,1);(0,0,1,1);(0,1,0,0);(1,1,0,0)\} \qquad \alpha_2(4) = 4$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1(5) = \{&(0,0,1,1,0);(1,0,1,1,0);(1,0,0,1,0);(1,1,0,1,0);\\ &(1,1,0,0,1);(0,1,0,0,1);(0,1,1,0,1);(0,0,1,0,1)\} \qquad \alpha_1(5) = 8\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\mathcal{R}_2(5) = \{&(1,1,0,1,1);(0,1,0,1,1);(1,0,0,1,1);\\ &(0,0,1,0,0);(1,0,1,0,0);(0,1,1,0,0)\} \qquad \alpha_2(5) = 6\end{aligned}$$

Proposición 1: *Cualquiera sea $n \geq 3$ existen biyecciones entre:*

$$\mathcal{R}_1(n) \longleftrightarrow B(n-1,2)$$
$$\mathcal{R}_2(n) \longleftrightarrow \mathcal{R}_1(n-1) \cup B(n-1,1)$$

y por lo tanto, teniendo en cuenta que $\alpha_1(n) + \alpha_2(n) = \#B(n,2)$, y que $\#B(n,1) = 2$ cualquiera sea n, resulta:

(1) $$\alpha_1(n) = \alpha_1(n-1) + \alpha_2(n-1)$$

(2) $$\alpha_2(n) = \alpha_1(n-1) + 2$$

Prueba: Sea $v \in \mathcal{R}_1(n)$ y sea $\tilde{v} \in \{0,1\}^{n-1}$ el que resulta de borrarle el primer dígito a v. Como v comienza en dos dígitos distintos y tiene norma 2, es claro que $\tilde{v}$ sigue teniendo norma 2 y por lo tanto $\tilde{v} \in B(n-1,2)$. Tenemos entonces una aplicación $\mathcal{R}_1(n) \longrightarrow B(n-1,2)$.

Recíprocamente, si $\tilde{v} \in B(n-1,2)$, agregando un 1 o un 0 según cuál sea el primer dígito de $\tilde{v}$, obtenemos un $v \in \mathcal{R}_1(n)$ y de este modo tenemos la aplicación de $B(n-1,2) \longrightarrow \mathcal{R}_1(n)$, la cual es inversa de la primera.

Observaciones similares a las de recién nos muestran que si tomamos un $v \in \mathcal{R}_2(n)$ y le borramos la primer cifra, el $\tilde{v}$ puede pertenecer tanto a $B(n-1,1)$ como a $\mathcal{R}_1(n-1)$ y así construímos la aplicación $\mathcal{R}_2(n) \longrightarrow B(n-1,1) \cup \mathcal{R}_1(n-1)$.

La inversa de ésta se obtiene agregando un 1 o un 0 convenientemente para obtener un número de $\mathcal{R}_1(n)$ ∎

Corolario 1: *Para todo $n \geq 4$ se cumple que:*

$$\alpha_2(n) = \alpha_2(n-1) + \alpha_2(n-2)$$

Prueba: La ecuación (1) implica que

$$\alpha_1(n-1) - \alpha_1(n-2) = \alpha_2(n-2)$$

mientras que la ecuacion (2) implica que

$$\alpha_2(n) - \alpha_2(n-1) = \alpha_1(n-1) - \alpha_1(n-2)$$

de lo que se deduce: $\alpha_2(n) = \alpha_2(n-1) + \alpha_2(n-2)$ ∎

Construyamos a partir de la recureencia la siguiente tabla completa hasta $n = 10$

$n =$	3	4	5	6	7	8	9	10
$\alpha_1 =$	2	4	8	14	24	40	66	108
$\alpha_2 =$	2	4	6	10	16	26	42	68

En este momento estamos en condiciones de responder la siguiente pregunta: ¿qué probabilidad hay de que obtengamos por lo menos tres repeticiones si tiramos diez veces la moneda al aire?

Respuesta: hay 1024 formas posibles de tirar la moneda al aire diez veces, de las cuales 2 tienen sólo una repetición y $\alpha_1(10) + \alpha_2(10) = 176$ tienen dos repeticiones. Por lo tanto hay $1024 - 176 - 2 = 846$ casos faborables, que dan una probabilidad de 82.62% de que obtengamos tres o más repeticiones.

A esta altura ya podríamos encarar el caso general con n y k arbitrarios. Sin embargo es posible que sea conveniente resolver primero el problema para $k = 3$, pues cuando k es arbitrario se hace de la misma forma, y por lo tanto ver este caso particular, pero más sencillo, nos ayudará entender el caso general.

Como hicimos para $k = 2$ consideremos $n \geq 3$ y dividamos el conjunto $B(n, 3)$, pero ahora en tres subconjuntos disjuntos:

$$\mathcal{S}_1(n) = \{v \in B(n,3) : v = (...,0,1) \text{ o } v = (...,1,0)\}$$

$$\mathcal{S}_2(n) = \{v \in B(n,3) : v = (...,0,1,1) \text{ o } v = (...,1,0,0)\}$$

$$\mathcal{S}_3(n) = \{v \in B(n,3) : v = (...,0,1,1,1) \text{ o } v = (...,1,0,0,0)\}$$

También como antes definamos $\beta_1(n) = \#\mathcal{S}_1(n)$, $\beta_2(n) = \#\mathcal{S}_2(n)$ y $\beta_3(n) = \#\mathcal{S}_3(n)$. Nuevamente resulta $\mathcal{S}_1(n) \cup \mathcal{S}_2(n) \cup \mathcal{S}_3(n) = B(n,3)$ por lo cual $\beta_1(n) + \beta_2(n) + \beta_3(n) = \#B(n,3)$. La siguiente proposición el la análoga a la **Proposición 1**.

Proposición 2: *Cualquiera sea $n \geq 4$ existen biyecciones entre:*

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1(n) &\longleftrightarrow B(n-1,3) \\ \mathcal{S}_2(n) &\longleftrightarrow \mathcal{S}_1(n-1) \\ \mathcal{S}_3(n) &\longleftrightarrow \mathcal{S}_2(n-1) \cup \mathcal{R}_2(n-1) \end{aligned}$$

y por lo tanto resulta:

$$\beta_1(n) = \beta_1(n-1) + \beta_2(n-1) + \beta_3(n-1) \tag{3}$$

$$\beta_2(n) = \beta_1(n-1) \tag{4}$$

$$\beta_3(n) = \beta_2(n-1) + \alpha_2(n-1) \tag{5}$$

Prueba: Como en el caso $k = 2$, las aplicaciones se harán borrando la primer cifra de cada v para obtener el $\tilde{v}$.

Si $v \in \mathcal{S}_1(n)$ entonces $\tilde{v} \in B(n-1,3)$.

Si $v \in \mathcal{S}_2(n)$ entonces no sólo $\tilde{v} \in B(n-1,3)$, sino que más precisamente $\tilde{v} \in \mathcal{S}_1(n-1)$.

Si $v \in \mathcal{S}_3(n)$ entonces hay dos posibilidades: $\tilde{v} \in \mathcal{S}_2(n-1)$, en el caso que $\|\tilde{v}\| = 3$, o sino $\tilde{v} \in \mathcal{R}_2(n-1)$, si $\|\tilde{v}\| = 2$.

En los tres casos las aplicaciones resultan biyectivas, y las inversas se construyen agregando un 1 o un 0 según sea el caso ∎

Corolario 2: *Para todo $n \geq 6$ se cumple que:*

$$\beta_3(n) = \beta_3(n-1) + \beta_3(n-2) + \beta_3(n-3)$$

Prueba: Del mismo modo que hicimos en la prueba del **Corolario 1** haremos uso de de las ecuaciones (3), (4) y (5). Es importante osbervar que en aquel caso aparecía un 2 en las ecuaciones que al restarlas desaparecía mientras que ahora aparece un término α que cuando restemos nos será necesario utilizar explícitamente el **Corolario 1**.

$$\begin{aligned}
\beta_3(n) - \alpha_2(n-1) &= \beta_2(n-1) && \text{por } (5)\\
&= \beta_1(n-2) && \text{por } (4)\\
&= \beta_1(n-3) + \beta_2(n-3) + \beta_3(n-3) && \text{por } (3)\\
&= \beta_2(n-2) + \beta_2(n-3) + \beta_3(n-3) && \text{por } (4)\\
&= \beta_3(n-1) - \alpha_2(n-2) + \\
&\quad\ \beta_3(n-2) - \alpha_2(n-3) + \beta_3(n-3) && \text{por } (5)\\
&= \beta_3(n-1) + \beta_3(n-2) + \beta_3(n-3) - \alpha_2(n-1)
\end{aligned}$$

por el resultado del **Corolario 1**.

De este modo obtenemos que:

$$\beta_3(n) = \beta_3(n-1) + \beta_3(n-2) + \beta_3(n-3) \qquad \blacksquare$$

Usando las ecuaciones (3), (4) y (5) construímos como hicimos en el caso $k = 2$ la tabla hasta $n = 10$:

$n =$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\alpha_2 =$	2	2	4	6	10	16	26	42	68
$\beta_1 =$	0	0	2	4	10	22	46	94	188
$\beta_2 =$	0	0	0	2	4	10	22	46	94
$\beta_3 =$	0	2	2	4	8	14	26	48	88

y respondamos la siguiente pregunta: ¿qué probabilidad hay de que obtengamos por lo menos cuatro repeticiones si tiramos diez vecez la moneda al aire?

Respuesta: los casos posibles son 1024. Habíamos dicho que 2 tienen sólo una repetición y que 176 tienen dos repeticiones. La tabla muestra que hay $88 + 94 + 188 = 370$ con tres repeticiones. Por lo tanto los casos favorables son $1024 - 370 - 176 - 2 = 476$ y así hay una probabilidad de 46.48% de que obtengamos cuatro o más repeticiones.

Ahora el caso general será sólo una repetición de lo que hicimos para $k = 3$ por lo que sólo enunciaremos el teorema sin demostrarlo.

Para ello fijemos un k arbitrario, y para cada $n \geq k$ dividamos el conjunto $B(n,k)$ en los siguientes k subconjuntos disjuntos:

$$\mathcal{T}_1(n,k) = \{v \in B(n,k) : v = (...,0,1) \text{ o } v = (...,1,0)\}$$

$$\mathcal{T}_2(n,k) = \{v \in B(n,k) : v = (...,0,1,1) \text{ o } v = (...,1,0,0)\}$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$\mathcal{T}_k(n,k) = \{v \in B(n,k) : v \text{ comienza con } k \textit{ ceros} \text{ o con } k \textit{ unos}\}$$

y llamemos $\gamma_j(n,k) = \#\mathcal{T}_j(n,k)$. Como siempre, resulta $\cup_{j=1}^{k} \mathcal{T}_j(n,k) = B(n,k)$ y $\sum_{j=1}^{k} \gamma_j(n,k) = \#B(n,k)$. En particular, recordando las definiciones hechas hasta aquí, tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{T}_1(n,2) = \mathcal{R}_1(n) & \gamma_1(n,2) = \alpha_1(n) \\
\mathcal{T}_2(n,2) = \mathcal{R}_2(n) & \gamma_2(n,2) = \alpha_2(n) \\
\mathcal{T}_1(n,3) = \mathcal{S}_1(n) & \gamma_1(n,3) = \beta_1(n) \\
\mathcal{T}_2(n,3) = \mathcal{S}_2(n) & \gamma_2(n,3) = \beta_2(n) \\
\mathcal{T}_3(n,3) = \mathcal{S}_3(n) & \gamma_3(n,3) = \beta_3(n)
\end{array}$$

Teorema 1: *Para todo $n \geq k+1$ se tienen las siguientes biyecciones:*

$$\begin{array}{l}
\mathcal{T}_1(n,k) \longleftrightarrow B(n-1,k) \\
\mathcal{T}_2(n,k) \longleftrightarrow \mathcal{T}_1(n-1,k) \\
\mathcal{T}_3(n,k) \longleftrightarrow \mathcal{T}_2(n-1,k) \\
\ldots \qquad \ldots
\end{array}$$

$$\mathcal{T}_{k-1}(n,k) \longleftrightarrow \mathcal{T}_{k-2}(n-1,k)$$
$$\mathcal{T}_k(n,k) \longleftrightarrow \mathcal{T}_{k-1}(n-1,k) \cup \mathcal{T}_{k-1}(n-1,k-1)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\gamma_1(n,k) &= \textstyle\sum_{j=1}^{k} \gamma_j(n-1,k) \\
\gamma_2(n,k) &= \gamma_1(n-1,k) \\
\ldots \quad & \quad \ldots \\
\gamma_{k-1}(n,k) &= \gamma_{k-2}(n-1,k) \\
\gamma_k(n,k) &= \gamma_{k-1}(n-1,k) + \gamma_{k-1}(n-1,k-1)
\end{aligned}$$

Corolario 3: *Para todo $n \geq 2k$ se cumple:*

$$\gamma_k(n,k) = \gamma_k(n-1,k) + \gamma_k(n-2,k) + \ldots + \gamma_k(n-k,k)$$

Los valores que toma $\gamma_k(n,k)$ son la cantidad de elementos que tiene $\mathcal{T}_k(n,k)$ mientras que lo que a nosotros nos interesa es $\#B(n,k)$ o mejor aún $\# \cup_{j=1}^{k} B(n,j)$ que representaría la cantidad de casos desfavorables. Sin embargo, vereamos que $\gamma_k(n,k)$ está estrechamente ligado con esta cantidad.

Del **teorema 1** podemos deducir que siempre que sea $n \geq 2k$ resulta:

$$\begin{aligned}
\gamma_k(n,k) &= \gamma_{k-1}(n-1,k) + \gamma_{k-1}(n-1,k-1) \\
&= \gamma_{k-2}(n-2,k) + \gamma_{k-1}(n-1,k-1) \\
&= \gamma_{k-3}(n-3,k) + \gamma_{k-1}(n-1,k-1) \\
&= \gamma_1(n-k+1,k) + \gamma_{k-1}(n-1,k-1) \\
&= \#B(n-k,k) + \gamma_{k-1}(n-1,k-1)
\end{aligned}$$

Es decir que tenemos:

$$(6) \qquad \gamma_k(n,k) = \gamma_{k-1}(n-1,k-1) + \#B(n-k,k)$$

Aplicando nuevamente la igualdad (6) a ella misma, y repitiendo este proceso inductivamente queda:

$$\gamma_k(n,k) = \sum_{j=1}^{k} \#B(n-k,j).$$

Resumiendo y haciendo un pequeño cambio de variables obtenemos:

Teorema 2: *Si $n \geq k$ entonces:*

$$\#\{v \in \{0,1\}^n : \|v\| \leq k\} = \gamma_k(n+k,k)$$

$$\#\{v \in \{0,1\}^n : \|v\| = k\} = \gamma_k(n+k,k) - \gamma_{k-1}(n+k-1,k-1)$$

El **Teorema 2** nos refleja la importancia que tiene la sucesión $\gamma_k(n,k)$ para el cálculo de nuestra probabilidad. Por esta razón y para simplificar denotemos con $\xi(n,k) = \gamma_k(n,k)$.

Según el **Teorema 2** la probabilidad de obtener más de k repeticiones tirando una moneda n veces viene dada por $\frac{2^n - \xi(n+k,k)}{2^n}$.

Esto nos motiva a estudiar más es detalle la sucesión $\xi(n,k)$. Por lo pronto el **Corolario 3** nos dice que si fijamos un k arbitrario y tomamos $n \geq 2k$ entonces:

$$(7) \qquad \xi(n,k) = \xi(n-1,k) + \xi(n-2,k) + \ldots.. + \xi(n-k,k)$$

Esta fórmula define por recurrencia a $\xi(n,k)$ para cada k fijo. Si conociéramos $\xi(n,k)$ para $k \leq n \leq 2k-1$ (observar que $\xi(n,k)$ no tiene sentido si $n < k$), podríamos obtener todos los términos de la sucesión. Afortunadamente esto es simple.

Recordemos que

$$\xi(n,k) = \#\{v \in B(n,k) : v \text{ comienza con } k \textit{ ceros} \text{ o con } k \textit{ unos}\}.$$

Notemos que para contar la cantidad de elementos que hay en ese conjunto basta contar los v que terminan en *ceros* y luego multiplicar el resultado por dos.

Ahora notemos que si $n = k$ hay un sólo v que termina en k *ceros*. Lo mismo si $n = k+1$ pues el dígito $k+1$ debe ser necesariamente 1. En el caso $n = k+2$ tendremos dos pues el dígito $k+2$ puede ser 1 o 0; y en general si $n = k+j$ con $j \leq k-1$ tendremos la libertad de dar libremente todos los últimos $j-1$ (notar que si fuera $j \geq k$ no se podrían elegir libremente pues podríamos aumentarle la norma), y en consecuencia hay exactamente 2^{j-1} números terminados en k *ceros*. Multiplicando por dos obtenemos: $\xi(k,k) = 2$, $\xi(k+1,k) = 2$, $\xi(k+2,k) = 2^2$, $\xi(k+3,k) = 2^3$, y así sucesivamente hasta $\xi(2k-1,k) = 2^{k-1}$.

Teorema 3: *Para cada $k \geq 2$ sea $\xi(n,k)$ la sucesión definida por la siguiente recurrencia:*

$$\begin{cases} \xi(k,k) = 2 & \\ \xi(n,k) = 2^{n-k} & \text{para } 2k-1 \geq n \geq k+1 \\ \xi(n,k) = \sum_{j=1}^{k} \xi(n-j,k) & \text{para } n \geq 2k \end{cases}$$

entonces

$$p = \frac{2^n - \xi(n+k,k)}{2^n}$$

es la probabilidad de que obtengamos más de k repeticiones si tiramos la moneda n veces al aire.

El **teorema 3** nos proporciona el método para obtener $\xi(n,k)$ cualesquiera sean n y k. Haciendo uso de él obtenemos una tabla con los valores que toma $\xi(n,k)$ para los $k = 2,3,4,5,6,7$ y n desde en 1 hasta el 60.

Valores que toma $\xi(n,k)$

$\xi(n,k)$ para n entre 1 y 40

	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
1	0	0	0	0	0	0
2	2	0	0	0	0	0
3	2	2	0	0	0	0
4	4	2	2	0	0	0
5	6	4	2	2	0	0
6	10	8	4	2	2	0
7	16	14	8	4	2	2
8	26	26	16	8	4	2
9	42	48	30	16	8	4
10	68	88	58	32	16	8
11	110	162	112	62	32	16
12	178	298	216	122	64	32
13	288	548	416	240	126	64
14	466	1008	802	472	250	128
15	754	1854	1546	928	496	254
16	1220	3410	2980	1824	984	506
17	1974	6272	5744	3586	1952	1008
18	3194	11536	11072	7050	3872	2008
19	5168	21218	21342	13860	7680	4000
20	8362	39026	41138	27248	15234	7968
21	13530	71780	79296	53568	30218	15872
22	21892	132024	152848	105312	59940	31616
23	35422	242830	294624	207038	118896	62978
24	57314	446634	567906	407026	235840	125450
25	92736	821488	1094674	800192	467808	249892
26	150050	1510952	2110052	1573136	927936	497776
27	242786	2779074	4067256	3092704	1840638	991552
28	392836	5111514	7839888	6080096	3651058	1975136
29	635622	9401540	15111870	11953154	7242176	3934400
30	1028458	17292128	29129066	23499282	14365456	7837184
31	1664080	31805182	56148080	46198372	28495072	15611390
32	2692538	58498850	108228904	90823608	56522336	31097330
33	4356618	107596160	208617920	178554512	112116736	61944768
34	7049156	197900192	402123970	351028928	222392834	123391760
35	11405774	363995202	775118874	690104702	441134610	245791968
36	18454930	669491554	1494089668	1356710122	875027044	489608800
37	29860704	1231386948	2879950432	2667221872	1735688632	975283200
38	48315634	2264873704	5551282944	5243620136	3442882192	1942729216
39	78176338	4165752206	10700441918	10308685760	6829242048	3869847042
40	126491972	7662012858	20625764962	20266342592	13546367360	7708596754

$\xi(n,k)$ para n entre 41 y 60

	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
41	204668310	14092638768	39757440256	39842580482	26870341886	15355248740
42	331160282	25920403832	76634930080	78328450842	53299549162	30587105720
43	535828592	47675055458	147718577216	153989679812	105724071280	60928419472
44	866988874	87688098058	284736712514	302735739488	209712453928	121367230144
45	1402817466	161283557348	548847660066	595162793216	415982025664	241759177088
46	2269806340	296646710864	1057937879876	1170059243840	825134809280	481575624960
47	3672623806	545618366270	2039240829672	2300275907198	1636723251200	959281402878
48	5942430146	1003548634482	3930763082128	4522223363554	3246576160514	1910854209002
49	9615053952	1845813711616	7576789451742	8890457047296	6439852771866	3806353169264
50	15557484098	3394980712368	14604731243418	17478178355104	12773981472452	7582119232808
51	25172538050	6244343058466	28151524606960	34361193916992	25338250490976	15103310046144
52	40730022148	11485137482450	54263808384248	67552328590144	50260518956288	30085252862144
53	65902560198	21124461253284	104596853686368	132804381273090	99695903103296	59928746547200
54	106632582346	38853941794200	201616917920994	261086539182626	197755082955392	119375917469440
55	172535142544	71463540529934	388629104598570	513282621317956	392263589750270	237792553536002
56	279167724890	131441943577418	749106684590180	1009087064280808	778087326728674	473674252863002
57	451702867434	241759425901552	1443949560796112	1983812934644624	1543400671984896	943542152556740
58	730870592324	444664910008904	2783302267905856	3900073540699104	3061463093478816	1879502185880672
59	1182573459758	817866279487874	5364987617890718	7667342700125118	6072665668001344	3743901061715200
60	1913444052082	1504290615398330	10341346131182870	15073598861067610	12045635432899390	7457716870568256

Con esta tabla, y sabiendo que $2^{50} = 1.125.899.906.842.624$. podemos calcular por ejemplo la distintas probabilidades de obtener repeticiones cuando se arrojan 50 veces la moneda al aire:

Probabilidad de 3 o más repeticiones en 50 tiros: 99.996%

Probabilidad de 4 o más repeticiones en 50 tiros: 98.124%

Probabilidad de 5 o más repeticiones en 50 tiros: 82.093%

Probabilidad de 6 o más repeticiones en 50 tiros: 54.411%

Probabilidad de 7 o más repeticiones en 50 tiros: 30.892%

Probabilidad de 8 o más repeticiones en 50 tiros: 16.197%

Habíamos dicho al principio que éste era un ejemplo que nos mostraría cómo nuestra intuición a veces no es tan precisa.

Quizás el hecho de que en 50 tiros haya 6 o más repeticiones en más del 50% de los casos no sea suficiente como para sorprendernos. Si éste es el caso veamos que sucede si arrojamos la moneda al aire cien veces:

Probabilidad de 4 o más repeticiones en 100 tiros: 99.972%
Probabilidad de 5 o más repeticiones en 100 tiros: 97.169%
Probabilidad de 6 o más repeticiones en 100 tiros: 80.682%
Probabilidad de 7 o más repeticiones en 100 tiros: 54.234%
Probabilidad de 8 o más repeticiones en 100 tiros: 31.477%
Probabilidad de 9 o más repeticiones en 100 tiros: 16.856%

En este caso 6 o más repeticiones se dan en el 80% de lo casos. Este fenómeno escapa de lo que la mayoría de las personas piensan y para comprobarlo propongámos el siguiente divertido desafío.

Ofrezcamos a un grupo de personas llenar por filas una cuadrícula de 10×10 con los resultados que se obtienen al arrojar 100 veces una moneda al aire. Permitamos además que estas personas decidan ser honestas o tramposas en el sentido de que los honestos deben arrojar efectivamente la moneda las 100 veces, mientras que los tramposos deben llenar la grilla intentando imitar (según lo que su intuición les indique) lo que sucedería si la llenaran con la moneda.

Luego el desafío consiste en que nosotros seamos capaces de adivinar quienes fueron honestos y quienes tramposos simplemente observando los resultados que cada uno obtuvo.

Como es de inmaginar, cuando nos toque distinguir los honestos de los tramposos, unas de las cosas en las que nos podemos fijar es en la cantidad de repeticiones que haya. Por ejemplo una cuadrícula que no tenga ni siquiera 5 repeticiones, es casi seguro que es de un tramposo. Una que no tenga 6 repeticiones es probable que tampoco sea honesta, sin embargo para estar más seguros podríamos rotar la grilla 90^o o lo que es lo mismo, chequear la grilla por columnas en lugar de hacerlo por filas, y considerarla como otra grilla y ver si ésta tiene o no 6 repeticiones. Finalmente otro elemento para analizar es observar si aparecen tiras de la forma *cara-cruz-cara-cruz...* . Observar que debería aparecer alguna tira larga de este tipo debido a que éstas serían tiras de repeticiones si el jugador hubiera anotado lo que efectivamente salía en los tiros pares, y al revés de lo que salía en los impares.

Continuando con nuestro estudio de la sucesión $\xi(n,k)$, otra cosa que podemos observar es el importante aumento que tuvieron cada una de las probabilidades. Por ejemplo la probabilidad de que se den 8 o más repeticiones aumentó de un 16% a un 30%. Cabe entonces preguntarse si a madida que se aumente la cantidad de tiros, también aumentará esta probabilidad indefinidamente hasta llegar a ser casi del 100%.

Concretamente la pregunta es la siguiente: dado un número k arbitrario ¿existe algún n tal que haya más del 95% o inclusive más del 99% de probabilidad de obtener k repeticiones en n tiros de la moneda?

La respuesta es afirmativa y la demostración la dará el próximo teorema. Lo que debemos probar es que dado un k, a medida que el n crece la probabilidad de **no** obtener k repeticiones se acerca a cero, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\xi(n+k,k)}{2^n} = 0.$$

Teorema 4: *Cualquiera sea k se cumple que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\xi(n+k,k)}{2^n} = 0$$

Prueba: Probaremos primero que $\lim_{n\to\infty} \frac{\xi(n+k,k)}{2^n}$ existe. Puesto que siempre es $0 < \xi(n,k)$, basta probar que la sucesión $\{\frac{\xi(n+k,k)}{2^n}\}$ es decreciente. Para ello notemos que $\xi(n+1+k,k) < \xi(n+1+k,k) + \xi(n,k)$. Pero por la igualdad (7):

$$\begin{aligned}
\xi(n+1+k,k)+\xi(n,k) &= \xi(n+k,k)+\ldots+\xi(n+1,k)+\xi(n,k)\\
&= \xi(n+k,k)+\xi(n+k,k)\\
&= 2\xi(n+k,k).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\xi(n+1+k,k)}{2^{n+1}} < \frac{2\xi(n+k,k)}{2^{n+1}} = \frac{\xi(n+k,k)}{2^n}$$

es decir la sucesión $\frac{\xi(n+k,k)}{2^n}$ es decreciente y por lo tanto tiene un límite que llamamos ℓ.

Como $\xi(n+k,k)$ satisface (7) obtenemos:

$$\begin{aligned}
\tfrac{\xi(n+k,k)}{2^n} &= \tfrac{\xi(n-1+k,k)+\ldots+\xi(n-k+k,k)}{2^n}\\
&= \tfrac{1}{2}\tfrac{\xi(n-1+k,k)}{2^{n-1}}+\ldots+\tfrac{1}{2^k}\tfrac{\xi(n-k+k,k)}{2^{n-k}}
\end{aligned}$$

y tomando límite, resulta:

$$\ell = \frac{1}{2}\ell + \frac{1}{2^2}\ell + \ldots + \frac{1}{2^k}\ell$$

con lo cual, si $\ell \neq 0$, resultaría $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^k}$, que no es cierto. Por lo tanto $\ell = 0$ ∎

Quiero agradecer a Daniel Penazzi por haber sugerido esta última prueba, simplificando en gran medida la original.

Facultad de Matemática, Astronomía y Física.
Universidad Nacional de Córdoba.