GENESIS DEL NUMERO ENTERO

Seminario Coordinado por la profesora Dora Alicia Macias

Informe final elaborado por:

Andreoli de Passicot, Daniela
Caputo, Liliana
Esquivel, Mónica
Filcman de Levy, Clara
Ramirez Arballo de Lopez, M. Gloria
Rodriguez de Harvey, Cecilia
Romero, Rodolfo
Silvia Genez, Patricia

1. RESEÑA HISTORICA.

Difícil es indicar el origen de la Aritmética, pues su nacimiento se pierde en medio de la noche de los siglos y su existencia es casi contemporánea a la del hombre sobre la tierra. En el instante mismo en que el hombre tuvo que contar el número de hijos que le rodeaban, el de cabezas que formaban su ganado, o cuando más tarde estableció, por medio del simple trueque, el primer gérmen del comercio con sus semejantes, echó los cimientos de la ciencia llamada Aritmética.

A pesar de su antigüedad la aritmética permaneció largos siglos en las sombras, formando parte de la vida social del hombre pero sin que los sabios dirigieran a ella su mirada, hasta que Pitágoras, por medio de su estudio sobre los números la introdujo en la corriente científica de su tiempo, aunque unida primero a la Geometría.

En los primeros tiempos de la Aritmética la cantidad era simplemente un conjunto de objetos; uno de ellos representaba la unidad y por lo tanto era indivisible. Pasaron muchos siglos antes de que se cambiaran estas ideas y aparecieran las cantidades continuas, cuando los geómetras quisieron medir las líneas, las superficies y los volúmenes.

De las investigaciones de Humbold, Pott y otros resulta como un hecho general y constante la singularidad de que los sistemas de numeración, desde los tiempos primitivos, han sido únicamente el QUINARIO, el DECIMAL y el VIGESIMAL, no casualmente en concordancia con la cantidad de dedos de una mano, dos manos y manos y pies. Desde el momento en que el hombre tuvo conciencia de la numeración, se vió en la necesidad de hacer cálculos con los números. Mientras las cantidades con que había que operar eran pequeñas, la cuestión fue fácil de resolver; pero cuando las cantidades eran grandes, el Hombre debió recurrir a instrumentos auxiliares, y como la escritura no estaba generalizada en estos lejanos tiempos, esos instrumentos fueron materiales.

Nada más expeditivo que contar por los dedos, cuando se trata de pequeñas cantidades. En cantidades mayores se ha sabido del uso de clavos entre los aztecas, cintas con nudos entre los peruanos, etc., pero lo más común fue el uso de simientes y piedrecillas.

Insuficiente el cálculo digital y demasiado grosero el de las simientes, desde muy antiguo (700 a 300 a.C.) se inventaron aparatos de contar correspondientes a la numeración palpable y de posición, y ajustados al sistema decimal.

Estos aparatos reciben el nombre de ABACOS de numeración. La palabra ábaco deriva del latín "abacus" o del griego "abasccius" que significa tablero, tabla.

De entre ellos, ha llegado hasta nosotros el ábaco de numeración, Achotu de los rusos, tomado del Suan Pan de los chinos y similar al hindú. Consta de un marco rectangular con varillas dispuestas verticalmente en las cuales pueden insertarse hasta 9 bolas o cuentas que pueden correr por ellas.

El ábaco hindú es decimal. Una bola de cada varilla equivale a diez bolas de la que se halla a su derecha.

Después de la numeración hablada, el hombre trató de representar los números por signos; todos ellos son restos de antiguas escrituras jeroglíficas, de los cuales destacamos especialmente el árabe, deducido del indio, que representa los nueve primeros números por signos especiales y los órdenes superiores por el lugar que éste ocupa en la escritura.

Los griegos sabían hacer las cuatro primeras operaciones, crearon el sistema sexagecimal, tenían una regla para extraer la raíz cuadrada de un número (de TEON de Alejandría) e hicieron importantes estudios sobre los números pares e impares. DIOPHANTO (325-409) en su Libro I sostiene que la multiplicación de dos números "deficientes" (negativos) produce una cantidad "abundante" (positivo) y usa para las cantidades deficientes el mismo signo que para la resta: τ. Aconseja no confundir las cantidades deficientes con las abundantes y no operar más que sobre las semejantes entre sí.

Pero fueron los hindúes los primeros en reconocer la existencia de los números negativos.

Los hindúes conocían las tablas de multiplicar, tenían idea de la raíz cuadrada y cúbica de los números, poseían la regla de la divisibilidad por 7, entreveían lo que eran los números inconmensurables y sabían sumar las progresiones aritméticas y encontrar la suma de los cuadrados y cubos de los números enteros desde la unidad hasta un número cualquiera. No tenían signos para expresar la suma y la resta, pero un cero puesto encima de un número indicaba que se lo debía restar.

En este marco referencial, las ecuaciones "insolubles" de 1er. grado llevaron a los algebristas hindúes (Siglos V a VII) a introducir los números negativos, aunque como una mera extensión del cálculo usual.

Brahmagupta en el Siglo VI de las reglas prácticas para sumar números enteros, interpretándolos como débiles y créditos y Bhaskara considera los valores positivo y negativo de la raíz cuadrada de un número positivo.

Los hindúes no intentaron justificar la identidad $(-5).(-5) = +25$ a partir del modus operandi del ábaco. Las reglas que ellos manejaban les permitían escribir identidades del siguiente tipo:

$$(10 - 3).(7 - 4) = 10.7 - 10.4 - 3.7 + 3.4$$

porque les resultaba claro que $(-3).(-4) = 3.4$.

La explicación razonada del cálculo mediante el ábaco no da justificación alguna de este cambio de signo, pero para los hindúes y para sus sucesores europeos anteriores al Siglo XVI esto justificaba poder afirmar $(-x).(-x) = + x^2$ y de allí sabían que todo número positivo posee dos raíces cuadradas.

En Europa se introducen lentamente los números negativos desde el Renacimiento, pero los matemáticos (Luca Pacioli - 1440 - 1515; Miguel Stiefel 1486-1567) tratan en lo posible de evitarlos en sus cálculos y sobre todo de utilizarlos, como lo indican los calificativos de "absurdos", "estimaciones falsas", "ficticios" que les asignaban.

En el siglo XVI se realiza la paulatina sustitución del cálculo con el ábaco por la aplicación de las reglas ordinarias del cálculo con las cifras arábigas. En realidad, en el siglo VII, ya los árabes (que a su vez lo aprendieron de los hindúes) habían introducido en Europa el sistema decimal del cero en la numeración escrita, pero éste no halló acogida en el mundo científico de la época y permaneció varios siglos en el olvido.

Pero en el siglo XVI, a partir de su adopción la Aritmética comienza a sufrir una profunda transformación. Una difundida figura de la Enciclopedia Margarita philosophica de Gregor Reisch, de comienzos del Siglo, muestra a la "dama Aritmética" presidiendo una especie de torneo entre un algorítmico, que opera de la nueva manera, y un abacista; las expresiones de los rostros de ambos rivales muestran claramente el triunfador.

Como importante innovación aritmética de este siglo debenconsiderarse los números decimales. Hasta ese momento los matemáticos adoptaban para la parte entera de u n número el sistema posicional decimal, pero par las partes menores que la unidad empleaban fracciones ordinarias o sexagecimales. El primer tratamiento sistemático de las fracciones decimales se debe al Belga Stevin (1548 - 1620)K quien en su obra "La disme", título que alude al décimo, define los números decimales, enuncia las reglas para operar con ellos y escribe las potencias de diez menores que la unidad encerrando el exponente en un pequeño círculo.

Girolano Cardano (1501 - 1576) escribió varias obras de Aritmética en las que estudió con profundidad el cálculo con los números enteros, fraccionarios e irracionales (los llamaban "cordos") y en los que usa los signos +, –, = y $\sqrt{\ }$.

En 1614, Juan Neper (1550-1617) inventó los logaritmos neperianos usando por primera vez la como para separar las cifras decimales. Este estudio despertó un gran entusiasmo, con lo cual se inicia un período fecundo de la Aritmética que vuelve a ser objeto de estudio.

Cavalieri (1598-1647) deduciendo algunos teoremas sobre los números inició este movimiento, pero es en manos de Pedro Fermat (1601-1665) que adquiere su verdadero desarrollo. Fermat demuestra las grandes proposiciones de los números enteros, algunas tan notables, que aún conservan su nombre en la ciencia moderna.

Pero es necesario llegar a Newton (1641-1727) para encontrar un concepto claro de magnitudes cuyas cantidades tienen sentidos contrarios y pueden representarse mediante números afectados con los signos más o menos. En su notable Aritmética universal se evidencia esto y se encuentra el cálculo de las fracciones decimales, el de las raíces, el de los números negativos y las reglas fundamentales que diferenciarán definitivamente la Aritmética del Algebra.

Surge de todo lo expuesto que los algebristas hindúes fueron los primeros en trabajar con los números negativos, aunque como una mera extensión del cálculo usual. Estos nuevos números adquirieron pronto interpretaciones concretas que condujeron, de una manera natural, a las reglas del cálculo. Por ello, los números negativos fueron durante muchísimo tiempo objeto de desconfianza para los matemáticos. El punto de vista formal sólo aparecería en una fase más evolucionada del álgebra como consecuencia de la introducción de la notación de los números decimales como potencias de diez, que entra en plena vigencia a partir de 1600.

Se intenta a continuación una recreación de ese proceso.

Partiendo del ábaco y de las operaciones que en él pueden realizarse, se construye un modelo visible de los números enteros, entendiendo por ésto el volver a definir el significado del signo menos que precede a los negativos, de modo tal que sea compatible con la noción natural de sustracción, pero adaptable a un significado completamente nuevo.

2. ARITMETICA BASADA EN EL ABACO.

El ábaco es una disposición de varillas paralelas montadas verticalmente sobre una base, y una serie de cuentas a ser ensartadas en dichas varillas.

Como una determinada cantidad de cuentas o varillas impondría un límite a los números representables o las operaciones realizables, aclaramos que durante la exposición de las reglas se supondrá la idealización de tener a nuestra disposición una cantidad ilimitada de cuentas y varillas.

Empezaremos distinguiendo arbitrariamente una varilla como "varilla de las unidades", la llamaremos V_o, lo cual significa que cada cuenta colocada en ella equivaldrá a una unidad del número a representar.

Las varillas a la izquierda de la de las unidades representarán en orden creciente, las sucesivas potencias de diez. Esto significa que cada cuenta colocada en la k-ésima varilla a la izquierda de la de las unidades representa 10^k unidades.

Con las convenciones anteriormente establecidas, resulta evidente que una cuenta colocada en una varilla cualquiera equivaldrá a diez de ellas colocadas en la varilla inmediatamente a la derecha de la misma. A ésta última nos referiremos como al "orden inmediato inferior".

Representación de Números

Para representar el número $a_n \ldots a_2 a_1 a_0\,_{(10)} \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k\, 10^k$ colocamos a_k cuentas en la k-ésima varilla a la izquierda de la de las unidades.

Estas reglas establecen una correspondencia entre las representaciones en el ábaco y el conjunto de los números naturales más el 0, expresadas en base 10. Para que la correspondencia sea impondremos la siguiente:

REGLA n° 1: Sea "m" la cantidad de cuentas en una varilla cualquiera. En toda varilla debe cumplirse que $m \leq 9$. Si así no fuera realizamos la siguiente operación, que llamaremos "reducción al orden inmediato superior":

busquemos "p" tal que $p \leq 9$ y $m \equiv p \bmod(10)$. Hecho esto, quitamos las cuentas de la varilla a excepción de "p" de ellas y colocamos $\frac{m-p}{10}$ en la varilla inmediatamente a la izquierda, con la cual repetimos el mismo procedimiento y así siguiendo hacia la izquierda hasta cumplir $m \leq 9$, $\forall$ varilla.

Llamaremos a la representación que resulta de estas operaciones "representación canónica".

Con las convenciones anteriores a la adopción de la Regla N° 1, hay números naturales que admiten diversas representaciones en el ábaco, determinándose clases de equivalencia en el conjunto de representaciones. Lo que hace la regla N° 1 es distinguir un elemento de cada clase de equivalencia de manera tal que la correspondencia: representación $\leftrightarrow$ número, sea unívoca.

La regla N° 1 será de aplicación obligatoria luego de obtenido el resultado final de una operación, a los efectos de que el resultado pueda ser leído directamente en base 10.

Sin embargo la recíproca, reducción al orden inmediato inferior, puede ser conveniente en algunas operaciones como se explicará más adelante. Esta operación consiste en sustituir cada cuenta de una varilla dada por 10 colocadas en la varilla inmediatamente a la derecha de ella.

Teniendo en cuenta que:

$$a_n \ldots a_2 a_1 a_0\,_{(10)} \pm b_n \ldots b_2 b_1 b_0\,_{(10)} = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k \pm \sum_{k=0}^{n} b_k 10^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (a_k \pm b_k) 10^k$$

Podemos realizar las siguientes operaciones para obtener la suma y diferencia de dos números:

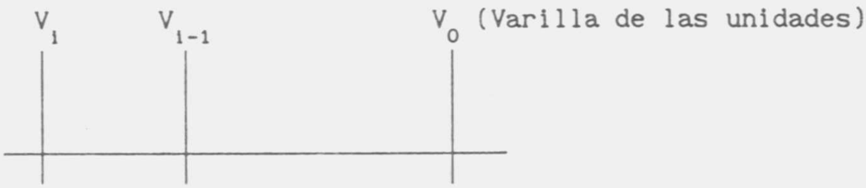
<u>Suma</u>: $(a_k+b_k)10^k$ unidades, quedan representadas en el ábaco por medio de a_k+b_k cuentas en la k-ésima varilla a la izquierda de la de las unidades, siendo a_k y b_k la cantidad de cuentas colocadas en aquella para la representación de los sumandos. Por lo anterior, enunciamos la:

<u>Regla N° 2</u>: Para sumar dos números se representa el primero y superpuesto a éste, se representa el segundo. El conjunto total de cuentas es una representación del resultado; sólo resta reducirlo a la representación canónica por aplicación de la regla N° 1. La generalización para más de dos sumandos es inmediata.

<u>Resta</u>: En la resta sólo consideraremos el caso de minuendo mayor que el sustraendo.

En el ábaco representamos $(a_k-b_k)10^k$ unidades mediante a_k-b_k cuentas en la k-ésima varilla a la izquierda de la de las unidades. Como a_k y b_k son la cantidad de cuentas en aquella varilla para la representación del minuendo y sustraendo, respectivamente, podemos enunciar la siguiente:

<u>Regla $\underline{N}^{\circ}$ $\underline{3}$</u>: Para calcular la diferencia de dos números, se realiza la representación del minuendo, extrayendo luego de cada varilla tantas cuentas como sería necesario colocar en dicha varilla para la representación del sustraendo. De esto resulta la representación del resultado. Obviamente, la aplicación de esta regla requiere que $a_k \geq b_k$, $\forall$ k. Si así no fuera, <u>siempre</u> es posible obtener una representación del minuendo que cumpla con esta condición por reducción al orden inmediato inferior, (Demostración de esto a continuación) y finalmente se obtiene la representación canónica del resultado por aplicación de la Regla N° 1.



Sea V_i la varilla más a la izquierda de la de las unidades tal que $a_i > b_i$ (con $b_i \leq 9$ por tratarse de una representación canónica del sustraendo). Está claro que esta varilla debe existir pues de lo contrario $a_k \leq b_k$, $\forall$ k con lo cual sería:

minuendo $\leq$ sustraendo, en contra de la hipótesis inicial.

Entonces, siendo $a_i > b_i$ $a_i - 1 \geq b_i$ podemos reemplazar una cuenta de V_i y colocar 10 en v_{i-1}, con lo cual la cantidad de cuentas en V_{i-1} será de $a'_{i-1} = a_{i-1} + 10 > 9 \geq b_{i-1}$.

Con $a'_{i-1} > b_{i-1}$ ahora es V_{i-1} la varilla más a la izquierda de la de las unidades que cumple con esta condición. Por lo tanto podemos aplicar nuevamente el procedimiento y por sucesivas iteraciones lograr que todos los a' sean mayores o iguales que los b, como queríamos demostrar. Producto. Consideramos primero el producto por un sólo dígito.

Sea el producto $m\,.(a_n \ldots a_2 a_1 a_0\,_{(10)}) = m \sum_{k=0}^{n} a_k\, 10^k =$
$= \sum_{k=0}^{n} (m.a_k) 10^k$ con $m \leq 9$; esto permite establecer la

Regla N° 4: Para multiplicar un número cualquiera por otro de un sólo dígito (m), se superpone "m" veces la representación del primero. Esto constituye la representación del producto, el que finalmente debe reducirse a la forma canónica por la regla N° 1.

Consideremos ahora el caso especial del producto por 10^p: Sea $10^p.(a_n \ldots a_2 a_1 a_0\,_{(10)}) \equiv 10^p \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^{k+p}$ es decir que la representación del producto se obtiene colocando a_k cuentas en la (K+p)-ésima varilla a la izquierda de la de las unidades. Como a_k es también la cantidad de cuentas en la k-ésima varilla a la izquierda de la de las unidades en la representación de $a_n \ldots a_2 a_1 a_0\,_{(10)}$ podemos enunciar:

Regla N° 5: Para obtener la representación del producto de un número cualquiera por 10^p, representamos el primero y desplazamos rígidamente el conjunto de cuentas "p" varillas hacia la izquierda. Esta es la representación del producto.

Con las reglas anteriormente establecidas, podemos tratar ahora el caso más general del producto de $A \equiv a_n \ldots a_2 a_1 a_0\,_{(10)}$ por $B \equiv b_m \ldots b_2 b_1 b_0\,_{(10)} \equiv \sum_{k=0}^{m} b_k\, 10^k$

Entonces: $A.B = A \sum_{k=0}^{m} b_k\, 10^k = \sum_{k=0}^{m} (A.b_k) 10^k$.

Siendo $b_k \leq 9 \wedge b_k \in N$, $\forall$ k el producto $A.b_k$ se obtiene por aplicación de la regla 4, el producto $(A.b_k)10^k$ por aplicación de la regla 5, y la suma $\sum_k (A.B_k)10^k$ aplicando la regla 2.

Llamando R a la representación, en el ábaco, de un número A, es evidente que la representación R' que resulta de desplazar rígidamente "k" varillas hacia la derecha debe tener el significado de ser la representación de la (10^k)-ésima parte de A; que llamaremos A', ya que aplicando la regla 4 al producto $10^k.A'$, corremos rígidamente R' "k" varillas hacia la izquierda con lo cual obtenemos nuevamente R. Esto conduce a asignar significado a las varillas de la derecha de V_0.

Si en particular $A = 1 \Rightarrow A' - \frac{1}{10^k}$ y R' está constituído por la cuenta única colocada en la "k"-ésima varilla a la derecha de V_0. Lo anterior permite ahora la representación de números decimales puesto que

$a = 0, a_1 a_2 \ldots a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\frac{1}{10} \right)^k$. Basta entonces colocar a_k cuentas en la k-ésima varilla a la derecha de V_0 $(1 \leq k \leq n)$ para obtener la representación de A.

Es importante observar que todas las reglas anteriormente enunciadas siguen siendo válidas cuando los números representados contienen cifras decimales.

Enunciamos entonces la siguiente:

<u>Regla</u> <u>N°</u> <u>6</u>: Para calcular la (10^k)-ésima parte de un número A, representamos este último y desplazamos rígidamente tal representación k-varillas hacia la derecha; ésta es la representación de $\frac{A}{10^k}$.

Para representar en forma escrita las potencias de 10 y las fracciones decimales de la unidad introduzcamos los siguientes símbolos:

$$10^{\overleftarrow{p}} \equiv \underbrace{10.10.\ \ldots\ .10}_{p\ \text{veces}} \qquad\qquad 10^{\overrightarrow{p}} \equiv \frac{1}{10^{\overleftarrow{p}}} \equiv \frac{1}{\underbrace{10.10.\ \ldots 10}_{p\ \text{veces}}}$$

Estos símbolos sirven de abreviatura para la cantidad de ceros a escribir a continuación de la unidad y de indicar por medio de la flecha colocada sobre el exponente el sentido en que debe desplazarse "p" varillas la representación de la unidad a fin de obtener la representación de la correspondiente potencia o fracción decimal.

Potenciación.

Para calcular el producto $10^{\overleftarrow{p}}.10^{\overleftarrow{n}}$ en el ábaco, colocamos una cuenta en V_0 y la desplazamos "p" varillas hacia la izquierda; éste número multiplicado por $10^{\overleftarrow{n}}$ significa que la representación obtenida anteriormente debe desplazarse "n" varillas hacia la izquierda, de acuerdo con la Regla 5. Las operaciones anteriores son equivalentes a colocar una cuenta en V_0 y desplazarla (n+p) varillas hacia la izquierda.

De esto se deduce que $10^{\overleftarrow{p}}.10^{\overrightarrow{n}} = 10^{\overleftarrow{(p+n)}}$.

Análogamente se demuestra que $10^{\overleftarrow{p}}.10^{\overrightarrow{n}} = 10^{\overrightarrow{(p+n)}}$.

Analicemos ahora el producto $10^{\overrightarrow{p}}.10^{\overrightarrow{n}}$, para obtener su representación colocamos una cuenta en V_0 y la desplazamos "p" varillas hacia la izquierda y luego "n" hacia la derecha, lo cual es equivalente a colocar la cuenta en V_0 y luego desplazarla (p-n) hacia la izquierda o (n-p) hacia la derecha.

Es decir:

$$10^{\overleftarrow{p}}.10^{\overrightarrow{n}} = 10^{\overleftarrow{(p+n)}} = 10^{\overrightarrow{(n-p)}}$$

aún aceptando la igualdad pues sabemos que para el calculista antiguo sólo una de las expresiones tenía significado, pues suponiendo que $p > n$: (n-p) era un número sin sentido.

Entonces las reglas para el producto de potencias de 10 y fracciones decimales son:

Regla N° 7a: Si los factores tienen exponentes con el mismo sentido, el producto lleva por exponente la suma de los de los factores y el mismo sentido que el de ellos.

Regla N° 7b: Si los factores tienen exponentes con distintos sentidos, el producto lleva por exponente la diferencia entre ambos, tomando como minuendo al mayor de ellos y con el sentido de éste.

No hemos podido encontrar reglas generales para la potenciación diferentes del producto reiterado, a excepción del caso particularmente simple de las potencias de diez. Conjeturamos que esta misma situación se presentó a los antiguos abacistas, dado que no fue posible encontrar evidencia histórica de que este tipo de operaciones hubieran sido realizadas con el ábaco.

Llegado a este punto nos resulta necesario sustituir el cálculo con el ábaco por la aplicación de las reglas ordinarias del cálculo con las cifras arábigas, tal como ya se dijo ocurrió en el Siglo XVI.

En consecuencia, convenimos en usar los signos:

"+" en reemplazo de "←" y "-" en reemplazo de "→"

Hacemos esta asignación y no la contraria para conservar los resultados ya conocidos de las potencias positivas, ya que, por ejemplo se sabía que la potencia 10^{+2} era 100 y esto fue denotado por nosotros como $10^{\overleftarrow{2}}$. En consecuencia 10^{-2} debería ser $10^{\overrightarrow{2}} = 1/100$ (A fines del siglo XVI Stevin utiliza un círculo en lugar del "-" para indicar las potencias negativas).

Con esta notación las reglas 7a) y 7b) se traducen en:

<u>Regla N° 7a</u>: $10^{+a}.10^{+b} = 10^{+(a+b)}$

$$10^{-a}.10^{-b} = 10^{-(a+b)}$$

<u>Regla N° 7b</u>: $10^{+a}.10^{-b} = 10^{+(a-b)} = 10^{-(b-a)}$

Se visualiza a partir de estas expresiones que los exponentes son tan números como las bases y que al operar con ellos se conservan las reglas del cálculo de suma y resta de naturales; aparecen además, resultados de operaciones que no estaban definidas; por ejemplo si a = 3 y b = 5 se deduce que:

$$+(3 - 5) = - (5 - 3) = -2$$

A pesar de no contar con una regla general para efectuar potencias en bases diferentes de 10, podemos conjeturar que sí realizaron algunas operaciones simples con potencias de 10. Calculando algunas potencias de potencias y guiados por la intuición, a partir de observaciones particulares, pudieron haber inducido ciertas reglas generales.

Por ejemplo, pudieron haber observado que:

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10^{+1}} \text{ o en general } 10^{-k} = \frac{1}{10^{+k}}$$

Además como $10^{-k} = \dfrac{1}{10^{+k}} = \dfrac{10}{10^{+(k+1)}} = 10.\,10^{-(k+1)}$

se extiende la relación existente en el ábaco entre un orden y el inmediato inferior, ahora en las varillas a la derecha de V_0.

De $10^{-k} = \dfrac{1}{10^{+k}}$ puede inferirse que elevar 10 a una potencia negativa equivale a dividir la unidad por la correspondiente potencia positiva.

Consideremos ahora otros ejemplos de posibles observaciones:

$(10^{+3})^{+2}$ = 1.000.000 (efectuando la potencia por producto reiterado). Pero 1.000.000 = 10^{+6} = $10^{(+2).(+3)}$. A los efectos de relacionar los exponentes de $(10^{+3})^{+2}$ con el de 10^{+6} con el de 10^{+6} pudieron suponer que esta regla era general, y que el valor del exponente de una potencia de potencia estaba dado por el producto de los exponentes de la misma. Sólo restaba ver qué signc debía atribuirse al producto de las distintas combinaciones de factores de iguales o diferentes signos, lo cual puede hacerse considerando los siguientes ejemplos:

$(10^{-1})^{+3} = \left(\frac{1}{10^{+1}}\right)^{+3} = \left(\frac{1}{10}\right)^{+3} = \frac{1}{1000}$ (por producto reiterado).

Pero $\frac{1}{1000} = \frac{1}{10^{+3}} = 10^{-3}$. Entonces,

si $(10^{-1})^{+3} = 10^{(-1).(+3)}$ $\quad$ $(-1).(+3)$ debe ser (-3)

De la misma manera:

$$(10^{+3})^{-2} = (1000)^{-2} = \frac{1}{1000^{+2}} = \frac{1}{1.000.000} = 10^{-6}$$

y por consiguiente $(+3).(-2) = (-6)$.

Finalmente, el caso más importante que conduce a que el producto de dos números negativos es un número positivo:

$$(10^{-1})^{-2} = \left(\frac{1}{10^{+1}}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-2} = \frac{1}{\left[\frac{1}{10}\right]^{+2}} = \frac{1}{\left[\frac{1}{100}\right]}$$

$$= \left[\frac{1}{100}\right]^{-1} = 100 = 10^{+2}$$

de donde: $(-1).(-2) = +2$

Además $[10^{(a+b)}]^{c} = \underbrace{10^{(a+b)}.10^{(a+b)}. \ldots . 10^{(a+b)}}_{\text{c-veces}}$

$$= \underbrace{(10^{+a}.10^{+b}).(10^{+a}.10^{+b})\ldots(10^{+a}.10^{+b})}_{\text{c-veces}} =$$

Reagrupando:

$$\underbrace{(10^{+a}.10^{+a}...10^{+a})}_{c\text{-veces}}.\underbrace{(10^{+b}.10^{+b}...10^{+b})}_{c\text{-veces}} = (10^{+a})^{+c}.(10^{+b})^{+c}$$

$$= 10^{(+a).(+c)}.10^{(+b).(+c)}$$

$$= 10^{[(+a).(+c) + (+b).(+c)]}$$

Es decir que entre los exponentes se cumple que:

(a+b).c = a.c + b.c (Propiedad distributiva)
Esta propiedad puede demostrarse análogamente para las restantes combinaciones de signos.

Todo esto demuestra que los exponentes se comportan de manera similar a las naturales en las operaciones definidas para éstos y proporcionan resultados en las operaciones no definidas, tales como:

+ (3 - 5) = - 2 y (-1).(-2) = +2.

Lo que los hindúes habían intuído y tantos matemáticos, incluído el gran Euler, habían intentado en vano probar aparecía visible por primera vez a los ojos del hombre. Ya no quedaba lugar para dudas: (-1).(-1) debía ser 1 y no podía ser -1 porque $(10^{-1})^{-1}$ es 10^{1} que es 10 y no 10^{-1} que es 0,1.

Como si a partir de la adopción de la notación decimal y extendiendo las relaciones existentes entre las potencias positivas de 10 surgieran naturalmente nuevos números, los negativos, amalgamándose de un modo tan obvio y único con los naturales, como si se hubiera armado el antiguo rompecabezas, aquél del sustraendo que buscaba un minuendo sin poderlo encontrar.

BIBLIOGRAFIA EMPLEADA EN LA RESEÑA HISTORICA:

*"Diccionario Enciclopédico Hispano-Americano de Literatura, Ciencias y Artes - W.M. Jackson Editor - Londres.

*"El Universo de los Números" - Lancelot Hogben - Ediciones Destino - Barcelona - 1986.

*Historia de la Matemática - Julio Rey Pastor y José Babini - GEDISA - Barcelona - 1986.

*"Que es la matemática" - Richard Courant y Herbert Robbins Editorial ALDA - Buenos Aires - 1954.

Fac. de Ciencias Exactas
Universidad Nacional del Nordeste
9 de Julio 1449
3400 - Corrientes.