LOS PROBLEMAS -UN INSTRUMENTO PARA LA ENSEÑANZA-

Cristina Ferraris   Liliana Siñeris

En la enseñanza de la matemática y sobre todo de la geometría juega, sin lugar a dudas, un rol importantísimo el planteo claro y correcto de problemas para su resolución. De ese modo, se tenderá a un estudio más grato y más creativo.

Este trabajo describe una manera de sistematizar el planteo, resolución y evaluación de problemas. Con ese fin se los clasifica según su caracterización, se analizan distintas formas de presentación y, por último, se describen los pasos seguidos para su tratamiento. Como agregado que estimamos interesante, se dan varios ejemplos tal como fueron presentados a un curso de Geometría Métrica del Profesorado (nivel universitario). El mismo se cerró con un trabajo final que consistió en la elección, análisis, presentación y exposición de un problema por parte del alumno, o en el desarrollo de un tema teórico derivado de los contenidos vistos. La cátedra brindó el asesoramiento necesario (bibliográfico, de consulta) para llevar a cabo este tipo de trabajo.

Los problemas a ser tratados pueden clasificarse, según su caracterización en:

-Nuevos (total o parcialmente hechos por la cátedra. Permiten motivar un tema, redondear o dar cierre a una unidad y evaluar objetivos específicos. Son algo así como un traje a medida!).

-Extraídos de bibliografía común.

-Clásicos (planteados a través de la historia).

En cuanto a la presentación de un problema particular se considera:

a) CON GUIA ORDENADA DE DEMOSTRACION (Permite evaluar la capacidad para seguir un razonamiento y la aplicación de conceptos estudiados).

b) CON GUIA NO ORDENADA, solicitando el ordenamiento de la misma (Permite evaluar la capacidad para entrelazar conceptos vistos y ordenar un razonamiento lógico).

Los incisos a) y b) tienen en cuenta los siguientes aspectos:

i) El resultado a que se debe llegar se expresa de antemano, para lo que se pide verificación y demostración del mismo.

ii) El resultado se concluye a partir de lo demostrado.

c) SIN GUIA (Si la dificultad del problema así lo requiere, puede proponerse que la resolución se realice en unos días).

d) CON UNA RESOLUCION PROPUESTA. para el análisis de la misma (Promueve la discusión y crítica de un razonamiento impuesto).

e) CON MAS DE UNA DEMOSTRACION (Posibilita acentuar que las demostraciones no son únicas y son válidas siempre que el encadenamiento de conceptos sea correcto. También estimula la búsqueda de nuevas demostraciones).

Las etapas seguidas en el tratamiento de un problema son las siguientes:

-ELECCION DEL TEMA A TRATAR y determinación de objetivos.

-SELECCION DEL PROBLEMA, con análisis de las posibilidades que brinda.

-ORGANIZACION de la manera más conveniente de presentación que, obviamente, será acorde a los objetivos propuestos.

-TRABAJO O RESOLUCION PROPIAMENTE DICHA, preferentemente grupal.

-EVALUACION (mixta: alumnado-cátedra). Esto favorece el surgimiento de comentarios no previstos, los cuales llevan a una profundización del tema. Contribuye también a la discusión del grado de formalización logrado, de las ventajas del uso de esquemas cuando un dibujo exhaustivo es innecesario, etc. Se completa la misma con una ficha personal o registro de cada alumno, lo que permite un real seguimiento durante todo el curso.

A continuación veremos algunos problemas que ejemplifican la metodología propuesta.

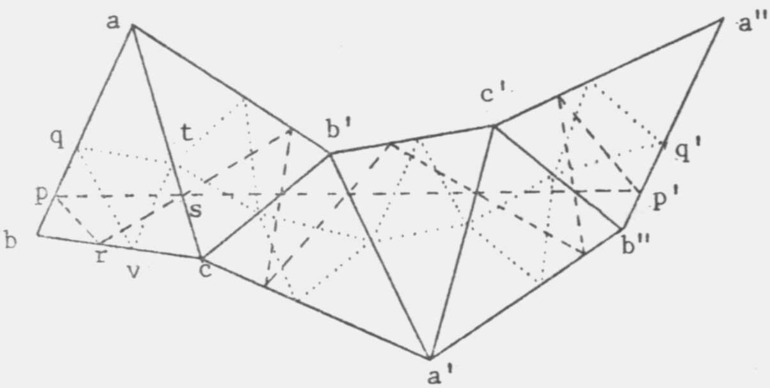
PROBLEMA DE FAGNANO

Este problema fue propuesto por Fagnano en 1.775 y resuelto por él mismo mediante cálculos.

PROBLEMA DE FAGNANO: encontrar el triángulo de menor perímetro inscripto en un triángulo acutángulo dado.

SOLUCIÓN: se trata del triángulo cuyos vértices son los pies de las alturas del triángulo dado.

-I) Solución propuesta por Schwartz:



a) Realizar cinco reflexiones: sobre $\overline{ac}$, $\overline{cb'}$, $\overline{b'a'}$, $\overline{c'a'}$ y $\overline{c'b''}$ (ver esquema)

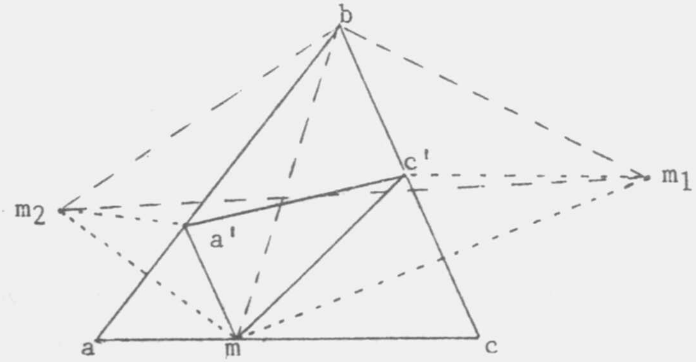
b) Observar y demostrar que:

i) $\left|\widetilde{pp'}\right| = 2$ perím. $\overset{\Delta}{prs}$ (long. poligonal)

ii) $\left|\widetilde{qq'}\right| = 2$ perím. $\overset{\Delta}{qvt}$ (long. poligonal)

iii) $\widetilde{pp'} \subset \overleftrightarrow{pp'}$

-II) OTRA SOLUCION:



Analizar y completar la demostración siguiente que consta de dos etapas:

1° Dado $m \in \overline{ac}$, encontrar $a'' \in \overline{ab}$ y $c'' \in \overline{bc}$ que realicen el triángulo de menor perímetro (con m fijo).

2° Buscar el m para lograr, entre los anteriores, el triángulo de menor perímetro.

Demostración:

a) Sea $m \in \overline{ac}$ fijo. Supongamos que tenemos el $a'\overset{\Delta}{c'}m'$ incripto en $a\overset{\Delta}{b}c$. Consideremos m_1 y m_2 los simétricos de m respecto a $\overleftrightarrow{bc}$ y a $\overleftrightarrow{ab}$. Entonces $|\widehat{m_1 a'c'm_2}|$ = perím. $a'\overset{\Delta}{c'}m$.

b) Encontrar los puntos a" y c" requeridos en la 1° etapa. Justificar.

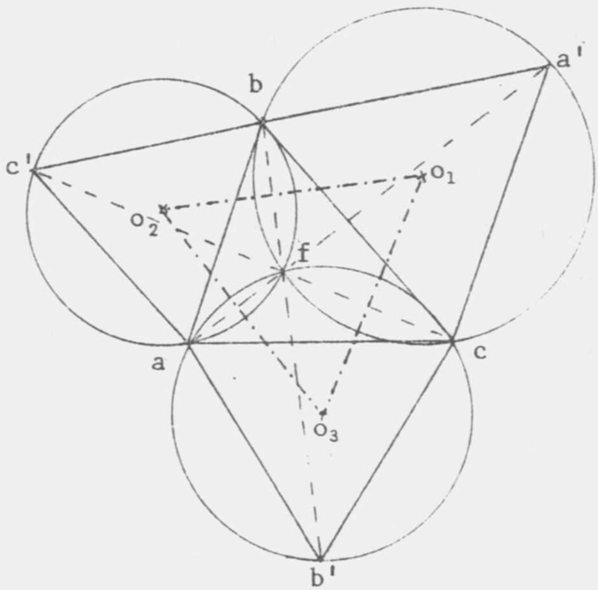
c) Cualquiera sea el punto $m \in \overline{ac}$ el ángulo $m_2\overset{\angle}{b}m_1$ no varía.

d) El m buscado en la 2a. etapa es el pie de la altura respecto a $\overline{ac}$. Justificar.

e) Concluir.

TRIANGULO DE NAPOLEON

Dado un triángulo cualquiera $a\hat{b}c$, se construyen sobre sus lados triángulos equiláteros de lados respectivamente congruentes. Al triángulo formado por los baricentros de los triángulos construídos de este modo se lo llama Triángulo de Napoleón.



Sean C_{o_1}, C_{o_2} y C_{o_3} las circunferencias que circunscriben a $\overset{\Delta}{bca'}$, $\overset{\Delta}{abc'}$ y $\overset{\Delta}{acb'}$ respectivamente. Consideremos G la rotación de centro b y ángulo $a'\overset{\angle}{b}c$. Demostrar:

a) $\{f\} = \overleftrightarrow{aa'} \cap \overleftrightarrow{cc'}$ es tal que $f \in C_{o_1} \cap C_{o_2}$ (usar que ángulos inscriptos en arcos congruentes son congruentes).

b) $a'\overset{\angle}{f}b \equiv a'\overset{\angle}{c}b$

c) $\overleftrightarrow{o_1o_2} \perp \overleftrightarrow{bf}$ (pues $\overline{o_1o_2}$ mediatriz de $\overline{bf}$),

$\overleftrightarrow{o_2o_3} \perp \overleftrightarrow{af}$ y $\overleftrightarrow{o_1o_3} \perp \overleftrightarrow{fc}$

d) $o_1\overset{\angle}{o_2}o_3 \equiv b\overset{\angle}{c}a'$, $o_1\overset{\angle}{o_3}o_2 \equiv a'\overset{\angle}{b}c$ y $o_2\overset{\angle}{o_1}o_3 \equiv b\overset{\angle}{a}c'$

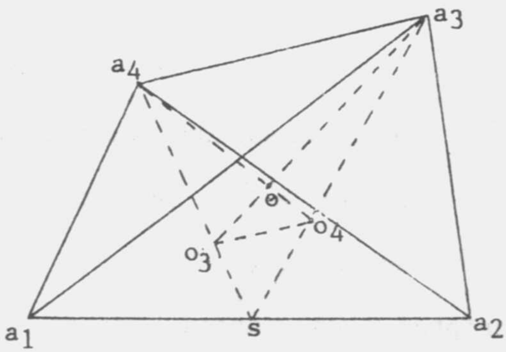
e) Qué se puede decir del $\overset{\Delta}{o_1o_2o_3}$?

Enunciar la propiedad correspondiente al triángulo de Napoleón.

Nota: El punto f considerado en la demostración se llama "Punto de Fermat" ($\{f\} = \overleftrightarrow{aa'} \cap \overleftrightarrow{bb'} \cap \overleftrightarrow{cc'}$).

MEDIANAS DE UN POLIGONO

Sea $\overset{\square}{a_1a_2a_3a_4}$ cuadrilátero. Llamaremos medianas del mismo a los segmentos que unen cada vértice con el baricentro del triángulo determinado por los otros tres vértices. Se trata de probar que las medianas de un cuadrilátero se cortan en un punto que llamaremos Baricentro del mismo.



Sean: s el punto medio del lado $\overline{a_1 a_2}$

o_3 el baricentro de $a_1 \overset{\Delta}{a_2} a_4$

o_4 el baricentro de $a_1 \overset{\Delta}{a_2} a_3$

$\{o\} = \overline{o_3 a_3} \cap \overline{o_4\ a_4}$

a) Ordenar y demostrar: i) $\overline{o_3 o_4} // \overline{a_3 a_4}$

ii) $\dfrac{\overline{sa_3}}{\overline{so_4}} = \dfrac{\overline{sa_4}}{\overline{so_3}} = k$

iii) $\dfrac{\overline{oa_4}}{\overline{oo_4}} = \dfrac{\overline{oa_3}}{\overline{oo_3}} = \dfrac{\overline{a_3 a_4}}{\overline{o_3 o_4}} = k$

iv) $o\overset{\Delta}{o_3} o_4 \cong o\overset{\Delta}{a_3} a_4$

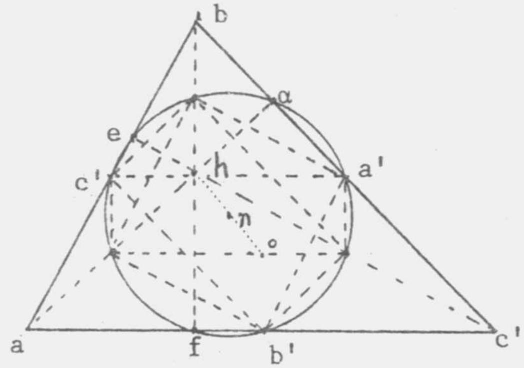
v) $k = 3$

b) Enunciar las propiedades de las medianas de un cuadrilátero.

c) Definir medianas de un polígono cualquiera y conjeturar sobre sus propiedades.

CIRCUNFERENCIA DE LOS NUEVE PUNTOS

"Los pies de las alturas de un triángulo, los puntos medios de sus lados y los puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro con los vértices, están en una circunferencia cuyo centro es el punto medio del segmento que une el ortocentro con el circuncentro del triángulo".



Para demostrarlo, se sugiere probar:

a) $\overset{\square}{c'b'ml}$, $\overset{\square}{kb'a'l}$ y $\overset{\square}{kma'c'}$ son rectángulos

b) $\overline{c'm} \cap \overline{ka'} \cap \overline{b'l} = \{n\}$

c) $d \in C_{n,R}$ con $R \equiv \overline{nk} \equiv \overline{na'}$

similarmente $f \in C_{n,R}$ y $e \in C_{n,R}$

d) $S_n(\overset{\triangle}{lmk}) = a'\overset{\triangle}{b'}c'$ y $S_n(h) = o$, donde S_n representa la simetría central respecto a n. Justificar.

A la circunferencia resultante se la llama como era de esperar: CIRCUNFERENCIA DE LOS NUEVE PUNTOS.

EL JUEGO DEL DOMIDREZ

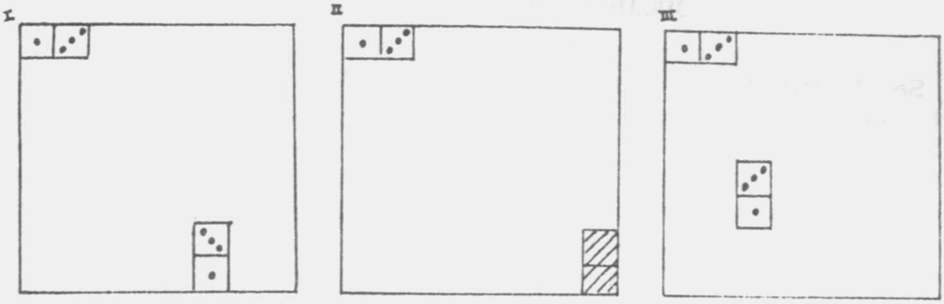
El juego del domidrez se conoce desde hace muchísimos años. No es nuestra intención dar en este momento sus reglas, sólo diremos que se dispone de fichas de dominó y un tablero de ajedrez de manera tal que cada ficha cubre dos casilleros del mismo y una de las condiciones del juego es que dicha ficha siempre esté en esa postura (nunca tomando casilleros en forma parcial) al finalizar cada movimiento. También está permitido ponerlas al revés, o sea, con los puntos hacia abajo.

a) ¿Se pueden pensar los movimientos de la ficha como resultantes de transformaciones rígidas del plano?. ¿Cuáles están permitidas? (caracterizarlas por centros, ejes, ángulos, etc.).

b) Si las posiciones inicial y final son las representadas en la figura 1. ¿existe un movimiento rígido que lleve de una a otra?. En caso afirmativo, dar sus características.

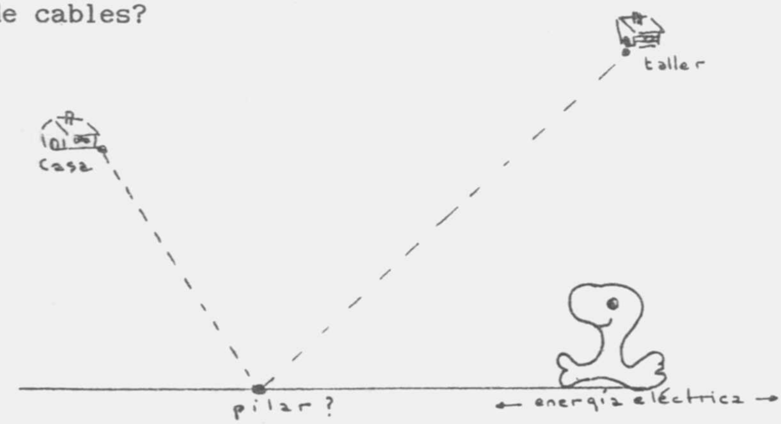
c) Idem si P_i y P_f son como lo muestra la figura 2, donde el sombreado indica que la ficha está del revés y se sabe que el tres quedó abajo.

d) ¿Es posible la situación representada en la figura 3? Justificar.



SIMETRIA AXIAL

El Sr. Cabeza tiene un pequeño taller separado de su casa pero en el mismo terreno como lo muestra el dibujo, y está por instalar la luz. ¿Dónde conviene que instale el pilar de entrada de energía eléctrica para abaratar el costo de tendido de cables?



Nota: La casa está más cerca de la ruta que el taller, aunque no se tiene el dato del metraje.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL COMAHUE
CENTRO REGIONAL UNIVERSIDAD DE BARILOCHE
8400 - BARILOCHE - RIO NEGRO.