AREAS DE TRIANGULOS RECTANGULOS

Jorge Vargas

Un problema planteado por los árabes en el siglo X es el de determinar los números naturales que se obtienen como área de algún triángulo rectángulo de lados naturales. Aún hoy en día no se conoce una respuesta a este problema, sin embargo, recientemente se han realizado progresos positivos tanto en resultados como en conjeturas. En estas notas trataremos de describir parte de este conocimiento matemático y de una técnica para resolver problemas, la de trasladar un problema de un área de la matemática a otra y allí resolverlo.

De ahora en más (x,y,z) indican, salvo especificación contraria, los catetos e hipotenusa de un triángulo rectángulo.

1) Salvo congruencia, el número de triángulos rectángulos de lados naturales y área fija igual a un natural n es finito. En efecto, la ecuación $xy = 2n$ tiene un número finito de soluciones naturales, como se deduce del teorema fundamental de la aritmética, ahora recordar que dos triángulos rectángulos son congruentes si sus catetos lo son.

2) No existen triángulos rectángulos de lados naturales y área 1,2,3,4,5,7

En efecto, sean (x,y,z) las medidas de un triángulo rectángulo de lados naturales. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $x \leq y$, supongamos existe un triángulo rectángulo cuya área es igual a uno de los números 1,2,3,4,5,o 7. Entonces tendríamos que:

$xy = 2$ con $x^2 + y^2 = z^2$ lo cual implica $x = 1$, $y = 2$, $z = \sqrt{3}$, absurdo pués x, y, z, son naturales. $xy = 4$, implica $x = y = 2$, $z = \sqrt{8}$ absurdo. $xy = 6$ implica $x = 2$, $y = 3$, $z = \sqrt{13}$ absurdo. $xy = 8$ implica $x = 2$, $y = 4$, $z = \sqrt{20}$ absurdo $xy = 10$ implica $x = 2$, $y = 5$, $z = \sqrt{29}$ absurdo. $xy = 14$ implica $x = 2$, $y = 7$ $z = \sqrt{53}$ absurdo.

Ejercicio: Probar que no existen triángulos rectángulos de lados naturales y área 8,9,10,11,12,13,14,15,p, p un número primo.

3) Salvo congruencia existe un único triángulo rectángulo de lados naturales y área 6.Es el (3,4,5).

Puesto que $xy = 12$, $x \leq y$, $x^2 + y^2 = z^2$ implican $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$ o $x = 2$, $y = 6$, $z = \sqrt{40}$, el tercer criterio de congruencia concluye la afirmación.

* * * *

Es claro que si queremos obtener resultados de importancia debemos cambiar de modo de trabajo, una primera cosa que podemos intentar es encontrar una máquina que nos ayude a producir ternas pitagóricas. Recordemos 1) se llama terna pitagórica a una terna de números que son las medidas de los lados de un triángulo rectángulo, 2) matemáticamente una máquina que nos produzca ternas pitagóricas significa encontrar un conjunto X y una función calculable de X en el conjunto de las ternas pitagóricas.

Lema 1: Una terna de números reales x, y, z, satisface $x^2 + y^2 = z^2$ si y sólo sí es posible encontrar números reales m, n con $m > n$ tal que $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$, $z = m^2 + n^2$.

En otras palabras cada vez que se nos ocurran un par de números $m > n$ podemos construir una terna pitagórica usando las fórmulas escritas allí, y de esta manera obtenemos todas las ternas.

Demostración: Sí $x^2 + y^2 = z^2$ entonces $z^2 - y^2 = x^2$, en consecuencia $x^2 = (z-y)(z+y)$. Sean $p = z-y$, $q = z+y$, de esto $y = (q-p)/2$, $z = (p+q)/2$, $x^2 = pq$, Escribamos $p = 2n^2, q = 2m^2$, (como p y q son positivos y todo número real positivo tiene raíz cuadrada, m y n existen). Por tanto $x = 2mn$, $y = m^2-n^2$, $z = m^2 + n^2$. La implicación recíproca es trivial.

En la terminología de funciones el lema se reinterpreta así: Sea X el conjunto de pares de números reales (m, n) con $m > n$. Fijemos en el plano un sistema de ejes coordenados ortogonales de orígen p. Sea ϕ la función que asocia a (m, n) el triángulo rectángulo con hipotenusa contenida en el primer cuadrante y vértice opuesto p, con catetos contenidos en los ejes y de medida $2mn$, m^2-n^2 respectivamente. El lema y los criterios de congruencia implican que todo triángulo rectángulo es congruente al menos a uno de la forma $\phi(m, n)$ con m y n convenientes. El lector diligente podrá concluir: Salvo congruencia hemos construido una máquina para producir triángulos rectángulos.

Ejercicio: Denotemos por Y el conjunto cociente del conjunto de triángulos rectángulos dividido por la relación de congruencia. Sea $\psi: X \longrightarrow Y$ la función definida por $\psi(m,n)$ = clase de congruencia de $\phi(m,n)$. Analizar si ψ es inyectiva o suryectiva.

* * * *

Después de varios intentos (2500 años aproximadamente) Kronecker en el siglo pasado probó (ver [D], pág 222)

Proposición: Una terna $x,y < z$ de números naturales, con x par y con máximo común divisor de x,y,z igual a 1 satisface la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ sí y solo sí $x = 2mn$, $y = m^2-n^2$, $z = m^2 + n^2$, $m > n$ con m,n naturales, $mcd(m,n)=1$, y m de distinta paridad a n.

Demostración: Probemos primero que si $x = 2mn$, ...entonces $x^2 + y^2 = z^2$, $mcd(x,y,z) = 1$ y los números x,y,z son naturales. Son naturales puesto que resultan de operar con naturales. La ecuación $x^2+y^2 = z^2$ resulta de un cálculo directo. Si d divide a $mcd(x,y,z)$ entonces $d/(x+z)^2 = (m+n)^2$, como m es par y n impar o viceversa resulta $m+n$ impar por lo tanto d es impar. Por tanto como $d/2m^2 = y+z$, $d/2n^2 = z-y$ resulta que d/n^2 y d/m^2. Si d fuera mayor que uno, cada factor primo de d dividiría m y n, lo cual implicaría que $mcd(m,n) > 1$, absurdo.

Para verificar la recíproca notemos que:

a) x es par e y impar o x es impar e y par. Puesto que si ambos fueran pares 2 dividiría a z^2, por tanto 2 dividiría a $mcd(x,y,z) = 1$ Si ambos fueran impares tendríamos $x = 2k + 1$, $y = 2r + 1$, reemplazando en la igualdad

$x^2 + y^2 = z^2$ se obtendría $2(2s+1) = z^2$ con s natural, lo que contradice el teorema fundamental de la aritmética.

b) z es impar, puesto que $x^2 + y^2$ es impar por a).

Sín pérdida de generalidad podemos suponer que x es par e y impar (si fuera al revés hacer $x = y$ e $y = x$). Por el lema anterior podemos escribir $x = 2mn$, $y = m^2-n^2$, $z = m^2 + n^2$, $m > n$ con m, n reales. Necesitamos probar: m y n son naturales, $mcd(m,n) = 1$, m, n tienen distinta paridad. Como x es natural y par resulta que mn es natural, como $y + z = 2m^2$, $z - y = 2n^2$, $y \pm z$ es par (ambos son impares) resulta que m^2 y n^2 son naturales. $mcd(m^2,n^2) = 1$, de lo contrario sí un primo p dividiera a m^2 y n^2 entonces p dividiría a y ,z la ecuación pitagórica implica p dividiría a x, de esto $mcd(x,y,z) > 1$, absurdo. Por lo tanto cada factor primo de n^2 no aparece en m^2 y viceversa, como mn es natural, y como la raíz cuadrada de $(mn)^2$ se calcula por medio de la factorización en primos de $(mn)^2$ y $mcd(m^2,n^2) = 1$, resulta que m y n son naturales. Son coprimos ya que de lo contrario resultaría $mcd(x,y,z) > 1$ como x es par e y impar resulta m par y n impar o viceversa.

Esta proposición tiene varias consecuencias interesantes, a saber:

1) x, y, z es una terna pitagórica de naturales con $mcd(x,y,z) = d$ sí y sólo sí existen naturales m, n con $x = 2mnd$, $y=d(m^2-n^2)$, $z = d(m^2+n^2)$, $m>n$, $mcd(m,n)=1$, m y n de distinta paridad.

2) Sí x, y, z es una terna pitagórica de naturales, entonces xyz es un múltiplo de 60.

En efecto, 60 = 3.4.5por tanto debemos probar que 3/xyz, 4/xyz, 5/xyz. $xyz = d^3 2mn(m^2-n^2) \quad (m^2+n^2) = d^3 2mn(m-n)(m+n)(m^2+n^2)$. Como m o n es par resulta 2mn múltiplo de 4. Sí m y n son múltiplos de 3 entonces (m^2-n^2) es múltiplo de 3.Sí ni n ni m son múltiplos de 3 entonces $m=3k+r$ $(r=1,2)$ y $n=3s+t$ $(t=1,2)$. Por lo tanto m^2-n^2 es igual a 3 por natural más r^2-s^2. Dando los valores posibles a r y s resulta que $r^2 \pm s^2$ es igual a cero o ±3 por lo tanto divisible por 3. Sí alguno de los números n, m, m±n es múltiplo de 5 completamos que xyz es múltiplo de 60, inó entonces $m=5k+r$, $n=5s+t$ con r, t en el conjunto {1,2,3,4} Por tanto $m^4-n^4=5$ por natural$+(r^4-s^4)$, reemplazando r,s por sus valores resulta que xyz es múltiplo de 60.

3) Consecuencia espectacular y bella! *El área de un triángulo rectángulo de lados naturales es un natural y múltiplo de 6.*

En efecto, el área es igual a $mn(m^2-n^2)$ por lo tanto natural. De las cuentas hechas en 2) resulta múltiplo de 6

Ejercicio:Probar que siempre un cateto de un triángulo rectángulo de lados naturales es par. Deducir otra demostración de que el área es natural.

4) Sin embargo, no todo múltiplo de 6 es área de un triángulo rectángulo de lados naturales, por ejemplo probar que 12 no es área de un triángulo rectángulo de lados naturales.

Ejercicio: no hay triángulos rectángulos de lados naturales y área igual a un cuadrado, por ejemplo 25,36,81. Ayuda que no ayuda: Sí área$=r^2$,una homotecia de razón r lleva el conjunto de triángulos de área uno sobre el conjunto de triángulos de área r^2.

5) Fibonacci (aprox. 1500 DC) descubrió un triángulo rectángulo de lados racionales y área natural. Es el (9/6,40/6,41/6) que tiene área igual a 5.

6) Usando la notación de 1) es claro que resolver el problema de encontrar los naturales s que son áreas de triángulos rectángulos de lados naturales es equivalente a resolver el siguiente problema algebraico:

Determinar los naturales s para los cuales es posible encontrar naturales m,n,d con $mcd(m,n) = 1$, m y n de distinta paridad, $m > n$, tal que $s = mn(m^2-n^2)d^2$.

Con esta reformulación algebraica del problema es muy fácil escribir un programa en BASIC para calcular los triángulos rectángulos de lados naturales y área menor o igual a 100.

* * * *

Cuando se trata de resolver un problema, una técnica es trasladarlo a otra región de la matemática. Si en el nuevo encuadre uno no sabe que hacer, una técnica conveniente es tratar de incluir el problema inicial en otro. Eso es lo que haremos con nuestro problema, de ahora en más consideraremos el siguiente problema:

> Dado un natural s, encontrar triángulos rectángulos de lados racionales y área s.

En particular, deseamos encontrar criterios que nos permitan decidir cuando existen triángulos rectángulos de lados racionales y de área s.

Notar que estos criterios permitirán decidir qué naturales no son áreas de triángulos rectángulos de lados naturales.

Notación: TRLR significa triángulo(s) rectángulo(s) de lados racionales. Algebraicamente, encontrar los TRLR de área s se traduce en:

(*) Encontrar los racionales $x < y < z$ que satisfacen las ecuaciones $xy = 2s$, $x^2 + y^2 = z^2$.

Para justificar la equivalencia de estos dos problemas recordemos que surge de aplicar el teorema de Pitágoras y el tercer criterio de congruencia que una terna de números reales x, y, z representan los lados de un triángulo rectángulo sí y solo sí $x^2 + y^2 = z^2$.

En los párrafos siguientes transformaremos el problema (*) en varios equivalentes, parte de estas equivalencias fueron realizadas en las últimas décadas por distintos matemáticos europeos y norteamericanos.

Lema 2. Fijemos un natural s. Entonces existen racionales $x < y < z$ que satisfacen las ecuaciones $xy = 2s$, $x^2 + y^2 = z^2$ sí y sólo sí es posible encontrar un racional b tal que b, b + s, b-s son todos cuadrados de números racionales.

Demostración: $\Longrightarrow$ $(z^2/4) \pm s = (x^2+y^2)/4 \pm (xy)/2 = ((x\pm y)/2\ )^2$. Por tanto si definimos $b = (z/2)^2$, resultan b, $b \pm s$ cuadrados de números racionales.

$\Longleftarrow$ Escribamos $b = r^2$, $b \pm s = (r_\pm)^2$ con r, $r_\pm$ números racionales positivos. definamos $x = r_+ - r_-$, $y = r_+ + r_-$,

$z = 2r$, es claro que son racionales y calculando se obtiene que $x^2 + y^2 = z^2$.

Fijemos un natural s, y mantengamos in mente la notación de la prueba del lema anterior.

Sea $F_s = \{(x,y,z)$: x,y,z racionales positivos, $x < y < z$ que satisfacen las ecuaciones $xy = 2s$, $x^2 + y^2 = z^2\}$

Sea $G_s = \{b$: b y $b \pm s$ son cuadrados de números racionales$\}$

Sea $\phi : F_s \longrightarrow G_s$ definida por $\phi(x,y,z) = (z/2)^2$

Sea $\psi : G_s \longrightarrow F_s$ definida por $\psi(b) = (r_+ - r_-, r_+ + r_-, 2r)$

Proposición 3: ϕ y ψ son funciones biyectivas y una es la inversa de la otra.

Prueba: $\phi(\psi(b)) = \phi(r_+ - r_-, r_+ + r_-, 2r) = (2r/2)^2 = r^2 = b$

$$\psi(\phi(x,y,z)) = \psi((z/2)^2) = (x,y,z)$$

puesto que $(z^2/4) \pm s = (x^2 + y^2)/4 \pm (xy)/2 = ((x \pm y)/2)^2$.

Ejercicio: Fijemos un orígen en el plano y un sistema de coordenadas ortogonales con centro en dicho punto. Sea ϑ la función de F_s en el conjunto de triángulos rectángulos definida por $\vartheta(x, y,z)$ = al triángulo rectángulo contenido en el primer cuadrante de catetos x y, hipotenusa z, con vértice opuesto a la hipotenusa igual al orígen. Probar que todo triángulo rectángulo de lados racionales y área s es congruente a $\vartheta(x,y,z)$ para (x,y,z) en F_s conveniente.

Conclusión: El problema (*) es equivalente a determinar los s tal que F_s resulta no vacío, el cual resulta equivalente a determinar los s tal que G_s es no vacío. El viejo problema de analizar sí s es área de TRLR es equivalente a analizar si G_s es no vacío.

Ahora definiremos una función de F_s en una curva elíptica $E_{s^2}(Q)$.

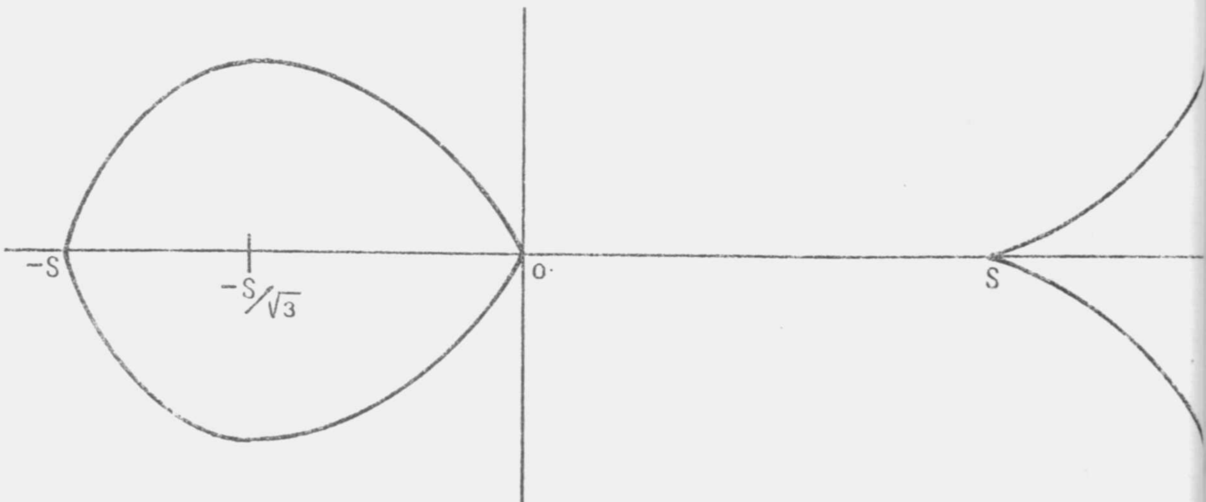
No se asuste el lector ya diremos qué es cada cosa.

De ahora en más la letra Q representa el conjunto de los números racionales.

Para un racional d definimos la <u>curva elíptica</u> $E_d(Q)$ igual al conjunto de pares de números racionales (x,y) que satisfacen la ecuación

$$y^2 = x^3 - dx$$

Si graficamos en el plano real la curva para $d = s^2$ se obtiene el siguiente dibujo



Cuidado! El dibujo puede consistir de sólo un número finito de puntos como sucede para d = 1,2,9

Fijemos ahora (a,b,c) en F_s, en consecuencia $a^2 + b^2 = c^2$, $a < b < c$, a,b,c son racionales positivos y $2s = ab$. Por lo tanto

$$((a+b)/2)^2=(c/2)^2+ s$$
$$((a-b)/2)^2=(c/2)^2- s$$

Multiplicando miembro a miembro se obtiene

$$((a^2-b^2)/4)^2 = (c/2)^4 - s^2$$

Sean $\qquad u=c/2 \quad , \quad v= (a^2-b^2)/4$

Por lo tanto

$$v^2= u^4 - s^2$$

multiplicando miembro a miembro por u^2 se obtiene

$$(uv)^2 = (u^2)^3 - s^2u^2$$

Sean $\qquad x=u^2 \ , \ y=uv$

De esto $\qquad y^2 = x^3 - s^2 x$

En consecuencia si partimos de (a,b,c) logramos un par (x,y) que pertenece a la curva elíptica $E_{s^2}(Q)$. Por ende podemos definir la siguiente función:

$$\upsilon : F_s \longrightarrow E_{s^2}(Q)$$

por la regla $\upsilon(a,b,c)=(x,y)=(c^2/4 \ , \ c(a^2-b^2)/8 \ )$

Preguntas que surgen: Cuál es la imágen de υ? Es υ inyectiva?

Probemos que υ es inyectiva.

Sí $\upsilon(a,b,c) = \upsilon(a',b',c')$ entonces $c^2/4 = c'^2/4$ implica $c = \pm c'$ y como ambos son positivos $c = c'$, Por tanto de la igualdad $c(a^2-b^2)/8 = c'(a'^2-b'^2)/8$ se deduce que $(a^2-b^2) = (a'^2-b'^2)$. Por Pitágoras se tiene que $(a^2+b^2) = (a'^2+b'^2) = c^2$, en consecuencia $2a^2 = 2a'^2, 2b = 2b'^2$; la positividad de a, a', b, b' implican $a = a', b = b'$. Por ende υ es inyectiva.

Probemos ahora que la imágen de υ es $\{(x,y) \in E_s2(Q)$ tal que x es el cuadrado de un número racional, e $y < 0\}$.

Denotemos por $\{\ldots\}$ el conjunto de la derecha. Probemos primero que la imágen de $\upsilon \subseteq \{\ldots\}$ y luego que $\{\ldots\} \subseteq$ Imágen de υ. Por definición de υ la primera coordenada de $\upsilon(a,b,c)$ es el cuadrado de un racional, además $a < b$, en consecuencia la segunda coordenada de $\upsilon(a,b,c)$ es negativa. Por lo tanto la primera inclusión es clara. Para la otra inclusión fijemos (x,y) en $\{\ldots\}$, por consiguiente $x = u^2$ con u racional positivo. Sea $v = y/u$. Por tanto $v^2 = y^2/x = x^2- s^2$. De esto, $v^2+s^2 = x^2$. Denotemos por t el denominador de la expresión reducida de u. Multiplicando miembro a miembro $v^2+s^2 = x^2$ por t^4 obtenemos que $(t^2v)^2+(t^2s)^2 = (t^2x)^2$. Ahora $t^2x = t^2u^2$ es un número natural; t^2s es natural pués es producto de naturales; $-t^2v$ es natural puesto que la igualdad $v^2+s^2 = x^2$ implica que el mínimo denominador de v^2 es igual a un divisor del denominador de x^2 que es t^2. Por consiguiente, el denominador de v es un divisor de t. En consecuencia $(-t^2v, t^2s, t^2x)$ es una terna pitagórica de naturales. Es fácil verificar que $mcd(-t^2v, t^2s, t^2x) = 1$. Por ende podemos aplicar el teorema de Kronecker. Sean a, b, naturales coprimos, $a > b$, de distinta paridad tal que $-t^2v = a^2-b^2$,

$t^2s = 2ab, t^2x = a^2+b^2$. Afirmamos que $(2b/t, 2a/t, 2u)$ está en F_s. En efecto, como $b<a$, se tiene que $2b/t$ es menor que $2a/t$. $(4a^2/t^2) + (4b^2/t^2) = 4(a^2+b^2)/t^2 = 4t^2x/t^2 = (2u)^2$.

$$(1/2)(2a/t)(2b/t) = 2ab/t^2 = t^2s/t^2 = s.$$

$\upsilon(2b/t, 2a/t, 2u) = (4u^2/4, 8u(b^2-a^2)/8t^2) = (x, u(t^2v)/t^2) = (x, y)$, lo cual prueba la inclusión deseada. Con esto completamos el cálculo de la imágen de υ.

Ejercicio: Fijemos s,d naturales y sean F_s, F_{sd^2} como los hemos definido en el páragrafo anterior. Sea $H : F_s \text{--->} F_{sd^2}$ definida por la regla $H(x,y,z) = (dx,dy,dz)$. Sea $K : F_{sd^2} \text{--->} F_s$ definida por $K(x,y,z) = (x/d, y/d, z/d)$. Verificar que H y K estan bien definidas, esto es, verificar que la terna imágen aterriza en el lugar correcto. Probar que K es biyectiva y que su función inversa es H. Concluir que F_s es (no)vacío sí y sólo sí F_{sd^2} es (no)vacío.

Como sabemos que F_5, F_6 son no vacíos qué otros F's son no vacíos?. Ejercicio: Verificar que $(24/5, 35/12, 337/60) \in F_7$; $(8/3, 21/2, 65/6) \in F_{14}$; $(12, 7/2, 25/2) \in F_{21}$; Sí $(a,b,h) \in F_s$, entonces la terna $(2abh/(2b^2-h^2)$, $(2b^2-h^2)/2h$, $(h^4+4b^2h^2-4b^4)/2h(2b^2-h^2))$ también pertenece a F_s y determina un triángulo rectángulo de área s no congruente al (a,b,h); Concluir que si F_s es no vacío entonces es un conjunto infinito.

En el ejercicio anterior propusimos probar que sí F_s es no vacío entonces es infinito. Se puede probar la siguiente:
Proposición: Un natural s es el área de un TRLR sí y sólo sí $E_{s^2}(Q)$ es un conjunto infinito.

La demostración que conozco usa los siguientes hechos a) si le agregamos un punto al infinito a la curva $E_{s^2}(Q)$ resulta un grupo abeliano b) la imágen de la función υ definida anteriormente es precisamente los elementos divisibles por dos c) el subgrupo de elementos de $E_{s^2}(Q)$ divisibles por dos tiene índice finito.

Conclusión: El problema (*) tiene solución sí y sólo sí la curva elíptica asociada a s^2 es infinita. Este último problema no ha sido completamente resuelto pero se ha logrado reescribirlo en el lenguaje de la teoría de las funciones analíticas donde al menos se han hecho conjeturas que dicen cuando una curva elíptica racional es infinita. Lamentablemente estas conjeturas no estan escritas en términos de s. Estas conjeturas resultan de unas conjeturas más generales llamadas conjeturas de Birch- Swinnerton-Dyer.

Ejercicio: Piense en triángulos rectángulos con catetos contenidos en los ejes coordenados, hipotenusa en el cuadrante $x > 0$, $y > 0$, y el vértice opuesto a la hipotenusa igual al $(0,0)$ y área s. Para cada uno de ellos marque en el plano el punto medio de la hipotenusa. Qué curva queda dibujada?.

Ejercicio: Probar que F_s es no vacío si y sólo si el sistema de ecuaciones $x^2+s = y^2$, $x^2-s = z^2$ tiene al menos una solución (x,y,z) con x,y,z racionales, sí y sólo sí el sistema de ecuaciones $u^2+sv^2 = t^2$, $u^2-sv^2 = r^2$ tiene al menos una solución (u,v,t,r) con u,v,t,r números enteros con v no nulo. Ayuda: sí (x,y,z) resuelve el primer sistema verificar que sí d es el denominador mínimo de x, entonces

$u=dx$, $v=d$, $t=zd$, $r=zd$ resuelve el segundo sistema. Pruebe además que la función que lleva a (x,y,z) que resuelve el primer sistema en (u,v,t,r) tiene por imágen el conjunto de soluciones (u,v,t,r) del segundo sistema con v distinto de cero. Notar que $(\pm t,0,t,\pm t)$ son soluciones del segundo sistema para cualquier entero t. Deduzca de los teoremas expuestos en [V] que F_1 es el conjunto vacío. En consecuencia no hay TRLR cuya área es el cuadrado de un número racional. Dar una interpretación geométrica a las funciones H y K.

Notar que cada vez que seamos capaces de calcular una solución del sistema $u^2+sv^2=t^2, u^2-sv^2=r^2$ con v distinto de cero entonces habremos construído explícitamente un TRLR y de área s, el (a,b,c) con $a=(t/v)-(r/v)$, $b=(t/v)+(r/v)$, $c=2u/v$.

Para $s=101$ la solución más pequeña (u,v,t,r) es

u=2015 242462 949760 001961 v=118 171431 852779 451900

t=2339 148435 306225 006961 r=1628 124370 727269 996961

Para $s=229$ la solución más pequeña es:

u=764646 440211 958998 267241 v= 9404 506457 489780 613180

t=777777 618847 556210 645041 r=751285 786287 393798 649441

Para $s=103$ se sabe que:

$(134\ 130664\ 938047\ 228374\ 702001\ 079697)^2$

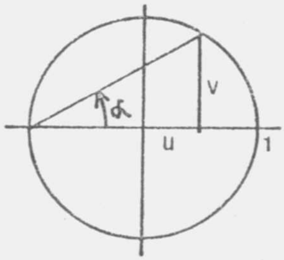
$\pm 103\ (7\ 18861\ 768365\ 914788\ 447417\ 161240)^2$

son cuadrados de naturales.

Como se puede apreciar el número de cifras a manejar es un poco elevado.

Ahora definiremos otra función σ de F_s en $E_{s^2}(Q)$.

Para esto fijemos (a,b,c) en F_s. Sean



$u=a/c, v=b/c$

en consecuencia $u^2+v^2=1$.

En el triángulo de la figura sea

$t=\text{tangente}(\alpha)$

Se tiene que

$u=(1-t^2)/(1+t^2)$, $v=2t/(1+t^2)$

En efecto, $\tan(\alpha) = t = v/(1+u)$, de esto, $v = t(1+u)$, reemplazando en $u^2+v^2 = 1$, y resolviendo la ecuación de segundo grado en u se obtiene $u = (-t^2\pm 1)/(1+t^2)$. Como u es nonegativo y $t \leq 1$ (pués $\alpha \leq 45$ grados) se tiene que $u = (1-t^2)/(1+t^2)$, $v = 2t/(1+t^2)$.

Sea $x=-st$, $y=s^2(1+t^2)/c$

Notar que $x<0$ e $y>0$.

Es fácil verificar que:

$$y^2=s^4(1+t^2)^2/ c^2 = x^3-s^2x$$

Sea

$$\sigma : F_s \longrightarrow E_{s^2} (Q)$$

definida por $\sigma(a,b,c)=(x,y)$

1) Escribir explícitamente x,y en términos de a,b,c.

2)Probar que si (x,y) es un elemento de $E_{s^2}(Q)$ con $x<0$, y positivo entonces (x,y) está en la imágen de σ. Ayuda considerar $a=|(s^2-x^2)/y|$, $b=|2sx/y|$, $c=|(s^2+x^2)/y|$.

3) Es σ inyectiva?.

Ahora describimos algunos resultados debidos esencialmente a Tunnnell (1983) y conjeturas sobre el problema (*).

Fijemos s un natural y supongamos que F_s es no vacío, Tunnell ha probado:

Sí s es impar, entonces

$$\# \{ (x,y,z) \text{ tal que } x,y,z \text{ son enteros satisfaciendo } 2x^2+y^2+8z^2=s \} =$$

$$=2\# \{ (x,y,z) \text{ tal que } x,y,z \text{ son enteros satisfaciendo } 2x^2+y^2+32z^2=s \}$$

Sí s es par, entonces

$$\# \{ (x,y,z) \text{ tal que } x,y,z \text{ son enteros satisfaciendo } 4x^2+y^2+32z^2=s/2 \}=$$

$$=(1/2)\# \{ (x,y,z) \text{ tal que } x,y,z \text{ son enteros satisfaciendo } 4x^2+y^2+8z^2=s/2 \}$$

Como los conjuntos en el teorema de Tunnell se pueden calcular fácilmente usando una computadora, se puede, en principio determinar los $s < 2000$ tal que F_s es no vacío. Atención! El teorema de Tunnel no proporciona ejemplos de TRLR y área s. Sólo dice que si existen entonces valen las igualdades!. Por otro lado afirma que si la igualdad no se satisface, entonces no existen TRLR y área s.

Tunnell usando estos teoremas e ingredientes de la teoría de Galois y otras herramientas matemáticas, además de ideas, logró probar:

Sí s es primo congruente a uno de los números 5,6,7 módulo 8, entonces F_s es no vacío.

Conjetura: sí s es libre de cuadrados y s es congruente a uno de los números 5,6,7 módulo 8, entonces F_s

es no vacío.

Se puede probar que esta conjetura es consecuencia de las conjetu- ras de Birch-Swinnerton-Dyer. Lamentablemente esta conjetura no dá una respuesta satisfactoria del problema (*) en el sentido de que no proporciona una condición necesaria y suficiente para s de modo que F_s resulte no vacío.

Tunnell nos proporciona una conjetura que satisface nuestros requerimientos.

Sea

$$g(q) = \sum_{m,n \text{ enteros}} (-1)^{m+n} q^{(4m^2+1)^2+16n^2}$$

Esta función está bien definida para q complejo de valor absoluto menor que uno.

Para cada t natural sea

$$\Theta_t(q) = \sum_{n \text{ entero}} q^{tn^2}$$

Nuevamente esta función está bien definida para q complejo de valor absoluto menor que uno.

Para las funciones producto $g\Theta_2$ y $g\Theta_4$ escribamos

$$g\Theta_2 = \sum_{n \text{ natural}} a(n)q^n$$

$$g\Theta_4 = \sum_{n \text{ natural}} b(n)q^n$$

Procediendo formalmente se puede calcular explícitamente tanto a(n), como b(n) para los primeros veinte naturales. Es fácil escribir un programa en BASIC para calcularlos en general.

Se puede probar (intentarlo como ejercicio) que a(n) para n impar es igual a

$$2\#\{\ (x,y,z) \text{ tal que } x,y,z \text{ son enteros satisfaciendo } 2x^2+y^2+32z^2=s\ \} -$$

$$\#\{\ (x,y,z) \text{ tal que } x,y,z \text{ son enteros satisfaciendo } 2x^2+y^2+8z^2=s\ \} -$$

Ahora podemos formular una conjetura de Tunnell.

Sí s/2 no es natural convengamos en escribir b(s/2)=0.

Conjetura de Tunnell

Sea s natural libre de cuadrados, entonces

F_s es no vacío sí y sólo sí a(s)+b(s/2)=0

Tunnell ha demostrado que esta conjetura es consecuencia de las conjeturas de Birch-Swinnerton-Dyer. Finalmente damos una lista de los números menores que 100 para los cuales F_s es el conjunto vacío:

1,2,3,10,11,17,19,26,33,35,42,43,51,57,58,59,66,67,73,74,82, 83,89,9797,o cualquier otro número igual a un cuadrado por uno de la lista.

Ejercicio: Sea F igual al cuerpo de los números reales o complejos. Definir $E_d(F)$. Probar que f(x,y) = (x,-y) es una función biyectiva de $E_d(F)$ en sí mismo. Probar que si F es el cuerpo de los números complejos g(x,y) = (-x,iy) es una una función biyectiva de $E_d(F)$ en sí mismo. En cada caso calcular la función inversa.

Como despedida recordamos que un número natural se dice congruente sí es igual al área de un TRLR.

```
90 Rem Cálculo de soluciones de u^2+sv^2=t^2,u^2-sv^2=r^2 con u
entre s y N.
100 Input "área deseada s":s
110 Input "número de pruebas N>s":N
120 for u=s to N
130 for r=1 to u
140 a=int(u/sqr(s))
150 for v=1 to a
160 led d=u*u-s*v*v-r*r
170 b=int(sqr(u*u+s*v*v))
180 if Abs(d)>0 then 240 else 190
190 for t=1 to b
200 let m=u*U+s*v*v-t*t
210 if abs(m)=0 then 220 else 230
220 print "encontré la solución";u;v;t;r
230 next t   240 next v   250 next r   260 print "trabaje
u";u
270 next u   280 end
```

Bibliografía:

Tunnell J. Inventiones Math. 72 (1983), 323-33.

Guy, Unsolved problems in number theory, Springer Verlag.

[D]Dickson. History of theory of numbers vol2.

[V]Vargas J. Sobre triángulos rectángulos, Revista de Educación Matemática, Vol 2, Número 3, 1985.

FACULTAD DE MATEMATICA, ASTRONOMIA Y FISICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CORDOBA