CITAR COMO
Molina, M. (2012). *Proyecto investigador. Plaza de Profesor Titular de Universidad.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

PROYECTO INVESTIGADOR

Estudio de componentes de la competencia algebraica que se sustentan en conocimiento de la estructura de la Aritmética y el Álgebra

QUE PRESENTA

MARTA MOLINA

Para optar a la plaza de Profesor Titular de Universidad, código 6/1/2012, adscrita al área de Didáctica de la Matemática, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada [Resolución de 27 de febrero de 2012, de la Universidad de Granada, BOE 65, 24233-24187].

Actividad Investigadora: Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico. Enseñanza y Aprendizaje del Álgebra.

Granada, Junio 2012
Dpto. Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Granada

ÍNDICE

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

El proyecto investigador que aquí se presenta se enmarca dentro de la línea de investigación *Pensamiento Numérico y Algebraico* en la que vengo desarrollando mi actividad investigadora dentro del área de Didáctica de la Matemática. Surge, en gran medida, del trabajo en equipo que venimos realizando en el seno de varios proyectos I+D+i en el departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y de mi estancia en otras universidades nacionales y extranjeras. Describimos aquí un línea de trabajo en la que se localiza gran parte de la investigación que he realizado hasta el momento, pero principalmente, en la que se planifica su continuación motivada por las vías de investigación abiertas identificadas en los trabajos realizados y por mi interés personal por la investigación en esta línea. Las cuestiones que se abordan conciernen a diferentes componentes de la competencia algebraica, partiendo de una amplia concepción del álgebra escolar (en adelante, álgebra) reconocida a nivel internacional. Concretamente se busca profundizar en el estudio de los procesos de desarrollo y uso de pensamiento relacional y sentido estructural, y en el uso y comprensión de dos sistemas de representación vinculados a la actividad algebraica: el lenguaje horizontal de igualdades y paréntesis (en adelante lenguaje HIP) y el simbolismo algebraico.

El documento se presenta estructurado en diez apartados, estando el primero de ellos dedicado a detallar el contexto institucional en el que desarrollo mi actividad investigadora (ver Figura 1). A continuación, para enmarcar la investigación que se propone, se presenta una síntesis de la evolución que a nivel internacional ha experimentado la investigación sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra, se atiende a la cuestión qué es el álgebra y se aborda la problemática de la enseñanza y aprendizaje del álgebra. Estos elementos junto con la definición de dos constructos clave en este trabajo, sentido estructural y pensamiento relacional, nos permiten formular con precisión y justificar el interés de la investigación que aquí se plantea.

La propuesta que se presenta es un plan de trabajo a corto y medio plazo. En el momento en que se presenta este documento ya se ha iniciado la investigación que se propone por medio de tres estudios que se encuentran en diferente nivel de desarrollo y que se describen al final de este documento. Cerramos el proyecto indicando la contribución que prevemos que el desarrollo de esta investigación supondrá para la innovación curricular y para la investigación en educación matemática.

CONTEXTO INSTITUCIONAL

Mi actividad investigadora, y en particular este proyecto de investigación, se enmarcan en la línea de investigación *Pensamiento Numérico y Algebraico* y, más concretamente, en la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, incluyendo su conexión con las matemáticas propias de la etapa de educación primaria en línea con la propuesta Early-Algebra. En la actualidad también colaboro en investigaciones sobre la estimación de cantidades de magnitudes continuas, la modelización como metodología de enseñanza, la invención y resolución de problemas, la influencia del lenguaje en la actividad matemática y la formación inicial de profesores. En estas tres líneas vengo desarrollando mi actividad investigadora de forma colaborativa con otros investigadores, la mayoría de ellos estudiantes de posgrado y personal docente e investigador adscrito a la Universidad de Granada. El contexto institucional de esta actividad investigadora es el grupo de investigación FQM-193 "Didáctica de la Matemática. Pensamiento numérico" y, de forma complementaria, diferentes proyectos de investigación dirigidos por el Dr. Enrique Castro y financiados por el Plan nacional de Investigación, Desarrollo e innovación. Concretamente los siguientes proyectos, el último aún en vigencia:

- "Representación y resolución de problemas en educación matemática" (2003-2005),
- "Representaciones, nuevas tecnologías y construcción de significados en educación matemática" (2006-2009)
- "Modelización y representaciones en educación matemática" (2010-2012).

En el desarrollo de mi actividad investigadora también he colaborado y colaboro con investigadores de otras universidades, entre los que destaco a la Dra. Rebecca Ambrose (Universidad de California-Davis), el Dr. John Mason (Open University y Oxford University) y el Dr. Bernardo Gómez (Universidad de Valencia).

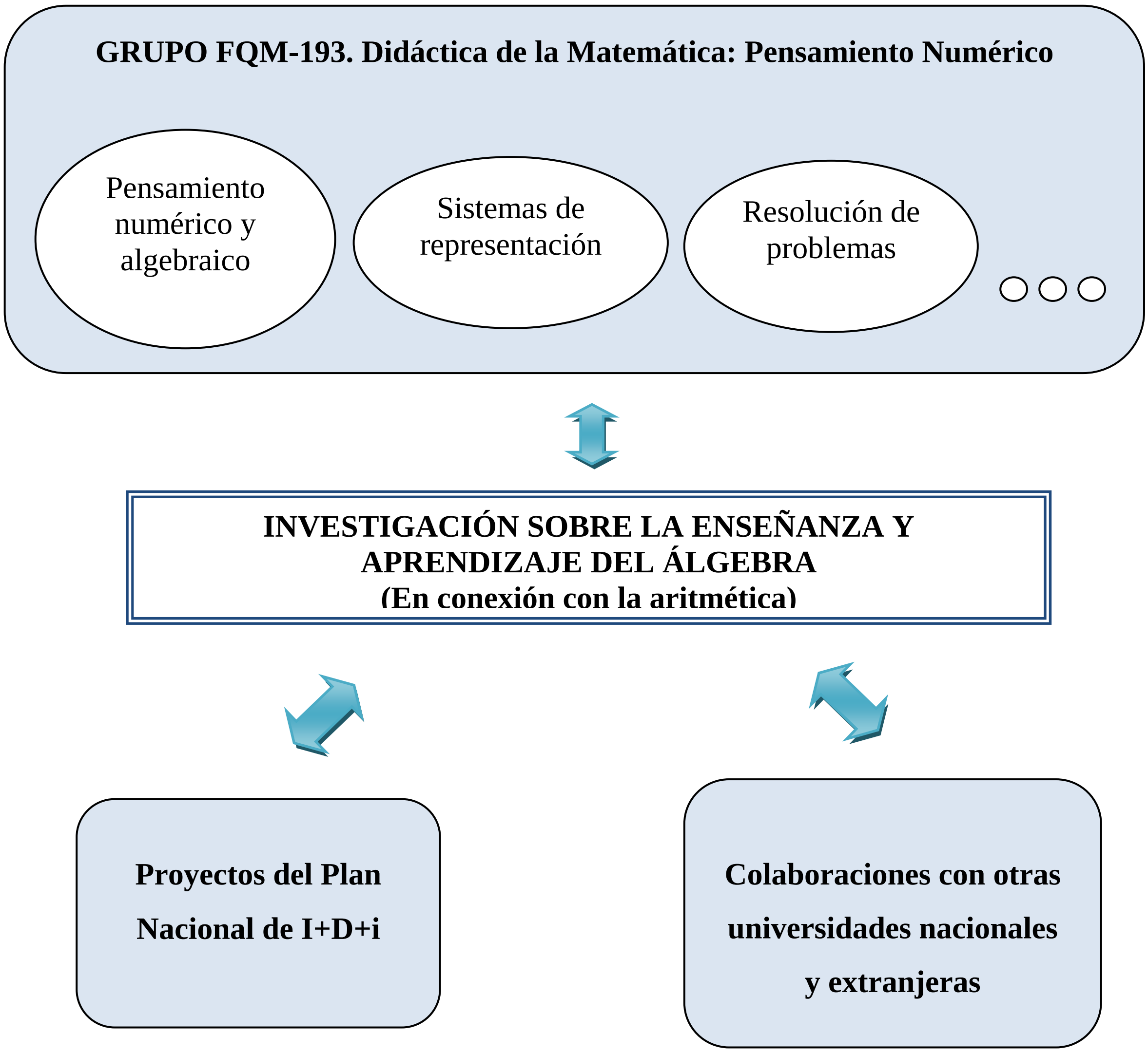

Figura 1. Marco en que se desarrolla mi actividad investigadora

Grupo FQM-193

El grupo FQM-193 al pertenezco desde el año 2003, inicialmente como becaria del programa de Formación de Profesorado Universitario (FPU) y posteriormente como personal (laboral) docente e investigador adscrito al área de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada, está dirigido por el Dr. Luis Rico y reconocido por el Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e innovación, del cual recibe financiación desde su constitución en 1988.

Este grupo consta en la actualidad de 26 miembros que realizan su labor investigadora en las Universidades de Córdoba, Granada y Málaga, la Universidad Carlos III de Madrid y la Universidad de los Andes (Colombia), y pertenecen, a nivel nacional, al grupo "Pensamiento Numérico y Algebraico" de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). El objetivo principal de nuestra actividad como grupo es comprender la naturaleza del pensamiento matemático, de su enseñanza y de su aprendizaje, y usar tal conocimiento en la práctica para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Reconocemos ambas acciones como fines principales en la investigación en Educación Matemática.

Inicialmente el campo de estudio considerado por el grupo fue la aritmética escolar y las nociones básicas de número, incluyendo los sistemas numéricos superiores (enteros, racionales y decimales), y se extendía al estudio sistemático de las relaciones y estructuras numéricas, la teoría de números, el inicio del álgebra, los procesos infinitos que dan lugar al sistema de los números reales y los conceptos básicos del análisis. Por este motivo se integró en la denominación del grupo el término “Pensamiento numérico”.

Este interés por el pensamiento numérico ha estado acompañado de los siguientes supuestos teóricos que fueron explicitados a final del pasado siglo y que aparecen recogidos en la página web del grupo http://fqm193.ugr.es/:

- Consideración de **la construcción del conocimiento matemático como un fenómeno social y cultural,** cuya importancia para la sociedad tecnológica actual es determinante. Se tiene en cuenta que la educación matemática desempeña un papel relevante en la transmisión de los significados y valores compartidos en nuestra sociedad y se considera críticamente el conocimiento matemático y las acciones comunicativas mediante las que se transmite.
- Concepción de la **investigación como indagación sistemática con fines epistémicos** y reconocimiento de la reflexión permanente sobre los problemas de la práctica escolar como sustento de la investigación en educación matemática.
- **Consideración del carácter sistémico de cualquier plan de formación en matemáticas dentro del sistema educativo**. Se valora el currículo como un plan operativo con diferentes dimensiones y diversos niveles de reflexión e implementación.
- El estudio del conocimiento significativo en matemáticas, el dominio de sus procedimientos, el desarrollo y mejora de capacidades, el diagnóstico y tratamiento de los errores y dificultades en la comprensión de los escolares junto con una aproximación desde el constructivismo social **centra la perspectiva cognitiva** de los trabajos del grupo.

- **La aproximación fenomenológica a contextos y situaciones junto con un enfoque funcional de las matemáticas escolares** caracterizan el interés por el carácter aplicado del conocimiento matemático.
- **Se consideran la formación inicial y permanente del profesorado de matemáticas** y la autonomía intelectual y profesional del educador matemático como intereses prioritarios de investigación.

En la actualidad la investigación que se realiza en este grupo se enmarca dentro de nueve líneas de investigación. A continuación sintetizamos cada una de ellas concretando posteriormente en cuales se sitúa el proyecto de investigación que aquí se presenta:

1. *Pensamiento numérico (y algebraico):*

Esta línea de investigación surge de aquellos trabajos en los que la prioridad de estudio se establece sobre los contenidos matemáticos, particularmente sobre las estructuras numéricas, las estructuras algebraicas, los procesos infinitos, el cálculo y el análisis matemático.

2. *Sistemas de representación:*

Esta línea se interesa por indagar sobre las representaciones externas e internas que intervienen en los procesos de aprendizaje de conceptos, procedimientos, resolución de problemas, actitudes y metacognición en matemáticas. Algunos de los intereses de esta línea son averiguar cómo los estudiantes representan los conceptos matemáticos (interna y externamente), qué significados les asocian, qué relaciones estructurales desarrollan, a qué representaciones dan prioridad, cómo conectan las diferentes representaciones de un mismo campo conceptual entre sí y que juego de interacciones se produce entre las representaciones internas y externas.

3. *Resolución de problemas:*

Esta línea focaliza su atención en la resolución de problemas como contenido transversal en el aprendizaje de las matemáticas. Trata de dilucidar y establecer relaciones con otros aspectos que condicionan el proceso de planteamiento y resolución de problemas matemáticos, en los distintos niveles del sistema educativo.

4. *Historia y educación matemática:*

Esta línea aborda aspectos relacionados con la evolución de los conceptos matemáticos y su presentación en los libros antiguos de texto, las aportaciones didácticas, sociales y matemáticas de los autores españoles y las influencias epistemológicas en la construcción de las matemáticas y su enseñanza en España.

5. *Diseño, desarrollo e innovación en el currículo de matemáticas:*

En esta línea se ha elaborado un concepto de currículo estructurado en cuatro ejes y analizado según cuatro niveles de reflexión. Este sistema de dimensiones y niveles junto con un conjunto de organizadores del currículo de matemáticas, proporcionan fundamento para un procedimiento denominado análisis didáctico, mediante el cual llevar a cabo el diseño, puesta en práctica y evaluación de unidades didácticas de matemáticas. Este análisis es una herramienta básica de investigación para esta línea y permite abordar los problemas de la planificación y la práctica de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares.

6. *Formación de profesores de matemáticas:*

La amplia experiencia profesional de los integrantes del grupo en formación de profesores de matemáticas ha llevado a promover y participar en investigaciones sobre las líneas prioritarias del área relacionadas con el desarrollo y conocimiento profesional del profesor de matemáticas. Se atiende a la formación inicial de profesores de matemáticas de educación primaria y secundaria, a la caracterización profesional del profesor de matemáticas en ejercicio y al papel de las competencias profesionales de los maestros y los procesos formativos relacionados con ellas, entre otros temas relacionados.

7. Competencia matemática:

La noción de competencia constituye un componente estructural y organizativo de los programas formativos basados en un enfoque funcional del aprendizaje. Algunos de los intereses de esta línea son los avances sobre el alcance y la delimitación conceptual de lo que significa ser competente en matemáticas, la caracterización de las actuaciones y decisiones docentes que promueven el desarrollo de esta competencia básica así como el diseño y selección de tareas y la elección de criterios, medios e instrumentos para evaluar la competencia matemática.

8. *Análisis de la investigación en didáctica de la matemática:*

Esta línea de trabajo aborda cuestiones relacionadas con los mecanismos de difusión de la investigación y su impacto en la comunidad científica. Se investiga cuáles son las redes sociales académicas que se generan tanto en los procesos de investigación como en su difusión y se analiza la visibilidad e identificación de los autores, centros y grupos de investigación de determinados ámbitos científicos.

9. *Calidad y evaluación de programas de formación en matemáticas:*

En esta línea de investigación se desarrollan proyectos dirigidos a evaluar la calidad de programas de formación en matemáticas, con particular atención a los programas de formación de profesores de matemáticas. Los proyectos se realizan teniendo en cuenta el contexto en el que se ubican los estudiantes; se enfocan al impacto de los programas en las instituciones, a la caracterización del aprendizaje de los estudiantes, a la puesta en práctica de los aprendizajes por parte de los estudiantes y al efecto del programa en el aprendizaje de los escolares; y tienen el propósito de analizar y mejorar el diseño y la implementación de los programas en sus dimensiones de relevancia, eficacia y eficiencia.

En concreto, el proyecto investigador que se presenta se enmarca dentro de las tres primeras líneas de investigación del grupo aquí descritas al considerarse como objeto de estudio procesos cognitivos relativos a la actividad matemática realizada por estudiantes de diferentes niveles educativos en contextos numéricos y algebraicos, implicando el uso de diferentes sistemas de representación y la actividad de invención y resolución de problemas resolubles algebraicamente.

1. LA INVESTIGACIÓN EN ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA

La enseñanza y aprendizaje del álgebra ha sido objeto de intensa y continuada atención por la comunidad de investigadores en Didáctica de la Matemática desde hace ya más de tres décadas. Tomando como referencia los trabajos presentados en los congresos anuales de la comunidad internacional de investigadores y educadores matemáticos conocida con el nombre de PME (Psychology of Mathematics Education), iniciados en 1977, Kieran (2006) aporta una perspectiva sintética de cómo la investigación en esta temática ha ido evolucionando a nivel internacional. En la Tabla 1 presentamos de forma esquemática las temáticas de interés, concepciones del álgebra (ver próximo apartado) y marcos teóricos predominantes en cada periodo identificados por Kieran.

1977-1985	1985-1995	1995-2006
TEMÁTICAS DE INTERÉS		
Interpretación de símbolos y signos		
Uso de procedimientos algebraicos y resolución de ecuaciones		
Resolución de problemas algebraicos		
Análisis y detección de errores		
Transición de la aritmética al álgebra		
	Uso de herramientas tecnológicas	
	Uso de múltiples representaciones	
	Estudio de las funciones y del cambio	
	Modelización de problemas reales	
	Desarrollo de comprensión de los conceptos algebraicos	
	Generalización y demostración	
		Álgebra en la educación primaria (Early-Algebra)
		Enseñanza del álgebra y formación de profesores.
		Modelización dinámica de situaciones físicas y otros escenarios de álgebra dinámica
CONCEPCIONES DEL ÁLGEBRA		
Lenguaje algebraico		
Resolución de problemas		
Estudio de estructuras		
	Funciones y estudio del cambio	
	Estudio de patrones y generalización	
	Modelización	
MARCOS TEÓRICOS		
Piagetianos		
Desarrollo histórico del álgebra		
	Constructivismo	
		Perspectivas socioculturales

Tabla 1. Evolución de la investigación en enseñanza y aprendizaje del álgebra desde 1977 a 2006 en el seno de los congresos anuales del PME

Existen trabajos sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra previos a la fundación del PME, por ejemplo los desarrollados a principios del pasado siglo por Hotz (1918), Thorndike, Coob, Orleans, Symonds, Wald y Woodyard (1923) y Reeve (1926) sobre la dificultad relativa de la resolución de varios tipos de ecuaciones lineales y el papel de la práctica en el aprendizaje del álgebra (Kieran, 2007; Wagner y Parker, 1999). Los primeros trabajos realizados en esta línea de investigación partían de una concepción del álgebra como herramienta procedimental y representacional, analizando la dificultad de procedimientos algebraicos específicos (ej., resolución ecuaciones lineales) y los errores cometidos por los estudiantes en el uso de los mismos (Kieran, 2007).

A partir de la década de los 70 fue cuando el número de investigadores interesados por la enseñanza y aprendizaje del álgebra comienza a crecer y a constituirse como una comunidad (Wagner y Kieran, 1989). En la década de mediados de los 70 a mediados de los 80, según recoge Kieran (2006), las investigaciones realizadas tendían a centrarse en conceptos y procedimientos algebraicos, la resolución de problemas algebraicos y las dificultades de los estudiantes en la transición de la aritmética al álgebra, asumiendo el currículo existente. Estos trabajos se limitaban a considerar el simbolismo algebraico como representación y los marcos teóricos para analizar los datos eran mayormente de tipo Piagetiano. El desarrollo histórico del álgebra se utilizaba como marco teórico, guiando la reflexión sobre la evolución del uso del simbolismo por los estudiantes.

A partir de mediados de los 80 se fue ampliando el tipo de representaciones y las concepciones del álgebra consideradas. En esta década tuvo un impacto destacado la incursión de las tecnologías en el aprendizaje del álgebra y la emergencia del constructivismo. Este último condujo la reflexión hacia los modos en que los estudiantes desarrollaban su comprensión de los conceptos y procedimientos algebraicos, disminuyendo el interés por el análisis y detección de errores. El énfasis prioritario en los aspectos simbólicos sufrió ciertos cambios al comenzar a integrarse el estudio de las funciones en la investigación sobre álgebra, lo que condujo a considerar las representaciones gráficas y tabulares además de las simbólicas. También se desarrolló la visión del álgebra como actividad de generalización, considerando la notación algebraica como una herramienta para expresar de forma general relaciones abstraídas de patrones y justificar la equivalencia de diferentes expresiones. En ambos contextos se explora el uso de diferentes sistemas de representación.

La posterior introducción de perspectivas socioculturales del aprendizaje, durante los 90, condujo a analizar los factores sociales que influyen en el aprendizaje del álgebra con un especial interés hacia los gestos y metáforas y otras herramientas culturales como fuentes de significado. Así mismo, como se muestra en la Tabla 1, se dirige la atención al papel del profesor en el aprendizaje del álgebra, se explora la modelización en escenarios dinámicos y se comienza a considerar la introducción del álgebra en la educación primaria. Esta propuesta, conocida como Early-Algebra, viene apoyada por evidencias aportadas por diversos estudios de las capacidades de generalización y habilidades para expresar generalidad de los alumnos de educación primaria (Bastable y Schifter, 2007; Lins y Kaput, 2004; Mason, 1996).

La evolución en la investigación en la enseñanza y aprendizaje ha conducido al panorama de investigación actual en el que se pone en juego una amplia concepción del álgebra que da cabida a gran diversidad de problemas de investigación y en la que se percibe un fuerte componente teórico y la consideración de una amplia diversidad de teorías.

2. ÁLGEBRA ESCOLAR

Para concretar el marco teórico de partida en este proyecto investigador, comenzamos atendiendo a las diferentes concepciones que se distinguen del álgebra en la literatura del área. El reconocimiento de la multidimensionalidad del álgebra conduce a la adopción de una amplia visión de la misma que, en la actualidad, es ampliamente aceptada y defendida en la comunidad de investigadores. Kaput, Carraher y Blanton (2008) argumentan que las concepciones cerradas del álgebra resultan un obstáculo al tratar de identificar modos en que el aprendizaje del álgebra puede partir de las habilidades y conocimientos previos de los estudiantes o puede ser integrado en el currículo de la Educación Primaria. Citando a Bell (1988) y Vergnaud (1989), Bednarz, Kieran y Lee (1996) insisten en que sólo un equilibrio entre las diferentes componentes del álgebra y la consideración de las variadas situaciones que las hacen significativas, pueden permitir a los alumnos comprender en profundidad la pertinencia del álgebra, su estructura, el significado de los conceptos algebraicos fundamentales y el uso de razonamiento algebraico.

Hasta hace algo más de una década en la investigación relacionada con la enseñanza y aprendizaje del álgebra había una asunción mayormente implícita de que el pensamiento algebraico y, por tanto, la actividad algebraica, sólo podía tener lugar en la presencia de lenguaje simbólico (Sutherland, Rojano, Bell y Lins, 2001). Un ejemplo lo encontramos en el trabajo de Usiskin (1988) quien afirma: “el álgebra escolar tiene que ver con la comprensión de las `letras´ […] y sus operaciones, y consideramos que los estudiantes estudian álgebra cuando encuentran por primera vez las variables” (p. 8).

Actualmente el uso del simbolismo algebraico sigue considerándose un elemento esencial del álgebra escolar, no así un requisito para que tengan lugar modos de pensamiento y actividad de tipo algebraico.

3.1. Concepciones del álgebra

Son numerosos los autores que han tratado de precisar lo que ellos mismos entienden por álgebra o lo que se entiende como tal en la comunidad de investigadores en educación matemática. La identificación de componentes o concepciones del álgebra ha sido utilizada para proponer diferentes enfoques en la introducción y enseñanza del álgebra escolar y para analizar sus conexiones con otras áreas del currículo. Usiskin (1988), Bednarz et al. (1996), Kaput (1999, 2011), Drijvers y Hendrikus (2003), Kaput et al. (2008) y Drijvers, Goddijn y Kindt (2011) son algunos de los autores que han tratado esta cuestión. Recogemos a continuación las principales concepciones que identificamos a partir del análisis de sus trabajos.

Estas concepciones —también denominadas componentes, enfoques, perspectivas o visiones de forma casi sinónima—, no son disjuntas, existen numerosas relaciones entre las mismas. Así mismo, en la práctica educativa no pueden ser separadas radicalmente debido a que una situación o contexto a menudo provoca actividades algebraicas correspondientes a diferentes visiones del álgebra (Drijvers y Hendrikus, 2003).

Aritmética generalizada y estudio de patrones

Dentro de esta concepción del álgebra, como se pone de manifiesto por el título dado a este epígrafe, podemos distinguir dos componentes. Ambas están basadas en la consideración de la generalización como raíz del álgebra y de la exploración, identificación y expresión de regularidades y patrones como actividades algebraicas. La distinción entre “aritmética generalizada” y “estudio de patrones” radica en diferenciar entre patrones y leyes numéricas relativas a la estructura aritmética, la cuál es en general análoga a la estructura del álgebra, y aquellos patrones asociados a situaciones no numéricas o específicos de situaciones numéricas particulares tales como los números figurados o secuencias como las que se muestran a continuación:

$$1^3 + 2^3 = 9 = (1+2)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1+2+3)^2$$

En ambos casos interviene la generalización y puede utilizarse el simbolismo algebraico para capturar, revelar y describir los patrones y estructuras, haciendo uso de las letras con el significado de variables, más concretamente de números generalizados. Según cuál de las dos sub-dimensiones de esta concepción queramos destacar en este proyecto utilizaremos el término Estudio de patrones o Aritmética generalizada.

Drijvers y Hendrikus (2003) aluden a esta doble concepción del álgebra al argumentar, por una parte, que el álgebra tiene sus raíces en la aritmética y depende fuertemente de su fundamentación aritmética y, por otra, que la aritmética tiene muchas oportunidades para simbolizar, generalizar y razonar algebraicamente.

Enmarcamos en esta concepción del álgebra las argumentaciones de Gómez (1995), Hewitt (1998) y Mason, Graham y Johnston–Wilder (2005) sobre la conexión entre la aritmética y el álgebra. Gómez (1995) señala que el álgebra generaliza a la aritmética y la aritmética, por su parte, se apropia de su lenguaje horizontal de igualdades y paréntesis. En términos de Hewitt (1998) y Mason et al. (2005), la aritmética consiste en el aprendizaje de métodos (generalidades implícitas) para hacer cálculos aritméticos y se centra en la obtención del resultado, siendo el álgebra lo que permite encontrar una forma estructurada de obtener dicho resultado. Usiskin (1995) se basa en esta concepción del álgebra para justificar la importancia del aprendizaje del álgebra por todos los estudiantes: “Si haces algo una sola vez, probablemente no necesitas el álgebra. Pero si haces un proceso repetidamente, el álgebra te facilita un lenguaje muy simple para describir lo que estás haciendo” (p. 23).

Una posición extrema de la concepción del álgebra como aritmética generalizada fue defendida por algunos investigadores en el siglo XIX considerando que la construcción y transformación de expresiones algebraicas vienen dadas por las propiedades de la aritmética, y oponiéndose a la consideración del uso algebraico de los números imaginarios, irracionales y negativos al no poder ser interpretados como cantidades (Kieran, 1990).

Funciones

El álgebra incluye el estudio de relaciones entre variables y, por tanto, de funciones y gráficos (Vergnaud, 1997). Este enfoque sugiere un estudio del álgebra centrado en el desarrollo de experiencias con funciones y familias de funciones en situaciones de la vida real en las que relaciones cuantitativas pueden explicarse por medio de esos modelos (Heid, 1996). En este caso, si interviene el simbolismo algebraico, las letras representan variables con el significado de cantidades cambiantes.

Resolución de problemas

El álgebra es una herramienta potente para la resolución de problemas, en especial los que pueden ser formulados en términos de ecuaciones e inecuaciones. Estos problemas no tienen por qué provenir de las matemáticas en sí mismas; a menudo proceden de otras áreas como la física, economía, vida profesional, etc. En caso de utilizarse simbolismo, las letras tienen el significado de incógnitas y parámetros. Esta concepción del álgebra es la más próxima a los orígenes del álgebra como herramienta privilegiada para la expresión de métodos generales que resuelven clases de problemas (Kieran, 2007).

Incluimos dentro de esta concepción la modelización de fenómenos físicos, si bien otros autores prefieren ubicarla dentro del estudio de relaciones funcionales.

Estudio de estructuras

Usiskin (1988) distingue esta concepción en la que las letras se utilizan en expresiones algebraicas como un objeto arbitrario en una estructura, no siendo necesaria su vinculación a números o cantidades como referentes. El álgebra se entiende aquí como el estudio de estructuras por medio de las propiedades que se le atribuyen a las operaciones con números reales y polinomios. En este sentido tiene una estrecha conexión con la concepción del álgebra como aritmética generalizada. Esta es la perspectiva del álgebra que se aborda, por ejemplo, cuando se trabaja la obtención de expresiones equivalentes (ej., simplificación o manejo de identidades algebraicas) en el contexto de expresiones algebraicas descontextualizadas.

Lenguaje algebraico

El último enfoque se centra en el lenguaje, considerando el álgebra como un medio de expresión de ideas matemáticas, en otras palabras, como un sistema de representación. El álgebra dispone de un lenguaje propio estandarizado con un conjunto de símbolos, signos y reglas para su uso. Este lenguaje expresa acciones en, y relaciones entre, cantidades u otro tipo de números. Es un lenguaje compacto e inequívoco lo que hace que sea altamente aplicable en otras áreas. Se utiliza para representar ideas algebraicas separadas del contexto inicial y concreto del que surgen, ésta es una de sus fortalezas: nos permiten separarnos e incluso olvidar los referentes para producir resultados de forma más eficiente (Arcavi, 1994).

El término lenguaje algebraico es utilizado por algunos autores como Drouhard y Teppo (2004) para referir a una parte del lenguaje matemático formado por simbolismo algebraico, lenguaje natural y representaciones algebraicas compuestas (ej., tablas, diagramas, gráficos,..). Otros en cambio lo utilizan únicamente para referir al simbolismo algebraico. En relación con este segundo significado, es habitual en su análisis el uso de términos lingüísticos como sintaxis o semántica, sin embargo aunque autores como Drouhard (2001) y Kirshner (1987) han demostrado que puede considerarse como un lenguaje, la mayoría de los autores no entran a tratar esta problemática.

3.2. Tipos de actividades algebraicas

Las diferentes concepciones condicionan el contexto, sentido, propósito y motivación para emprender actividades de tipo algebraico ya sean de carácter generacional o transformacional (Kieran, 1996, 2007). Por actividades generacionales referimos a aquellas que conducen a generar representaciones de ideas algebraicas. Por ejemplo, la generalización de relaciones surgidas del estudio de patrones numéricos o geométricos y su expresión ya sea verbal o simbólica, la generación de ecuaciones para representar una situación problema o la expresión de reglas que gobiernan las relaciones numéricas. Por otra parte, las actividades transformacionales implican el uso de simbolismo algebraico y están guiadas por la aplicación de reglas y procedimientos, tales como factorizar, expandir, operar expresiones polinómicas, resolver ecuaciones e inecuaciones, etc. Estas actividades requieren desarrollar significado para la equivalencia de expresiones y capacidades como el reconocimiento de la estructura de una expresión o la identificación de las manipulaciones más eficientes a realizar.

Utilizando las acciones diferenciadas por Mason et al. (2005) para definir las raíces del álgebra, señalamos como motivación de las actividades generacionales las acciones de experimentar estructura y generalidad y necesitar encontrar las palabras y símbolos para expresarlas. En el caso de las actividades transformacionales, encontrar múltiples representaciones para una misma generalidad o el uso de símbolos como incógnitas y tener expresadas las restricciones respecto de las mismas por medio de símbolos, son ejemplos de acciones que provocan la necesidad de reglas para la transformación de expresiones.

Kieran (1996, 2007) distingue también otro tipo de actividades, no exclusivamente algebraicas, las cuales denomina globales o avanzadas e incluyen la modelización, la demostración, la elaboración de conjeturas, la búsqueda de estructura, el trabajo con patrones y el estudio del cambio. Este tipo de actividades se corresponden en cierto modo con las concepciones del álgebra entendidas como enfoques en la actividad algebraica, y suelen conducir a actividades de tipo generacional.

3.3. Fuentes de significado

La multidimensionalidad del álgebra anteriormente descrita permite reflexionar sobre diferentes fuentes de significado para las nociones y el simbolismo algebraico. En esta reflexión nos apoyamos en la discusión realizada al respecto por Kieran (2007).

Una de las fuentes de significado a destacar, que conecta principalmente con la concepción del álgebra como resolución de problemas pero que también puede relacionarse con la concepción denominada funciones, es el contexto del problema o situación de partida. En este caso las letras y signos operacionales tienen un significado externo al álgebra relativo a una situación o evento descrito en un problema (el cual puede referir a una situación matemática).

En conexión con la concepción del álgebra como aritmética generalizada y como el estudio de estructuras, actúan como fuente de significado la estructura algebraica y aritmética en sí mismas. La habilidad de manipular el simbolismo algebraico con éxito requiere comprensión de las propiedades estructurales de las operaciones y relaciones matemáticas.

Centrando la atención en las representaciones que se ponen en juego en la actividad algebraica, lo que alude a la concepción del álgebra como lenguaje algebraico pero no se reduce a la misma, se distingue la traducción entre representaciones como fuente de significado. Coordinando objetos y acciones con diferentes representaciones como, por ejemplo, gráficos y simbolismo algebraico, se enriquece la información y percepción aportada por el altamente conciso simbolismo algebraico.

En línea con tendencias recientes en la investigación en educación matemática, Kieran (2007) destaca otra fuente de significado que es personal y exterior a las matemáticas y al contexto problema, y surge de centrar la atención en los procesos de producción de significado puestos de manifiesto por los estudiantes en la actividad matemática. Esta fuente hace referencia al uso de gestos, movimientos corporales, palabras, metáforas y artefactos. Consiste en aspectos relativos a la actividad corporal del estudiante, a su uso del lenguaje y a sus experiencias previas.

3. ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA

> *"Hay una etapa en el currículo en la que la introducción del álgebra puede hacer complicadas las cosas simples, pero no enseñar álgebra hará que pronto resulte imposible hacer simples cosas complicadas."*
>
> (Tall y Thomas, 1991, p.128)

El álgebra es un paso importante en el aprendizaje de las matemáticas. No solo requiere de cálculo simbólico en un modo y extensión nunca antes visto por los estudiantes, también incluye nuevos conceptos (ej., ecuación, función, variable, parámetro) que no forman parte de la aritmética (Vergnaud, 1997).

El contenido del álgebra escolar ha cambiado poco con los años, especialmente durante el siglo XX. El álgebra escolar ha tenido en este tiempo una marcada orientación simbólica y estructural, incluyendo como contenidos la simplificación de expresiones, la resolución de ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones con métodos formales y la factorización de polinomios y expresiones racionales, los cuales se aplican a la resolución de problemas (algebraicos) verbales (Kieran, 1992, 2007). El estudio de las funciones también se ha considerado pero en un segundo plano.

En el siglo XXI enfoques más reformistas dan un mayor peso al estudio del cambio así como al uso de sus múltiples representaciones y a la modelización de problemas "reales" con el uso de tecnología (Kieran, 2007). Los variados enfoques curriculares existentes en la actualidad a nivel internacional combinan y priorizan de forma diferente las concepciones del álgebra, observándose que aquellos que dan más énfasis a la resolución de problemas realistas tienden a minimizar la atención hacia las transformaciones algebraicas (Sutherland, 2002; citada por Kieran, 2007). El debate actual se sitúa en qué es lo esencial en el aprendizaje del álgebra, partiendo de un acuerdo en el reconocimiento de la importancia del aprendizaje del álgebra, por todos los estudiantes, dentro de la educación obligatoria. Otro de los temas en discusión es la relación entre las habilidades procedimentales y la comprensión conceptual en la enseñanza y aprendizaje del álgebra (Dijvers et al., 2011). Algunos investigadores destacan como objetivo de la enseñanza del álgebra el desarrollo de habilidades de razonamiento y de resolución estratégica de problemas, sentido simbólico y flexibilidad más que fluidez procedimental. La postura que nosotros asumimos es el fomentar un equilibrio entre componentes procedimentales y estructurales.

4.1. Visión tradicional de la enseñanza del álgebra

La enseñanza del álgebra se ha planteado tradicionalmente desde la concepción del álgebra como aritmética generalizada, precedida por años de intensa formación aritmética. La justificación de esta organización temporal es atribuida, además de a la mayor abstracción del álgebra, a razones históricas: el álgebra surgió de la aritmética ante la necesidad de sistematizar y describir propiedades generales y procedimientos generales para resolver clases de problemas (Banerjee, 2011; Lins y Kaput, 2004). Dicho orden va acompañado de una separación estricta entre la aritmética, centrada en los hechos numéricos, la fluidez en el cálculo y los problemas verbales de valores concretos y el álgebra, que se ocupa, entre otras cuestiones, del estudio y simbolización de la generalización de la aritmética, las funciones y las variables.

El enfoque elegido, aritmética generalizada, puede justificarse aludiendo al carácter inductivo del mismo: se espera que el estudiante adquiera conocimiento de las relaciones matemáticas y la estructura de las operaciones a partir de su aprendizaje de la aritmética. Las expresiones algebraicas se introducen como generalizaciones de operaciones con cantidades y rápidamente se pasa a considerarlas como objetos matemáticos en los cuales se llevan a cabo operaciones estructurales (ej., combinación de términos lineales, factorización, u operar de igual modo en ambos miembros de una ecuación) (Kieran, 1992). La introducción del álgebra va enfocada al aspecto sintáctico, asumiéndose que las dificultades de los estudiantes son debidas a la complejidad de su sintaxis (Booth, 1989).

Variados estudios muestran que bajo este modelo de enseñanza muchos alumnos desarrollan una pobre comprensión de las relaciones y estructuras matemáticas (ej., Booth, 1982; Greeno, 1982, Kieran, 1989, 1992, 2007; MacGregor, 1996; Schifter, 1999) y muestran desconexión entre sus conocimientos aritméticos y sus conocimientos algebraicos (Carpenter y Franke, 2001; Cerulli y Mariotti, 2001; Warren, 2001, 2004). Evaluaciones internacionales tales como TIMSS y PISA corroboran las reiteradas deficiencias detectadas en la investigación, en el conocimiento del álgebra que desarrollan los estudiantes (Kieran, 2007). Por tanto se concluye que la transición de la aritmética al álgebra no es directa ni transparente y que la forma tradicional de introducir el álgebra no es eficaz en el desarrollo de las habilidades de los alumnos para reconocer y usar la estructura matemática.

Aritmética vs álgebra

> *"Our teacher says that with letters it [computing] is the same as with numbers, but to me it doesn't look the same, it looks very different" (Francesca, alumna de tercer curso de educación secundaria, extraído de Cerulli y Mariotti, 2001).*

La complejidad involucrada en la transición de la aritmética al álgebra, expresada en la cita anterior en palabras de una estudiante de educación secundaria, y la interferencia que produce la aritmética en el aprendizaje del álgebra han sido argumentadas por numerosas investigaciones. Variados autores han centrado su atención en analizar y comparar la naturaleza y enseñanza de la aritmética y el álgebra, buscando comprender dicha complejidad y extraer conclusiones para hacer más eficiente su enseñanza. En esta línea destacamos los trabajos de Kieran (1990), Molina (2006) y Banerjee (2011) en los que se sintetizan resultados de estudios previos que identifican discontinuidades en el paso entre ambas sub-aéreas de las matemáticas: el cambio de significado de algunos símbolos y signos operacionales, la necesidad de operar con incógnitas, la consideración bidireccional de las expresiones y, en relación con la resolución de problemas, la introducción de la representación formal de los métodos que se utilizan (los cuales habitualmente no se hacen explícitos cuando se trata de problemas aritméticos) y el requisito de representar las operaciones que se describen en una situación-problema en vez de las que permiten resolverlo, entre otros.

Se argumenta que el énfasis en "encontrar la respuesta" habitual en la enseñanza de la aritmética hace que los alumnos consigan desenvolverse con procesos intuitivos e informales o con una comprensión inadecuada o pobre de la aritmética, evitando el uso y reconocimiento de la estructura el cual es esencial en el aprendizaje del álgebra (Banerjee, 2011; Kieran, 1989). Esta afirmación está relacionada con otra de las discontinuidades que se perciben entre la aritmética y el álgebra, la cual Sfard (1991), Sfard y Linchevski (1994), Gray y Tall (1994) y Kieran (1991) explican utilizando la dualidad proceso-objeto[1]. Según estos autores una de las grandes diferencias entre ambas sub-áreas de las matemáticas, aritmética y álgebra, es que en la primera de ellas las expresiones simbólicas (en este caso numéricas) son interpretadas como procesos y, en cambio, en la segunda han de interpretarse como procesos y como objetos. Ver una entidad matemática como un objeto (algebraico) requiere ser capaz de referirse a ella

[1] Según Tall, Thomas, Davis, Gray y Simpson (2000), esta idea de la dualidad proceso/objeto surgió, en los años 50, a partir del trabajo de Piaget. De este modo las ideas de Piaget sobre las acciones y operaciones que se convierten en objeto de pensamiento y asimilación han sido extendidas más allá de las matemáticas elementales.

como si fuera una cosa real y manipularla como una unidad global. Por otra parte, interpretar una entidad matemática como un proceso implica considerarla como algo potencial, constituido por una secuencia de acciones a realizar, en vez de una verdadera entidad (Sfard, 1991).

Desde esta perspectiva el estudio del álgebra escolar se entiende como una serie de ajustes proceso–objeto que los alumnos deben realizar para poder comprender los aspectos estructurales del álgebra. Progresivamente se va desarrollando la habilidad de ver una cadena de símbolos como un nombre para un número, más adelante se llega a considerar las letras en una fórmula como variables en vez de cómo incógnitas, y finalmente se perciben las funciones que se esconden tras las fórmulas. Ver un proceso como un objeto implica una significativa reestructuración cognitiva (Drouhard y Teppo, 2004).

El simbolismo algebraico

> *"El simbolismo algebraico permite moverse con fluidez a través de capas de abstracción y comprimir complejos pensamientos matemáticos en eficientes cadenas de símbolos. Al mismo tiempo, sin embargo, estas características hacen a la escritura simbólica muy opaca para el estudiante. Hay profundas ambigüedades en el uso de los símbolos que son ventajosas para el experto pero difíciles para el novato".*
>
> (Drouhard y Teppo, 2004, p. 240)

En esta cita Drouhard y Teppo hacen referencia a una de las características del simbolismo algebraico: la ambigüedad. Esta característica dota al simbolismo algebraico de una gran aplicabilidad, pero al mismo tiempo lo hace muy débil desde el punto de vista semántico, lo que dificulta su comprensión al estudiante (Wheeler, 1989). Una razón de la misma es la doble interpretación que se puede hacer de los símbolos, como procesos y como objetos, como anteriormente se ha destacado; una dualidad referida por Davis en 1975 como el dilema proceso-producto y encapsulada por Gray y Tall (1992, 1994) bajo el término procepto. La opacidad del simbolismo algebraico permite que no se distinga entre el objeto y el proceso, pudiendo el sujeto utilizar una u otra interpretación según le resulte necesario o más conveniente.

Otro de los motivos de la ambigüedad del simbolismo algebraico es la polisemia de los símbolos. Por ejemplo, el símbolo x puede interpretarse como una variable, una incógnita o el argumento de una función. El simbolismo algebraico posibilita transformar las expresiones por medio de técnicas algebraicas aprendidas sin necesidad de atender al significado de los símbolos que las componen. "El comportamiento experto no consiste ni en ser consciente del significado de los símbolos todo el tiempo, ni olvidarlo todo el tiempo. En cambio, depende de la capacidad de alcanzar el significado de los símbolos a demanda” (Drouhard y Teppo, 2004, p. 251).

Como consecuencia de estas apreciaciones, una parte esencial de ser competente en álgebra es la capacidad de alternar de forma flexible y oportunista el uso de acciones desprovistas de significado (como la aplicación automática de reglas y procedimientos), para incrementar la eficiencia y rapidez en la ejecución de procedimientos, con la aplicación del sentido común y la búsqueda de significados dirigidas a cuestionar y elegir estrategias, reflexionar, conectar ideas, sacar conclusiones o elaborar nuevos significados (Arcavi, 2006). Además se requiere capacidad de ver una expresión como un objeto y como un proceso, así como adquirir un sentido de cual de ambas formas de ver una expresión es más adecuada en cada momento (Drijvers et al., 2011).

4.2. Visión innovadora de la enseñanza del álgebra: Early-Algebra

La preocupación por hacer el estudio del álgebra accesible a todos los estudiantes y la insatisfacción con el modo en que tradicionalmente se ha implementando su enseñanza, ha llevado a los investigadores a buscar formas más efectivas de abordar la enseñanza de esta sub-área de las matemáticas. Algunas propuestas defienden un currículo con énfasis estructural (Banerjee, 2011), en un doble sentido: mayor atención a la estructura de la aritmética y del álgebra y al desarrollo de una visión estructural de las expresiones propias de ambas sub-áreas. Estas propuestas están motivadas por la constatación de que la transición de una concepción procedimental a una concepción estructural requiere más atención explícita de la que se le da en la enseñanza tradicional (Boulton–Lewis, Cooper, Atweh, Pillay y Wills, 2000; Kieran, 1992) y que la enseñanza puede mejorar la habilidad de los estudiantes para reconocer y operar en la estructura de una expresión algebraica (Thompson y Thompson, 1987; Carpenter, Franke y Levi, 2003).

Entre las propuestas curriculares que se proponen con dicho objetivo, destacamos aquí la denominada Early-Algebra que plantea la introducción de modos de pensamiento algebraicos, en la matemática escolar, desde los primeros cursos escolares (Bastable y Schifter, 2007; Cai y Knuth, 2011; Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006; Carraher y Schliemann, 2007; Kaput, 1998, 2000; Kaput et al., 2008). Se basa en la “algebrización del currículo” (Kaput, 2000): promover en las aulas la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas y, de este modo, cultivar hábitos de pensamiento que atiendan a la estructura que subyace a las matemáticas. Se busca promover el desarrollo progresivo de diferentes modos de pensamiento involucrados en la actividad algebraica y de significados nuevos o más amplios para los símbolos presentes en la aritmética y el álgebra escolar, reconociéndose para ello la necesidad de un periodo prolongado de tiempo. Para ello, se recomienda un ambiente escolar en el que se valore que los alumnos exploren, modelicen, hagan predicciones, discutan, argumenten, comprueben ideas y también practiquen habilidades de cálculo (Blanton y Kaput, 2005).

Esta propuesta parte de una concepción diferente de la relación existente entre la aritmética y el álgebra que se ilustra en la Figura 2.

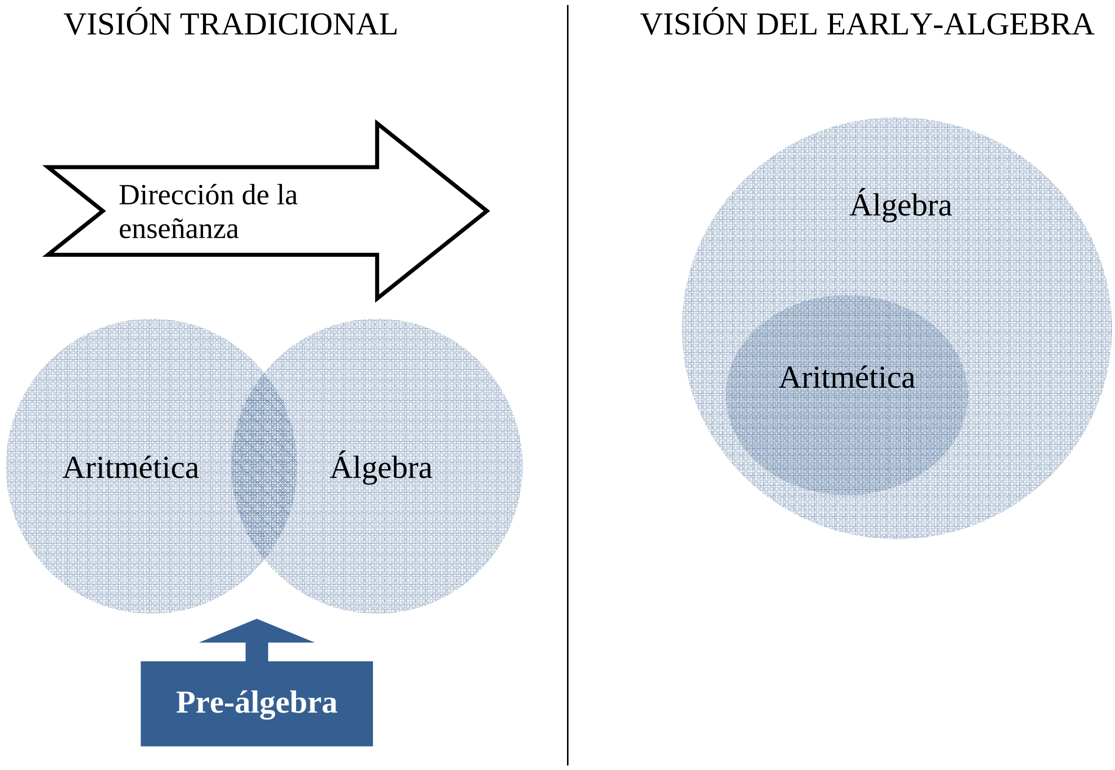

Figura 2. Dos visiones de la relación aritmética y álgebra en la enseñanza (Schliemann, Carraher y Brizuela, 2007).

En la última década se ha explorado, entre otros aspectos, la viabilidad de esta propuesta, sus diferentes dimensiones, su interpretación y puesta en práctica por docentes, y las capacidades y modos de pensamiento algebraicos que ponen de manifiesto los alumnos de Educación Primaria (Bastable y Schifter, 2007; Brizuela y Lara-Roth, 2001; Carpenter et al., 2003; Carraher, Schliemann y Brizuela, 2001; Carraher et al., 2006; Freiman y Lee, 2004; Koehler 2002; Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg y Stephens, 2005; Molina, 2006; Molina, Castro y Castro, 2009; Molina y

Mason, 2009; Subramaniam, 2004; Sutherland, 2008; Warren, 2004). Las investigaciones realizadas consideran diferentes visiones del álgebra. Aquellas que atienden a contextos aritméticos proponen trabajar con actividades que faciliten la transición e integración de la aritmética y el álgebra mediante un enfoque estructural, convirtiendo en el foco de la aritmética las operaciones que se realizan en números y su doble naturaleza como procesos que se realizan con objetos y como objetos en sí mismos (Mason et al., 2005).

Aún está pendiente ver qué cambios provoca esta innovación curricular en la posterior enseñanza del álgebra en educación secundaria y, en especial, en la competencia algebraica que los estudiantes desarrollan. Por el momento las últimas propuestas curriculares de algunos países, entre ellos Australia, Estados Unidos y Portugal, ya integran el desarrollo de pensamiento algebraico como objetivo de la educación primaria, o incluso, de la educación infantil.

4. CONSTRUCTOS CLAVE EN ESTE PROYECTO

Dedicamos este apartado a definir dos constructos que han sido propuestos por investigadores en la enseñanza y aprendizaje del álgebra, los cuales son necesarios para describir la investigación que se propone en este proyecto. Se trata de los términos sentido estructural y pensamiento relacional.

5.1. Sentido estructural

El término sentido estructural, junto a otros como el sentido numérico o el sentido simbólico, forma parte de una serie de constructos propios de la Didáctica de la Matemática que incluyen la denominación de “sentido” con la intención de destacar la consideración de los alumnos como pensadores, como personas capaces de comprender los dominios matemáticos (Molina, 2006). Son términos asociados a una visión de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas centrada en promover su comprensión y la búsqueda de significado, en la que se considera que un conocimiento no puede ser funcional sino en la medida en que el sujeto es capaz de identificar un campo de aplicación para el mismo (Arcavi, 1994, 2006; Peltier, 2003; Piccioto, 1998).

El término sentido estructural, introducido por Linchevski y Livneh (1999) y desarrollado por Hoch y Dreyfus (Hoch, 2003; Hoch y Dreyfus, 2004, 2005), se enmarca en el contexto del álgebra. Esta noción surge del análisis del trabajo con expresiones algebraicas, al distinguir las actuaciones que hacen un uso efectivo de la estructura particular de las expresiones y de las técnicas algebraicas aprendidas previamente, entre otras actuaciones posibles. Linchevski y Livneh (1999) lo emplean por primera vez para referir al uso de estructuras equivalentes de una misma expresión (algebraica o numérica) de forma flexible y creativa, y, en general, a la comprensión de la transformación de expresiones. Hoch (2003) utiliza este mismo término para referir a una colección de habilidades, separadas de la habilidad de transformar expresiones algebraicas, que permite a un alumno hacer un mejor uso de las técnicas algebraicas aprendidas previamente. Posteriormente, Hoch y Dreyfus (2004, 2005) precisan algunas de las habilidades que engloba el sentido estructural en el contexto del álgebra escolar: ver una expresión algebraica como una entidad, reconocer una expresión algebraica como una estructura conocida, dividir una entidad en subestructuras, apreciar las conexiones mutuas entre estructuras y reconocer qué transformaciones es posible realizar y cuáles de éstas son de utilidad. En un trabajo más reciente (Hoch y Dreyfus, 2006), estos autores presentaron una caracterización operacional de sentido estructural, por medio de tres descriptores, los cuales ayudan a identificar el uso de sentido estructural en el contexto de una tarea algebraica. En la Tabla 2, procedente de Vega-Castro, Molina y Castro (2011), se recoge la definición de estos tres descriptores y algunos ejemplos.

Descriptor	**Definición de Hoch y Dreyfus (2006)**	**Ejemplos**
SS1	Reconocer una estructura familiar en su forma más simple.	Al factorizar $81-x^2$, reconocer dicha expresión como una diferencia de cuadrados, e identificar los factores.
SS2	Tratar un término compuesto como una única entidad y reconocer una estructura familiar en una forma más compleja.	Al factorizar $(x-3)^4-(x+3)^4$ tratar los binomios $(x-3)^2$ y $(x+3)^2$ como una sola entidad, reconocer dicha expresión como una diferencia de cuadrados, e identificar los factores implicados.
SS3	Elegir manipulaciones apropiadas para hacer el mejor uso de una estructura.	En las tareas anteriores, aplicar la igualdad notable diferencia de cuadrados $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ para factorizar dichas expresiones.

Tabla 2. Definición y ejemplos de los descriptores del sentido estructural.

(Vega-Castro et al., 2011)

En función de la complejidad de los términos que componen las expresiones con las que se esté trabajando, Hoch y Dreyfus (2006) subdividen los descriptores SS2 y SS3 para señalar aquellos casos en que se hace necesario tratar con términos compuestos ya sea con productos o potencias o incluso con sumas y restas,

Como resultado de un trabajo exploratorio sobre este constructo y habiendo observado que la definición aportada por Hoch y Dreyfus en 2006 está limitada por su consideración de tareas en las que es necesario realizar transformaciones de expresiones algebraicas, Vega-Castro, Molina y Castro (en prensa) añaden a los anteriores descriptores los siguientes: reconocer relaciones (ej., de igualdad, ser factor o múltiplo,…) entre subestructuras, considerar formas alternativas de trasformar una expresión algebraica, anticipar la utilidad de transformaciones algebraicas en una expresión, e identificar el rango de variación permisible para las variables involucradas.

Las diferentes habilidades que componen el sentido estructural son parte del aprendizaje que se espera desarrollen los estudiantes de educación secundaria en relación con el álgebra. Su uso o aplicación implica una concepción estructural de las expresiones algebraicas (más o menos desarrollada) para ser capaz de percibir, comparar y relacionar la estructura de diferentes expresiones, o subexpresiones, algebraicas y utilizar esta información para la toma de decisiones sobre la manipulación de las mismas. El uso eficiente de técnicas algebraicas requiere desarrollar un sentido de qué tipo de métodos son útiles en cada caso y qué efecto tienen (Bell, 1995; Chazan y Yerushalmy, 2003; Linchevski y Livneh, 1999; Usiskin, 1988).

En este contexto Boero (1994, 2001) destaca la necesidad de distinguir entre convenciones y propiedades de las operaciones, y de atender en la enseñanza al desarrollo de anticipación del efecto de una transformación en una expresión aritmética o algebraica.

La noción de estructura

Al considerar el constructo sentido estructural merece atención especial el término estructura, aunque su definición tiende a ser omitida por los autores que utilizan este constructo (Dreyfus y Hoch, 2004). Si bien el término estructura aritmética o algebraica es utilizado para referir a la estructura matemática del sistema compuesto por los números y/o variables numéricas, alguna operación u operaciones y las propiedades de dichas operaciones (Castro, Rico y Romero, 1997), en este contexto cabe un significado diferente del mismo al referir a la estructura de expresiones aritméticas y algebraicas. Reconocemos un significado doble del término estructura — la estructura externa de una expresión y la estructura interna—, cuya concreción es objetivo del proyecto investigador que aquí se propone.

La estructura externa refiere a los términos que componen la expresión, los signos que los relacionan, el orden de los diferentes elementos y las relaciones que existen entre ellos (Molina, 2010). Se refiere a la forma gramatical de las expresiones en términos de Esty (1992), la denominada estructura superficial de una expresión en palabras de Kieran (1991) o la estructura sintáctica, según Kirshner (1989). Desde un punto de vista amplio, se puede decir que la estructura externa refiere a la forma en que una entidad se compone de partes (existiendo conexiones o relaciones entre las partes que componen dicha entidad). El reconocimiento de dicha estructura no implica ni requiere evocar posibles significados para los símbolos involucrados.

Por otra parte, la estructura interna resulta más difícil de definir. Desde nuestra interpretación refiere al valor de dicha expresión y a las relaciones de los componentes de la expresión con el mismo. Utilizando los términos de la terna de Frege sentido-referencia-signo, podemos relacionar la referencia con la estructura interna y el sentido con la estructura externa (ver Figura 3).

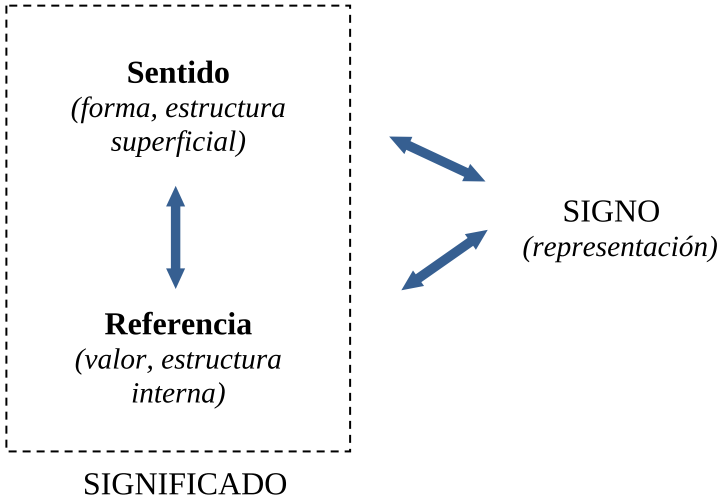

Figura 3. Conexiones entre la terna sentido-referencia-signo y el término estructura en el contexto del simbolismo algebraico

Drouhard y Teppo (2004) y Arzarello, Bazzini y Chiappini (2001) utilizan el lenguaje de Frege para distinguir el significado de dos expresiones algebraicas equivalentes tales como $2(x+3)$ y $2x+6$. El significado viene dado por el sentido y la referencia. En este caso ambas expresiones tienen una misma referencia pero diferentes sentidos:

"El sentido, en términos de Frege es la forma en que la referencia es dada; el sentido de lo escrito nos permite conocer como está hecho. En el caso de una

expresión aritmética (por ejemplo, $2(3+4)$*) el sentido indica cómo encontrar su referencia: aquí, uno debe calcular el doble de la suma de 3 y 4. El sentido también nos da información de lo que puede hacerse. Por ejemplo,* $2x^2+2x$ *puede factorizarse, mientras que* $2x(x+1)$ *puede desarrollarse."*

(Drouhard y Teppo, 2004, p.235)

Desde esta perspectiva la resolución de ecuaciones o la simplificación de expresiones son transformaciones que afectan al sentido de la expresión pero no a su referencia. El objetivo de las transformaciones es facilitar la identificación de dicha referencia. Estos autores afirman que sin atender a la referencia, el álgebra se reduciría a la aplicación de reglas mecánicas y sin significado a símbolos vacíos de significado.

En relación con esta reflexión, Hoch (2003) distinguen entre el orden y la forma de una expresión algebraica, como expone Vega-Castro (2010, p. 17) en el siguiente extracto:

"La forma está relacionada con la apariencia externa de una expresión algebraica y el orden con las relaciones que mantienen los componentes de dichas expresiones entre sí y con otras estructuras. Mediante el proceso de simplificación o transformación de una expresión, el cual implica un cambio de forma, puede revelarse el orden interno de la misma. Por ejemplo, si tomamos una expresión polinómica que represente una ecuación cuadrática podremos transformarla en otra expresión con forma estándar: $ax^2+bx+c=0$*, siendo a, b y c números reales. El proceso de transformación de la ecuación dada a la forma estándar puede conducir a la solución ya sea por la factorización o utilizando la fórmula cuadrática. El orden interno también podría llevar a conocer el número de soluciones (0, 1 o 2 soluciones), y saber que estas soluciones son los puntos de intersección de la parábola* $y=ax^2+bx+c$ *con el eje X."*

5.2. Pensamiento relacional

El constructo pensamiento relacional surge en el marco de la propuesta Early-Algebra como respuesta a la necesidad de un enfoque estructural de la aritmética que rompa con el énfasis computacional predominante en los primeros cursos escolares. Este término refiere al reconocimiento y uso de relaciones entre los elementos de expresiones numéricas y algebraicas, y de propiedades fundamentales de las operaciones (Carpenter et al., 2003; Empson, Levi y Carpenter, 2011; Stephens, 2007). Al utilizar pensamiento relacional, los estudiantes consideran las expresiones como totalidades (en lugar de como procesos a realizar paso a paso), las analizan, distinguen algunos detalles y reconocen algunas relaciones y, finalmente, aprovechan estas relaciones para construir una estrategia de solución (Molina, 2006). Las expresiones son consideradas desde una perspectiva estructural y no únicamente como procedimientos a realizar. Así, en la igualdad $7+7+9=14+9$ la expresión “$7+7+9$” se compara con “$14+9$” para considerar su equivalencia, en lugar de actuar en cada expresión para determinar su valor. Esto implica un cambio sutil pero importante en la atención de los estudiantes: de realizar la lectura de la sentencia de izquierda a derecha, leyendo los elementos de uno en uno, a mirar a ambos lados del signo igual y comparar las dos expresiones entre sí (Mason, Drury y Bills, 2007). No obstante, el uso de relaciones entre números u operaciones puede ser más o menos sofisticado según si éstas se perciben como específicas a la situación particular considerada, haciéndose un uso implícito de propiedades de forma análoga a los teoremas en acción (Vegnaud, 1988), o bien, son reconocidas como particularizaciones de una propiedad, percibiéndose lo general a partir de lo particular. Este segundo uso implica el tipo de pensamiento basado en propiedades que se utiliza en el álgebra y se asocia con una comprensión profunda de la aritmética (Empson et al., 2011) o comprensión relacional en términos de Skemp (1978).

El término pensamiento relacional surge en la literatura a principios del siglo XXI (Carpenter y Franke, 2001; Carpenter et al., 2003) pero corresponde a una distinción que ya ha sido considerada en términos generales bajo otras denominaciones y que no es exclusiva a contextos numéricos y algebraicos: se distingue una acción intelectual, flexible, alternativa a la aplicación de procedimientos estándares, basada en la consideración de las relaciones y elementos clave que definen una situación matemática para construir la estrategia de resolución. El pensamiento del alumno se centra en la estructura de la situación o problema que se persigue abordar, siendo un aspecto destacado su consideración como totalidad.

No obstante, como se expone en Molina (2006), en el contexto del trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas el uso de pensamiento relacional comprende (o puede comprender) varios aspectos que evidencian su carácter algebraico tales como la consideración de expresiones aritméticas desde un punto de vista estructural, promoviendo un enfoque no computacional de la aritmética al alejar la atención del valor numérico de las expresiones; la concepción de las expresiones como totalidades, susceptibles de ser comparadas, ordenadas, igualadas y transformadas, y, por tanto, la aceptación de la falta de clausura; y la potenciación de la exploración e identificación de patrones y relaciones sobre los números y operaciones, primeros pasos en el proceso de su generalización.

5. OBJETIVOS DEL PROYECTO

En este proyecto de investigación se consideran dos concepciones del álgebra íntimamente relacionadas: estudio de estructuras y aritmética generalizada. Desde ambas perspectivas y partiendo de las ideas presentadas en los apartados previos, nos proponemos profundizar en el estudio de los procesos de desarrollo y uso de pensamiento relacional y sentido estructural, y en el uso y comprensión de dos sistemas de representación vinculados a la actividad algebraica: el lenguaje horizontal de igualdades y paréntesis (en adelante lenguaje HIP) y el simbolismo algebraico.

Para analizar dichos procesos relativos al uso del simbolismo algebraico y al sentido estructural consideramos pertinente trabajar con sujetos que cursen la educación secundaria al ser en este nivel educativo donde los estudiantes son introducidos al álgebra simbólica. Para justificar el interés de esta investigación para la comunidad científica destacamos la relevancia que en la investigación sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra tienen en la actualidad los enfoques que atienden al cómo y qué perciben los estudiantes, al modo en que dan significado a los diferentes objetos y nociones que intervienen en la actividad algebraica y al modo en que estos factores condiciona su competencia matemática. Constructos como el sentido estructural evidencian las nuevas perspectivas desde las que se abordan el estudio del desarrollo de dicha competencia. Desde una perspectiva curricular, la investigación es pertinente en tanto que busca informar sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje en Educación Secundaria relativo al uso del simbolismo algebraico y el desarrollo de actividades de tipo transformacional, en las cuales los estudiantes evidencian dificultades recurrentes.

Por otra parte, nuestro interés investigador relativo al lenguaje HIP y el pensamiento relacional se enmarca en el contexto de la formación inicial de maestros de educación primaria. La justificación de la elección de estos sujetos es doble: a) la percepción, en nuestra práctica docente, de importantes deficiencias en su uso del lenguaje HIP y de pensamiento relacional en el trabajo con métodos de cálculo no algorítmicos[2], y b) la consideración de ambos elementos como componentes necesarias en el conocimiento del contenido especializado de un maestro de Educación Primaria,

[2] Utilizamos el término cálculo no algorítmico para referir a los métodos de cálculo que no hacen uso de los algoritmos estándares de las operaciones aritméticas.

aún más si se asume la perspectiva de la propuesta Early-Algebra. Esta última consideración se desprende de las evidencias de estudios previos sobre el potencial del pensamiento relacional y del uso del lenguaje HIP para algebrizar la actividad aritmética (Molina, 2009, 2010) y contribuir al análisis de las situaciones numéricas y la expresión significativa y no reglada[3] de las acciones sobre los números (Gómez, 1995; Ma, 1999/2010). El lenguaje HIP permite unificar la descripción de los métodos de cálculo con su explicación.

Esta segunda componente del trabajo se enmarca en una línea de investigación abierta delimitada por las nuevas propuestas curriculares que fomentan una enseñanza estructural de la aritmética y el álgebra y abogan por la integración del pensamiento algebraico en la educación primaria. Esta investigación permite indagar en el potencial de la integración de la propuesta Early-Algebra en la formación inicial de profesores para enriquecer el conocimiento, de futuros maestros, de la estructura de la aritmética y de representaciones matemáticas que facilitan su análisis.

Objetivos específicos

Concretamos el problema de investigación que nos proponemos abordar por medio de seis objetivos generales, los dos primeros de carácter teórico:

O1. Delimitar el significado del término estructura en relación con el término sentido estructural desde la dualidad interna y externa anteriormente referida (apartado 5.1).

O2. Avanzar en la definición del constructo sentido estructural mediante la identificación de nuevos descriptores y la concreción de las relaciones entre los mismos.

O3. Analizar los procesos de desarrollo y uso del sentido estructural en contextos de trabajo con expresiones numéricas y algebraicas por estudiantes de educación secundaria.

O4. Analizar la comprensión y uso del simbolismo algebraico por estudiantes de educación secundaria.

O5. Analizar los procesos de desarrollo y uso del pensamiento relacional en contextos de trabajo con expresiones numéricas por estudiantes para maestro de Educación Primaria.

[3] Utilizamos el término reglada/o para referir al uso de reglas sin justificación o razones.

O6. Analizar la comprensión y uso del lenguaje horizontal de igualdades y paréntesis por estudiantes para maestro de Educación Primaria.

La Figura 4 presenta de forma esquemática y relacionada los elementos que constituyen el problema de investigación planteado por medio de esos seis objetivos de investigación. En este problema intervienen dos sistemas de representación, el lenguaje HIP y el simbolismo algebraico, y dos constructos de tipo cognitivo: pensamiento relacional y sentido estructural.

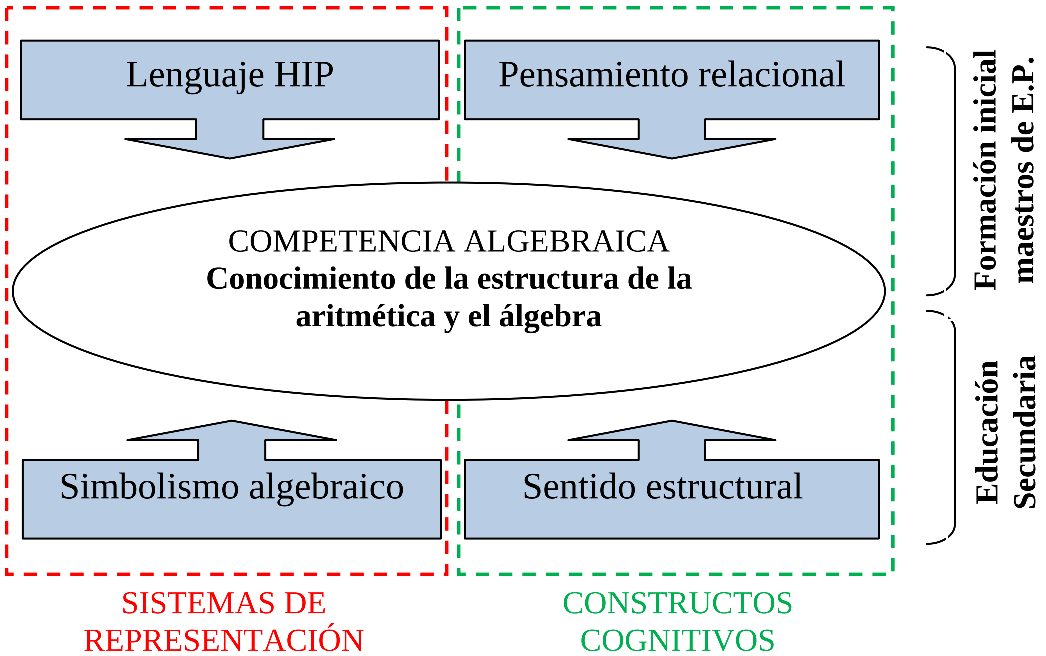

Figura 4. Elementos constituyentes del problema de investigación que se plantea.

Estado actual de la investigación

Planteamos la investigación que aquí se propone como un proyecto en el que ir progresando mediante la realización que estudios independientes pero interconectados que individualmente aporten a la consecución de estos objetivos. Por tanto, este proyecto debe entenderse como un plan de trabajo a medio plazo, que irá evolucionando y desarrollándose conforme se vayan obteniendo resultados.

A corto plazo la consecución de dichos objetivos se persigue abordar por medio de tres estudios (ver Figura 5) que en la actualidad están en diferente nivel de desarrollo. A continuación se describe cada uno de ellos detallándose el estado de desarrollo en el que se encuentran.

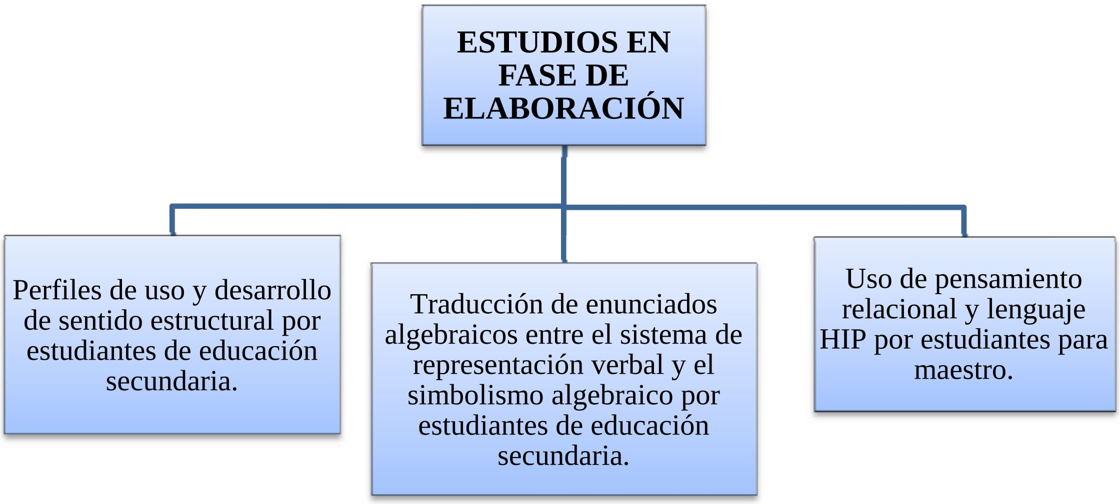

Figura 5. Los tres estudios en fase de elaboración en el marco de este proyecto

6. ESTUDIO 1

Este primer estudio, titulado *Perfiles sobre sentido estructural de alumnos de educación secundaria*, está siendo desarrollado en la actualidad por la estudiante de postgrado Danellys Clementina Vega Castro bajo la dirección de las doctoras Encarnación Castro y Marta Molina. Con él Danellys aspira a alcanzar el título de doctora por la Universidad de Granada.

El foco de este trabajo es la noción de sentido estructural, anteriormente presentada. Se busca profundizar en la comprensión de su uso y desarrollo por estudiantes de Educación Secundaria.

7.1. Antecedentes

Las dificultades que los estudiantes manifiestan con la estructura algebraica fueron inicialmente estudiadas por Booth (1982), Wagner, Rachlin y Jensen (1984) y por Steinberg, Sleeman y Ktorza (1990) quienes pusieron de manifiesto que alumnos de educación secundaria tenían dificultades para concebir una expresión compleja como un todo y reconocer semejanzas en las estructuras de ecuaciones equivalentes, pese a mostrar facilidad para resolver dichas ecuaciones siguiendo procedimientos estándares. Booth (1982) investigó el tipo de expresiones algebraicas que los alumnos consideraban equivalentes y observó que interpretaban las expresiones de manera diferente según el contexto. Greeno (1982) coincide en detectar falta de consistencia en las transformaciones de expresiones algebraicas por parte de los estudiantes al simplificar de formas diferentes expresiones similares. Wenger (1987) señala pobreza de las decisiones estratégicas que evidencian estudiantes de secundaria en la simplificación de expresiones algebraicas: no sugieren ninguna anticipación de la utilidad de las mismas. Pirie y Martin (1997) detectan tendencia de los alumnos a interpretar las ecuaciones como sucesos temporales, no estáticos, leyéndolos de izquierda a derecha. Además, Liebenberg, Sasman y Olivier (1999) observan que los estudiantes confunden los conceptos de equivalencia numérica y equivalencia algebraica, y no muestran capacidad para juzgar la equivalencia entre expresiones numéricas sin la realización del cálculo de las operaciones implicadas.

Los trabajos de Herscovics y Linchevski (Herscovics y Linchevski 1994; Linchevski y Herscovics 1994) y Ruano, Socas y Palarea (2008) señalan algunas de las dificultades y errores concretos que manifiestan los estudiantes al transformar expresiones algebraicas tales como la necesidad de clausura que muestran, la particularización de expresiones algebraicas dándoles valores numéricos al no encontrar sentido en el uso del lenguaje algebraico en algunos contextos, el uso inadecuado o no uso de paréntesis, la concatenación de igualdades, el fallo en la percepción de la cancelación de expresiones, la sobre-generalización de la propiedad distributiva del producto respecto de la suma a la operación multiplicación, falta de aceptación del signo igual como expresión de una equivalencia, un orden incorrecto de las operaciones y la separación de un número del signo operacional que le precede.

Las evidencias disponibles sobre el tipo de errores que cometen los estudiantes en la transformación de expresiones algebraicas sugieren que sus dificultades están relacionadas con la percepción de la forma o estructura externa de las mismas (Kieran, 2007). Los trabajos de Krishner y Awtry (Krishner, 1989; Krishner y Awtry, 2004) sustentan esta afirmación mostrando la influencia de características visuales de la sintaxis del álgebra en la manipulación del simbolismo algebraico por los estudiantes. Linchevski y Livneh (2002) hacen observaciones semejantes en el contexto de expresiones numéricas.

Trabajos más recientes que analizan específicamente el sentido estructural (Hoch y Dreyfus, 2004; 2005, 2006) destacan el escaso uso que hacen del mismo estudiantes de entre 16 y 17 años al resolver ecuaciones algebraicas especialmente diseñadas para facilitar su resolución a partir de la apreciación de subestructuras dentro de la ecuación y de relaciones entre ellas. El uso del sentido estructural fue algo mayor en el caso de alumnos de un curso previo que habían trabajado más recientemente la resolución de ecuaciones lineales, lo cual sugiere que la enseñanza tiene efecto en su desarrollo y/o en su uso. Los autores citados identificaron como elementos facilitadores de la percepción de estructura por parte de los estudiantes, la presencia de la variable en ambos miembros de la igualdad y los paréntesis. También observan un bajo sentido estructural en tareas de factorización de expresiones complejas. En el caso de expresiones que requerían el uso de la igualdad notable suma por diferencia para su simplificación, los estudiantes mostraron falta de capacidad para aplicar una fórmula conocida cuando los términos implicados eran compuestos (Hoch y Dreyfus, 2005). Dichos autores también detectan cierta correlación entre el sentido estructural y la habilidad para la manipulación de expresiones algebraicas (despreciando errores menores), en especial en niveles bajos de ambos, y observan que los alumnos que utilizan sentido estructural cometen menos errores de manipulación (Hoch y Dreyfus, 2006; Novotná y Hoch, 2008).

En un estudio exploratorio que destaca como principal antecedente de la investigación que aquí se plantea ya mencionado en el apartado 5.1 (Vega-Castro, 2010; Vega-Castro, Molina y Castro, 2012; Vega-Castro et al., en prensa) analizamos el sentido estructural puesto de manifiesto por un grupo de 33 estudiantes de primero de Bachillerato en tareas que requieren la construcción y transformación de fracciones algebraicas, susceptibles de ser simplificadas aplicando igualdades notables. Como resultado de dicho trabajo hemos avanzado en la descripción del constructo sentido estructural añadiendo al mismo algunos descriptores (ver apartado 5.1). Mediante una prueba diseñada para este estudio que incluía dos tipos de actividades correspondientes a las acciones de simplificar y construir fracciones algebraicas, detectamos un amplio espectro de niveles de sentido estructural en el grupo de alumnos considerado, no encontrándose influencia en el mismo del género, la edad ni el rendimiento académico de los estudiantes en la asignatura de matemáticas. Los modelos de actuación identificados nos informan del sentido estructural que demandan las tareas propuestas, percibiéndose que diferentes niveles de sentido estructural son compatibles con una exitosa resolución de las tareas aunque los procedimientos empleados difieren en su rapidez y en la cantidad de transformaciones a realizar.

Los datos obtenidos evidencian un mayor uso de sentido estructural cuando las expresiones no incluyen términos compuestos (con productos, potencias o sumas/restas) o la igualdad notable implicada es la propiedad distributiva/factor común. Esta igualdad notable se destacó de las igualdades notables suma por diferencia, diferencia de cuadrados y diferencia de una suma, por ser la que los estudiantes tuvieron mayor facilidad en aplicar y reconocer incluso cuando las expresiones incluían términos compuestos. Un 70% de los estudiantes mostraron capacidad para concebir términos compuestos como una entidad, no obstante, la presencia de este tipo de términos supuso una fuente de dificultad, pues fue en esos casos cuando un mayor número de estudiantes cometieron errores al manipular las expresiones que componían la fracción y un menor número de estudiantes reconocieron la posibilidad de cancelar términos tras haber realizado transformaciones.

7.2. Objetivos de investigación

El objetivo general de este trabajo es profundizar en la comprensión del uso y desarrollo de sentido estructural por estudiantes de tercer curso de Educación Secundaria, en actividades de tipo transformacional y generacional con expresiones aritméticas y algebraicas que involucran en su diseño igualdades notables. Desglosamos este objetivo en los siguientes objetivos específicos:

O1. Delimitar el (doble) significado del término estructura en relación con el término sentido estructural.

O2. Profundizar en la comprensión del papel del sentido estructural en la transformación de expresiones numéricas y algebraicas, y en la relación de este constructo con los conocimientos procedimental y conceptual y la flexibilidad procedimental.

O3. Analizar la influencia del tipo de representación simbólico-algebraica y numérica en el sentido estructural que ponen de manifiesto los estudiantes.

O4. Diseñar tareas numérico-algebraicas que promuevan el desarrollo y uso de sentido estructural.

O5. Estudiar el desarrollo de sentido estructural de los estudiantes en dicho contexto.

7.3. Metodología

En esta investigación se adopta una metodología principalmente cualitativa, enmarcada por el paradigma de la investigación de diseño (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011). Se trata de un experimento de enseñanza realizado con una clase de alumnos de 3º curso de secundaria de un Instituto de Educación Secundaria de Granada capital. Como se describe en Molina et al. (2011), el objetivo último de estos estudios es "elaborar un modelo del aprendizaje y/o desarrollo de los alumnos, en relación con un contenido específico, entendiendo este aprendizaje como resultado de la manera de operar y las situaciones puestas en juego por el investigador-docente" (p. 79).

El experimento consta de cinco sesiones de una hora que fueron implementadas durante el curso académico 2010-2011. En esas sesiones los alumnos trabajaron individualmente tareas diseñadas por el equipo de investigación, tras las cuales se desarrollaron puestas en común en relación con las mismas. Los objetivos instruccionales generales que guiaron el diseño de las sesiones y su implementación son: a) Promover el desarrollo de sentido estructural en el trabajo con expresiones numéricas y algebraicas, simples y compuestas, y b) guiar a los estudiantes hacia la generalización de relaciones numéricas que den lugar a las igualdades notables y a la expresión de dicha generalización.

Las variables consideradas en el diseño de las tareas fueron: cuatro tipos de igualdades notables (suma por diferencia, cuadrado de una suma, cuadrado de una resta, factor común), diferente complejidad de términos (simples, compuestos solo con productos y potencias, compuestos con sumas y restas), el tipo de símbolos involucrados (numéricos, algebraicos y cajas), y el tipo de acción demandada al estudiante: generar expresiones, simplificar, generalizar a partir de casos particulares, comprobar equivalencias y completar expresiones para obtener equivalencia.

7.4. Estado actual de la investigación

En la actualidad nos encontramos en el proceso de análisis de los datos tras haberse concluido la recogida de datos y haberse transcrito las grabaciones realizadas. Guiados por los objetivos de investigación y los descriptores del sentido estructural disponibles a partir de los estudios previos ya mencionados, estamos definiendo categorías que nos permitan describir y analizar el uso de sentido estructural que ponen de manifiesto los estudiantes en cada una de las tareas y a lo largo de las diferentes sesiones. Así mismo estamos enriqueciendo el marco teórico y análisis de antecedentes buscando dar respuesta a los objetivos teóricos y empíricos propuestos.

7. ESTUDIO 2

Este segundo estudio titulado *Traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación verbal y simbólico por estudiantes de educación secundaria*, está siendo desarrollado en la actualidad por la estudiante de postgrado Susana Rodríguez Domingo y dirigido por las doctoras Encarnación Castro, María Consuelo Cañadas y Marta Molina. Con él Susana aspira a alcanzar el título de doctora por la Universidad de Granada.

En este trabajo la atención se centra en el uso y compresión del simbolismo algebraico por parte de estudiantes de Educación Secundaria. El objetivo general que se propone es el estudio de los procesos de traducción entre el simbolismo algebraico y el lenguaje verbal.

8.1. Antecedentes

Diversos autores, entre ellos Arcavi (1994), Bednarz et al. (1996), Herscovics y Linchevski (1994), Kaput (1998, 2000), Linchevski y Herscovics (1994), Palarea (1998), Ruano et al. (2008) y Socas (1997), han señalado variadas dificultades que estudiantes de secundaria encuentran en la adquisición de dominio y comprensión del lenguaje algebraico así como los diferentes tipos de errores que cometen. En los antecedentes del estudio 1 hemos enumerado algunos de los errores concretos que se han identificado en actividades de tipo transformacional. Otras investigaciones se han centrado en el significado que los estudiantes atribuyen al simbolismo algebraico, en concreto a las variables, expresiones y ecuaciones, el signo menos, el signo igual y los números negativos (Kieran, 2007). Algunos autores como Furinghertti y Paola (1994) informan de dificultades para diferenciar parámetros e incógnitas en ecuaciones. Entre los factores condicionantes de la interpretación del simbolismo por los estudiantes, se han identificado asunciones sensatas e intuitivas, analogías con sistemas simbólicos utilizados en la vida cotidiana o en otras partes de las matemáticas u otras asignaturas, y materiales docentes confusos o pobremente diseñados (MacGregor y Stacey, 1997).

Los estudios que atienden a la traducción entre representaciones en contextos algebraicos consideran en su mayoría las representaciones tabular, gráfica y simbólica-algebraica (Kieran 2007). Se encuentra escasos estudios que analicen la traducción entre el sistema de representación verbal y el simbolismo algebraico. La mayoría de ellos se localizan en el contexto de la resolución de problemas dado que una de las acciones a realizar al abordar un problema algebraico es pasar del sistema de representación verbal al simbólico. En este contexto los estudiantes muestran resistencia a hacer uso del simbolismo algebraico prefiriendo utilizar razonamientos de tipo aritmético (Kieran, 2007; Koedinger y Nathan, 2004). Nathan y Koedinger (2000) identifican un modelo explicativo del desarrollo de la competencia de los estudiantes en el uso del simbolismo algebraico para resolver problemas en el cual la habilidad de resolver problemas algebraicos verbales es previa al desarrollo de habilidades de manipulación del simbolismo. Este modelo de evolución de la competencia, sustentado por los datos obtenidos por dichos autores, es contrario a la práctica mayoritaria en la enseñanza del álgebra en la cual la resolución de problemas algebraicos se aborda posteriormente a la introducción y práctica en el uso de técnicas algebraicas para la manipulación de expresiones. Como conclusión de este trabajo los autores recomiendan que se provea a los estudiantes de mayor experiencia en la traducción entre el lenguaje verbal y el simbolismo algebraico en el contexto de la resolución de problemas antes de abordar la resolución de ecuaciones.

Otros autores (ej., Arzarello, 1996; Boero, Douek y Ferrari, 2002; Rojano, 1994) han centrado la atención en la diferente naturaleza de ambos sistemas de representación: simbolismo algebraico y lenguaje natural. En particular, Boero et al. (2002) destacan la frecuente falta de congruencia semántica (equivalencia de significado) entre las expresiones algebraicas y las expresiones verbales de las que son traducción y la diferente capacidad de expresión de ambos sistemas de representación consecuencia de la falta de expresiones indéxicas tales como “este número” o “la edad de María”, las cuales se actualizan de forma automática en función del contexto.

Al igual que en el estudio 1, contamos con un estudio exploratorio previo (Rodríguez-Domingo, 2011; Rodríguez-Domingo, Molina, Cañadas y Castro, 2011) que actúa como antecedente destacado. En esta investigación se analizó el proceso de traducción que realizan estudiantes de cuarto curso de educación secundaria entre el lenguaje verbal y el simbolismo algebraico (en ambos sentidos), de enunciados generales de relaciones numéricas. El análisis de este proceso constituye un primer paso en la indagación sobre la capacidad de estos estudiantes para realizar dicha traducción y en su comprensión de los enunciados en cada uno de los sistemas de representación mencionados. En este trabajo se diseñó un pseudo-dominó algebraico compuesto por expresiones algebraicas expresadas utilizando lenguaje verbal o simbolismo algebraico. La recogida de datos tuvo dos fases: una basada en la construcción del propio juego y otra, su uso en un torneo por equipos. La primera fase consiste en una prueba y la segunda tiene las características de una entrevista clínica no estructurada en la que a los estudiantes se les planteó una situación y se les dejó actuar bajo unas reglas establecidas, interviniendo únicamente si alguna regla era incumplida o se requería la repetición de alguna idea.

En este trabajo clasificamos los errores cometidos por los estudiantes atendiendo a la completitud de los enunciados, errores derivados de la aritmética (como confusión de operaciones) y errores debidos a las características propias del lenguaje algebraico.

Entre los resultados cabe destacar que el 75% de los errores corresponden a traducciones del sistema de representación verbal al simbolismo algebraico, además, casi todos se deben a la confusión de las operaciones potenciación y producto, a una interpretación incorrecta de la estructura del enunciado algebraico o a la particularización de alguno de los términos del enunciado. Durante las partidas jugadas se observó que la mayoría de los estudiantes tuvieron dificultades para expresarse oralmente con claridad, aunque en variadas ocasiones fueron capaces de corregir sus propias explicaciones, sin requerir ayuda externa, tras realizar una pausa o serle requerida una nueva explicación. El resto de alumnos, a pesar de manifestar errores en la primera fase, no los manifestaron en la segunda fase. Inicialmente en la mayoría de los casos los estudiantes realizaban una lectura de ambas representaciones por separado como justificación de la equivalencia de las mismas. En las últimas etapas del torneo, en cambio, los sujetos relacionaron las dos formas de representar el enunciado al realizar la lectura. Esto puede ser debido tanto a un proceso de aprendizaje durante el desarrollo de la aplicación del instrumento como al tipo de estudiantes que participaron en estas partidas. El hecho de que durante la segunda parte de la aplicación del instrumento los estudiantes trabajaran en grupo, discutiendo la manera de leer los enunciados, tanto simbólicos como verbales, hizo que hubiera comunicación entre ellos y que aprendieran los unos de los otros la manera correcta de leer enunciados simbólicos que, en general, era donde más dificultad mostraban.

8.2. Objetivos de investigación

El objetivo general de este trabajo es analizar los procesos de traducción entre el simbolismo algebraico y el lenguaje verbal que realizan estudiantes de segundo curso de Educación Secundaria, tanto en situaciones no contextualizadas como en situaciones contextualizadas de resolución/invención de problemas. Concretamos este objetivo por medio de los siguientes objetivos específicos relativos:

O1. Analizar la comprensión del simbolismo algebraico que manifiestan los estudiantes.

O2. Analizar la influencia del contexto en el proceso de traducción.

O3. Indagar en las dificultades que encuentran en dicho proceso de traducción.

O4. Analizar los argumentos que expresan los estudiantes para justificar la "equivalencia" de diferentes representaciones de un mismo enunciado algebraico.

8.3. Metodología

En este trabajo se adopta una metodología cualitativa. Se estructura la recogida de datos en dos partes. La primera consiste en realizar una recogida de datos análoga a la del estudio previo descrito en Rodríguez-Domingo (2011) y en Rodríguez-Domingo et al. (2011). La segunda parte consiste en entrevistas clínicas semi-estructuradas a parejas de estudiantes. En dichas entrevistas se propondrá a cada pareja de estudiantes, tareas en las que se requiera dos tipos de acciones: a) traducir al simbolismo algebraico, enunciados algebraicos contextualizados en forma de problemas algebraicos (no requiriéndose la resolución de los mismos), e b) inventar problemas a partir de enunciados algebraicos descontextualizados expresados verbalmente. Los enunciados considerados en la entrevista procederán de los enunciados cerrados contenidos en el pseudo-dominó algebraico utilizado en la primera parte de la recogida de datos. La resolución en parejas de las tareas persigue provocar la lectura del simbolismo algebraico por parte de los estudiantes así como su verbalización de las relaciones que reconocen entre las diferentes representaciones de un mismo enunciado algebraico y de la justificación de la equivalencia de ambas.

La recogida de datos se realizará con estudiantes de segundo curso de Educación Secundaria una vez hayan trabajado en el aula los contenidos del currículo relativos al álgebra.

8.4. Estado actual de la investigación

En la actualidad estamos trabajando en la elaboración del marco teórico de este estudio y en la consulta de antecedentes que informen para precisar el diseño definitivo de la recogida de datos y el posterior análisis de los mismos. La recogida de datos se realizará en el curso 2012-2013 a un grupo de estudiantes de segundo curso de Educación Secundaria de la provincia de Granada.

8. ESTUDIO 3

Este tercer estudio, titulado *Uso de pensamiento relacional y lenguaje HIP por estudiantes para maestro*, es una continuación de las investigaciones desarrolladas por medio de dos tesis doctorales: la de Molina (2006) sobre el desarrollo de pensamiento relacional y la comprensión del signo igual por estudiantes de Educación Primaria y la de Gómez (1995) sobre el conocimiento, la comprensión y el uso de métodos de cálculo mental por estudiantes para maestro. En esta ocasión los sujetos que se consideran son estudiantes para maestro. Esta investigación está siendo desarrollada por Bernardo Gómez y Marta Molina, con la colaboración de estudiantes del Máster Universitario en Profesor/a de Educación Secundaria que se imparte en la Universidad de Valencia.

9.1. Antecedentes

Los trabajos de Gómez (1995) y Molina (2006), como se ha señalado, son los antecedentes que motivan el planteamiento y diseño de esta investigación. En ambos intervienen las alteraciones invariantes; en concreto las relativas a los procesos de descomposición, compensación y sustitución. Sospechamos que estos tres tipos de procesos juegan un papel importante en la transición de la aritmética al álgebra, ya que son comunes a sus respectivos dominios de cálculo: explican y fundamentan los métodos aritméticos de cálculo y los desarrollos para despejar la incógnita usados en la resolución de ecuaciones.

Al poner en conjunto los dos estudios precedentes se dispone de información sobre la tendencia computacional (reglada), el pensamiento relacional y la comprensión y disponibilidad del lenguaje HIP, por parte de estudiantes de primaria y estudiantes para maestro, en relación con las situaciones numéricas estudiadas en los mismos: situaciones basadas en métodos de cálculo mental y sentencias basadas en propiedades aritméticas y alteraciones invariantes. En concreto, en situaciones de cálculo mental Gómez (1995) observa que los estudiantes para maestro comenten una gran variedad de errores, son renuentes a usar el lenguaje HIP para explicar los procedimientos aritméticos que usan y tienen una débil comprensión del efecto de las alteraciones invariantes, de las leyes y de los principios que rigen el cálculo aritmético. En dicho estudio el lenguaje HIP fue útil para confrontar a los estudiantes con las formas inapropiadas de resolución de cálculos, desencadenando procesos cognitivos que permitieron a algunos de los estudiantes (aunque no a todos) reconceptualizar sus procedimientos de cálculo.

Molina (2006), por otra parte, en un experimento de enseñanza realizado con un grupo de alumnos de tercero de primaria a los que propuso tareas basadas en sentencias numéricas abiertas o verdaderas y falsas, observó que inicialmente los estudiantes manifestaban una alta tendencia computacional al abordar expresiones aritméticas, aún siendo presentadas de forma horizontal y ser ricas en relaciones numéricas. Las igualdades y sentencias numéricas cerradas (es decir, sin cantidades desconocidas como en $12 + 5 = 5 + 12$) basadas en propiedades aritméticas y alteraciones invariantes fueron un contexto útil para frenar dicha tendencia y promover el uso de pensamiento relacional. Dicho uso estuvo condicionado por factores tales como: a) la carga cognitiva de la tarea para el estudiante, b) la mayor o menor tendencia computacional del estudiante, c) su conocimiento aritmético previo, y d) la cultura del aula. Otros factores influyentes relativos a las tareas concretas consideradas fueron la estructura de la sentencia, la magnitud de los números involucrados, y el tipo de propiedad o alteración invariante que podía detectarse en la sentencia para juzgar su veracidad. Los estudiantes describieron y justificaron sus estrategias mediante el lenguaje retórico utilizando puntualmente un lenguaje aritmético idiosincrásico que combinaba números, signos y flechas escritos sobre las igualdades dadas.

Los resultados de ambos estudios plantean cuestiones de interés en relación con los estudiantes para maestro: ¿Qué grado de desarrollo de pensamiento relacional habrán alcanzado estos estudiantes como resultado de su formación y experiencia aritmética a lo largo de la educación obligatoria? ¿Qué elementos condicionarán su uso? ¿Qué dificultades encontrarán en la comprensión y uso del lenguaje HIP? ¿Qué potencial tendrá el lenguaje HIP, en particular, las igualdades y sentencias basadas en propiedades y alteraciones invariantes, para promover el uso de pensamiento relacional por este tipo de alumnos?

En conexión con estas cuestiones que motivan la investigación que aquí propone, cabe destacar que el uso del lenguaje HIP como complemento del lenguaje verbal ha sido detectado en maestros de educación primaria que poseen una profunda comprensión de las matemáticas de dicha etapa, sirviéndoles de ayuda para analizar y explicar errores que cometen los estudiantes (Ma, 1999/2010). En cambio los profesores que no muestran dicho nivel de comprensión se limitan a dar explicaciones verbales al justificar los errores de sus estudiantes, principalmente de tipo procedimental. En dicho trabajo Ma señala un efecto positivo de la formación inicial de profesores de Educación Primaria en la capacidad de los estudiantes para justificar la corrección de un método de cálculo.

Otras investigaciones realizadas con estudiantes de niveles preuniversitarios informan de dificultades para identificar la alteración o propiedad utilizada por ellos mismos al realizar cálculos (Demby, 1997). En contextos algebraicos también se detectan dificultades en la distinción de transformaciones que resultan invariantes de las que no lo son (Steinberg et al., 1990).

Respecto al pensamiento relacional, la investigación sugiere que éste se desarrolla de forma natural como resultado del aprendizaje aritmético y su uso se produce de forma espontánea en el cálculo aritmético, dándose de manera más escasa en contextos algebraicos (Baroody y Coslick, 1998; Carpenter y Moser, 1984; Foxman y Beishuizen, 1999; Molina, 2006; Resnick, Bill y Lesgold, 1992; Steinberg et al., 1990). Además se observa que no todos los estudiantes lo desarrollan en igual medida.

La tendencia a interpretar el simbolismo aritmético de izquierda a derecha, la necesidad de clausura o cierre de las expresiones, y una limitada comprensión del signo igual son identificadas como dificultades habituales en el uso del lenguaje HIP (Castro y Molina, 2007, Knuth et al., 2005; Molina y Ambrose, 2008; Fujii y Stephens, 2001).

9.2. Objetivos de investigación

El problema de investigación que se aborda viene definido por dos objetivos generales: analizar la comprensión y uso del lenguaje HIP por parte de los estudiantes para maestro, y estudiar su uso de pensamiento relacional en relación con la comprensión y disponibilidad de las alteraciones invariantes, como principios destacados que rigen el cálculo aritmético.

La consecución de estos objetivos se concreta por medio de los siguientes objetivos específicos relativos a estudiantes para maestro en el contexto de tareas en las que han de evaluar y justificar diferentes métodos de cálculo aritmético no algorítmico:

O1. Analizar su comprensión de lenguaje HIP.

O2. Examinar su uso del lenguaje HIP.

O3. Analizar el uso de pensamiento relacional que ponen de manifiesto.

O4. Analizar su disponibilidad y comprensión de cada una de las alteraciones invariantes.

9.3. Metodología

El estudio que se propone es de carácter principalmente cualitativo. El instrumento de recogida de datos que se prevé utilizar es una prueba compuesta por tareas basadas en la aplicación de métodos de cálculo no algorítmico que los estudiantes han de validar y justificar. Como variables de tarea se consideran los diferentes métodos de cálculo trabajados por Gómez (1995) y, en consecuencia, las diferentes alteraciones invariantes. Otras variables a considerar son el lenguaje verbal y el lenguaje HIP como sistemas de representación para expresar dichos métodos aplicados a cálculos particulares, y la demanda o no del uso de uno u otro lenguaje, al estudiante, en su respuesta.

Para alcanzar los objetivos de investigación enumerados se trabajará con estudiantes de primer curso del Grado de Maestro en Educación Primaria. A estos estudiantes se les supone que conocen los hechos aritméticos necesarios para el cálculo mental y las propiedades aritméticas fundamentales, y su competencia es al menos como la de los estudiantes que finalizan la Educación Secundaria. Se trabajará con un grupo de estudiantes para maestro de Educación Primaria de la Universidad de Granada y otro de la Universidad de Valencia, en su primer año de estudios universitarios.

9.4. Estado actual de la investigación

En la actualidad se está iniciando el diseño de la prueba, al mismo tiempo que se avanza en la actualización de la consulta de literatura realizada por Gómez (1995) y Molina (2006) relativa al problema de investigación planteado. La recogida de datos está prevista para el curso 2012-2013.

9. CONTRIBUCIÓN ESPERADA DEL PROYECTO

Partiendo de los objetivos propuestos para esta investigación y de los trabajos ya iniciados, podemos concretar algunos de los aportes que se esperan de esta investigación:

- Contribuir a la consolidación del constructo sentido estructural:
  - poniendo de manifiesto su utilidad para describir componentes de la competencia algebraica que se ponen en juego en diversidad de actividades que implican trabajar con expresiones simbólicas;
  - analizando su relación con los componentes de la competencia matemática destacadas por Kilpatrick, Swafford y Findell (2001) entre los que se encuentra el conocimiento conceptual, el conocimiento procedimental y la flexibilidad procedimental, y
  - precisando su definición aportando nuevos descriptores o informando sobre la forma en que se éstos se relacionan.
- Dar a conocer qué procesos de pensamiento guían a los estudiantes en el desarrollo de su sentido estructural y qué elementos condicionan el uso del mismo entre ellos variables de tarea, aspectos cognitivos o elementos relativos a la cultura o normas socioculturales del aula.
- Proveer tareas útiles para promover el uso y desarrollo de sentido estructural y pensamiento relacional en diferentes contextos así como el desarrollo de comprensión del lenguaje HIP y del simbolismo algebraico.

- Informar sobre el modo en que estudiantes de educación secundaria dan significado al simbolismo algebraico en la traducción entre los sistemas de representación verbal y simbólica. De este modo, en particular, buscamos aportar información sobre el primer paso en la resolución de problemas algebraicos —expresar de forma simbólicas las relaciones expresadas en el enunciado. Esta información será útil para comprender las dificultades que los estudiantes encuentran en dicha tarea y el papel que juega el contexto en las mismas.
- Informar sobre el potencial del lenguaje HIP en el contexto del cálculo no algorítmico para ayudar al desarrollo de conocimiento matemático especializado por parte de futuros maestros de educación primaria.
- Describir el pensamiento relacional de los estudiantes para maestro de educación primaria resultado de su formación preuniversitaria.

Mediante los aportes aquí enumerados y, otros a obtener en el desarrollo de la investigación que se plantea en este proyecto, buscamos proveer conocimiento de interés tanto para la innovación curricular —permitiendo cambios en el enfoque de la enseñanza-aprendizaje del álgebra en la educación obligatoria y de las matemáticas y su didáctica en la formación inicial de maestros—, como para el campo de investigación en Didáctica de la Matemática. Dicho conocimiento será relativo al desarrollo y puesta en práctica por los estudiantes de algunas componentes de la competencia matemática identificadas como relevantes (dominio y comprensión del simbolismo algebraico y del lenguaje HIP, sentido estructural y pensamiento relacional) y al modo en que se relacionan. Al mismo tiempo que contribuimos a la comprensión del modo en que se desarrollan y aplican dichas componentes, perseguimos profundizar en la naturaleza de las mismas y en su definición.

REFERENCIAS

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: informal sense–making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 1*(3), 24-35.

Arcavi, A. (2006). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. En I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos y P. Canavarro (Eds.), *Números y álgebra na aprendizagem da matemática e na formaçâo de profesores* (pp. 29-47). Caminha, Portugal: Sociedade Portugesa de Ciências de Eduacaçâo.

Arzarello, F. (1996). The role of natural language in prealgebraic and algebraic thinking. En H. Steinbring, M .G. Bartolini Bussi y A. Sierspinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 249-261). Reston, VA: NCTM.

Arzarello, F., Bazzini, L. y Chiappini, G. (2001). A model for analysing algebraic processes of thinking. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 61-81). Dordrecht, Los Países Bajos: Kluwer.

Banerjee, R. (2008). *Developing a learning sequence for transiting from arithmetic to elementary algebra.* Tesis doctoral, Homi Bhabha Centre for Science Education, Mumbai, India.

Banerjee, R. (2011). Is arithmetic useful for the teaching and learning of algebra? *Contemporary education dialogue, 8*(2), 137-159.

Baroody, A. J. y Coslick, R. T. (1998). *Fostering children's mathematical power.* Mahwah, NJ: Laurence Erlbaum Associates.

Bastable, V. y Schifter, D. (2007). Classroom stories: examples of elementary students engaged in early algebra. En J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 165-184). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Bednarz, N., Kieran, C. y Lee, L. (1996). *Approaches to algebra. Perspectives for Seeing*. Harmondsworth, Middlesex: BBC y Penguin Books Ltd.

Bell, A. (1988). Algebra choices in curriculum design. En A. Borbas (Ed.), *Proceedings of the 12th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 147-153). Veszprém, Hungary: Ferenc Genzwein OOK.

Bell, A. (1995). Purpose in school algebra. *Journal of Mathematical Behavior, 14,* 41-74.

Blanton, M. L. y Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Boero, P. (1994). About the role of algebraic language in mathematics and related difficulties. *Rendiconti del Seminario Matematico, 52*(2), 161-194.

Boero, P. (2001). Transformation and anticipation as key processes in algebraic problem solving. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 99-119). Dordrecht, Los Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Boero, P., Dauek, N. y Ferrari, P. L. (2002). Developing mastery of natural language. Approaches to some theoretical aspects of mathematics. En L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 262-295). Routledge.

Booth, L. R (1982). Ordering your operations. *Mathematics in School, 11*(3), 5-6.

Booth, L. R. (1989). A question of structure or a reaction to: “the early learning algebra: a structural perspective”. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (Vol. 4, pp. 57-59). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates y NCTM.

Boulton–Lewis, G. M., Cooper, T., Atweh, B., Pillay, H. y Wills, L. (2000). Pre–Algebra: a cognitive perspective. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 144-151). Stellenbosch, Sudáfrica: Program Committee for PME22.

Brizuela, B. M. y Lara-Roth, S. (2001). Additive relations and function tables. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI study conference. The future of the teaching and learning of algebra* (pp. 110-119). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Cai, J. y Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives.* Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Carpenter, T. P. y Franke, M. L. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: generalization and proof. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI study conference. The future of the teaching and learning of algebra* (pp.155-162). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic y algebra in elementary school.* Portsmouth, Reino Unido: Heinemann.

Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics: concepts and processes* (pp. 7-44). New York, NY: Academic Press.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D. y Brizuela, B. M. (2001). Can young students operate on unknowns? En M. van der Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 1, pp. 130-140). Utrecht, Los Países Bajos: Freudenthal Institute.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M. y Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37*(2), 87-115.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (Vol. 2., pp. 669-705). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Castro, E. y Molina, M. (2007). Desarrollo de pensamiento relacional mediante trabajo con igualdades numéricas en aritmética básica. *Educación Matemática*, *19*(2), 67-94.

Castro E., Rico, L. y Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias*, 15(3), 361-371

Cerulli, M. y Mariotti, M. A. (2001). Arithmetic and algebra, continuity or cognitive break? The case of Francesca. En M. Heuvel–Penhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, 225-231). Utrecht, Los Países Bajos: Freudenthal Institute.

Chazan, D. y Yerushalmy, M. (2003). On appreciating the cognitive complexity of school algebra: Research on algebra learning and directions o curricular change. En

J. Kilpatrick, W. G. Martin y D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 123-135). Reston, VA: NCTM.

Davis, R. B. (1975). Cognitive processes involved in solving simple algebraic equations. *Journal of Children´s Mathematical Behavior*, 1(3), 7-35.

Demby, A. (1997). Algebraic procedures used by 13-to 15- years old. *Educational Studies in Mathematics, 33,* 45-70.

Drijvers, P., Goddijn, A. y Kindt, M. (2011). Algebra education: exploring topics and themes. En P. Drijvers (Eds.), *Secondary algebra education* (pp. 5-26). Rotterdam, Los Países Bajos: Sense Publishers.

Drijvers, P. y Hendrikus, M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter.* Tesis doctoral no publicada. Utrecht, Los Países Bajos: Utrecht University.

Drouhard, J.-P. (2001). Research in language aspects of algebra: a turning point? En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra* (pp. 238-242). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Drouhard, J.-P. y Teppo A. R. (2004). Symbols and language. En K. Stacey, H. Chick, y M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra. The 12th ICMI study* (227-264). New York, NY: Kluwer.

Empson, S. B., Levi, L. y Carpenter, T. (2011). The algebraic nature of fractions: developing relational thinking in elementary school. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 409-428). Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Esty, W. W. (1992). Language concepts of mathematics. *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 14(4), 31-53.

Foxman, D. y Beishuizen, M. (1999). Untaught mental calculation methods used by 11-year-olds. *Mathematics in School*, *28*(5), 5-7.

Freiman, V. y Lee, L. (2004). Tracking primary students' understanding of the equal sign. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 415-422). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Fujii, T. y Stephens, M. (2001). Fostering an understanding of algebraic generalization through numerical expressions: the role of quasi-variables. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI study conference* (pp. 258-264). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Furinghetti, F. y Paola, D. (1994). Parameters, unknowns and variables: a little difference? En J. P. da Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics* (Vol. 2, 368-375). Lisboa, Portugal: Universidad de Lisboa.

Gómez, B. (1994). *Los métodos de cálculo mental: Un análisis en la formación de profesores.* Tesis doctoral, Universidad de Valencia, Valencia.

Gray, E. y Tall, D. (1992). Success and failure in mathematics: the flexible meaning of symbols as process and concept. *Mathematics Teaching, 14*, 6-10.

Gray, E. y Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 115–141.

Greeno, J. G. (1982, marzo). *A cognitive learning analysis of algebra.* Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Boston, MA.

Harper, E. (1987). Ghosts of Diophantus. *Educational Studies in Mathematics, 18*, 75-90.

Heid, M. K. (1996). A technology-intensive functional approach to the emergence of algebraic thinking. En A. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 239-255). Dordrecht, Los Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Herscovics, N. y Linchevski, L. (1994). Cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics, 27*(1), 59-78.

Hewitt, D. (1998). Approaching arithmetic algebraically. *Mathematics Teaching*, *163*, 19-29.

Hoch, M. (2003). Structure sense. En M. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the 3rd Conference for European Research in Mathematics Education* (CD). Bellaria, Italia: ERME.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th*

Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol.3, pp. 49-56). Bergen, Norway: Bergen University College.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2005). Students' difficulties with applying a familiar formula in an unfamiliar context. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 145-152). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills: an unexpected result. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 305-312). Praga, República Checa: Faculty of Education, Charles University in Prague.

Hotz, H. G. (1918). First-year algebra scales. *Contributions to education,* 90.

Kaput, J. (1998). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J., Carraher, D. W. y Blanton, M. L. (2008). *Algebra in the early grades.* Londres, Reino Unido: Routlege.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. En S. Wanger y C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (Vol. 4, pp. 33–59). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates y NCTM.

Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 96-112). New York, NY: Cambridge University Press.

Kieran, C. (1991). A procedural–structural perspective on algebra research. En F. Furinghetti (Ed), *Proceedings of the Fifteenth International Conference for the*

Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, pp. 245-253). Assisi, Italia: PME Program Committee.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390–419). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. En C. Alsina, J. Álvarez, B. Hodgson, C. Laborde y A. Pérez (Eds.), 8th International Congress on Mathematical Education: Selected lectures (pp. 271-290). Sevilla, España: S.A.E.M. Thales

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. A broadening of sources of meaning. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 11-49). Róterdan, Países Bajos: Sense Publishers.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707–62). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Kilpatrick, J., Swafford, J. O. y Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academy.

Kirshner, D. (1987). *Linguistic analysis of symbolic elementary algebra.* Tesis doctoral, University of British Columbia, Canada.

Kirshner, D. (1989). The visual syntax of algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(3), 274-287.

Kirshner, D. y Awtry, T. (2004). Visual salience of algebraic transformations. *Journal for Research in Mathematics Education, 35(4),* 224–257.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A. y Stephens, A. C. (2005). Middle School Students' understanding of core algebraic concepts: equivalence & variable. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik [International Reviews on Mathematics Education], 37*(1), 68-76.

Koedinger, K. R. y Nathan, M. J. (2004). The real story behind story problems: effects of representations on quantitative reasoning. *Journal of the Learning Sciences, 13*(2), 129-164.

Koehler, J. (2002). *Algebraic reasoning in the elementary grades: Developing an understanding of the equal sign as a relational symbol*. Tesis de máster no publicada, Universidad de Wisconsin–Madison, Wisconsin.

Liebenberg, R., Sasman, M. y Olivier, A. (1999, Julio). *From numerical equivalence to algebraic equivalence. Mathematics learning and teaching initiative (MALATI).* Presentado en el V congreso anual de la Asociación de Educación Matemática de Sur África (AMESA), Puerto Elizabeth. Descargado el 15 de Febrero de 2005 de http://www.wcape.school.za/malati/Files/Structure992.pdf.

Linchevski, L. y Herscovics, D. (1994). Cognitives obstacles in pre-algebra. En J. P. Ponte y J. F. Martos (Eds), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 176-183). Lisboa: Universidad de Lisboa.

Linchevski, L. y Livneh, D. (1999). Structure sense: the relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics, 40*(2), 173-196.

Linchevski, L. y Livneh, D. (2002). The competition between numbers and structure: Why expressions with identical algebraic structures trigger different interpretations. *Focus on Learning Problems in Mathematic, 24*(2), 20-35.

Lins, R. y Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: the current state of the field. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *The teaching and learning of algebra. The 12th ICMI Study* (pp. 47-70). Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers.

Ma, L. (1999/2010). *Conocimiento y enseñanza de las matemáticas elementales. La comprensión de las matemáticas fundamentales que tienen los profesores en China y los EE.UU.* (Trad. Paula Micheli). Santiago de Chile: Academia Chilena de Ciencias.

MacGregor, M. (1996). Aspectos curriculares en las materias aritmética y álgebra. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas, 9*, 65-69.

MacGregor, M. y Stacey, K. (1997). Students´ understanding of algebraic notation: 11-15. *Educational studies in mathematics, 33,* 1-19.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Londres: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J., Drury, H. y Bills, E. (2007). Explorations in the zone of proximal awareness. En J. Watson y K. Beswick (Eds.), *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 1, pp. 42-58). Adelaida, Australia: MERGA.

Mason, J., Graham, A. y Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing thinking in algebra*. Londres, Reino Unido: The Open University.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de Pensamiento Relacional y Comprensión del Signo igual por Alumnos de Tercero de Educación Primaria.* Tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, *3*(3), 135-156.

Molina, M. (2010). Una visión estructural del trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas. *Suma*, 65, 7-15.

Molina, M. y Ambrose, R. (2008). From an operational to a relational conception of the equal sign. Thirds graders' developing algebraic thinking. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 30*(1), 61–80.

Molina, M., Castro, E. y Castro, E. (2009). Elementary students´ understanding of the equal sign in number sentences. *Electronic Journal of Research in Educational, 17, 7(1), 341-368.*

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), 75–88.

Molina, M. y Mason, J. (2009). Justifications-on-demand as a device to promote shifts of attention associated with relational thinking in elementary arithmetic. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 9*(4), 224-242.

Nathan, M. J. y Koedinger, K. R. (2000). Teachers' and researchers' beliefs about the development of algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(2), 168-190.

Novotná, J. y Hoch, M. (2008). How structure sense for algebraic expression or equations is related to structure sense for abstract algebra. *Mathematics Education Research Journal, 20*(2), 93-104

Palarea, M. M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detención de errores comunes cometidos en álgebra por los alumnos de 12 a 14 años*. Tesis doctoral. Universidad de la Laguna, Tenerife. Consultado el 10 de febrero de 2011 en http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-106509_archivo.pdf

Peltier, M. (2003). Problemas aritméticos. Articulación, significados y procedimiento de resolución. *Educación Matemática, 15*(3), 29-55.

Piccioto, H. (1998). *Operation sense, tool–based pedagogy, curricular breadth: A proposal.* Descargado el 20 de Diciembre de 2005 de http://www.picciotto.org /math–ed/early-math/early. html

Pirie, S. y Martin, L. (1997). The equation, the whole equation and nothing but the equation! One approach to the teaching of linear equations. *Educational Studies in Mathematics, 34*(2), 159-181.

Reeve, W. D. (1926). *A diagnostic study of the teaching problems in high school mathematics.* Boston, MA: Ginn.

Resnick, L. B., Bill, V. y Lesgold, S. (1992). Development of thinking abilities in arithmetic class. En A. Demetriou, M. Shayer y A. Efklides (Eds.), *Neo-piagetian theories of cognitive development: Implications and applications for education* (pp. 210-230). Londres: Routledge.

Rodríguez-Domingo, S. (2011). *Traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación verbal y simbólico por estudiantes de secundaria.* Trabajo de Fin de Máster, Universidad de Granada, Granada. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1751/

Rodríguez-Domingo, S., Molina, M., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2011). *Errores en la traducción de enunciados algebraicos en la construcción de un dominó algebraico.* Comunicación presentada en la reunión del grupo PNA dentro del XV seminario anual de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), Septiembre de 2011, Ciudad Real. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1887/

Rojano, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las ciencias, 12*(l), 45-56.

Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA, 2*(2), 61-74.

Schifter, D. (1999). Reasoning about operations. Early algebraic thinking in grades K–6. En L. V. Stiff y F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K–12. NCTM Yearbook* (pp. 62-81). Reston, VA: NCTM.

Schliemann A. D., Carraher, D. W. y Brizuela, B. M. (2007). *Bringing out the algebraic caracter of arithmetic.* Londres: Lawrence Erlbaum Associates.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36.

Sfard, A. y Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2-3), 191-228

Skemp, R. R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher, 26*(3), 9-15.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En Rico, L. (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.

Stacey, K. y MacGregor, M. (2001) Curriculum Reform and Approaches to Algebra. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 141-153). Dordrecht, Los Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Steinberg, R. M., Sleeman, D. H. y Ktorza, D. (1990). Algebra students' knowledge of equivalence of equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(2), 112-121.

Stephens, M. (2007). Students' emerging algebraic thinking in primary and middle school years. En J. Watson y K. Beswick (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 2, pp. 678-687). Adelaide, Australia: MERGA.

Subramaniam, K. (2004, Julio). *Naming practices that support reasoning about and with expressions.* Presentado en the 10th International Congress on Mathematical Education, Copenhagen, Denmark.

Sutherland, R. (2002). *A comparative study of algebra curricula.* Report prepared for the Qualifications and Curriculum Authority. Londres: QCA.

Sutherland, R. (2008). A dramatic shift of attention: From arithmetic to algebraic thinking. En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Sutherland, R., Rojano, T., Bell, A. y Lins, R. (Eds.) (2001). *Perspectives on school algebra.* Dordrecht, Los Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. y Thomas, M. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. *Education Studies in Mathematics,* 22, 125-147.

Tall, D., Thomas, M., Davis, G., Gray E. y Simpson, A. (2000). What is the object of the encapsulation of a process? *Journal of Mathematical Behavior*, *18*(2), 1-19.

Thompson, P. y Thompson, A. (1987). Computer presentations of structure in algebra. En J. Bergeron, N. Herscovics, y C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, 248-254). Montreal, Canadá: PME. Disponible a 4/5/2012 en http://pat-thompson.net/PDFversions/1987StrucInAlg.pdf

Thorndike, E. L., Coob, M. V., Orleans, J. S., Symonds, P. M., Wald, E. y Woodyard E. (1923). *The psychology of algebra.* New York, NY: Macmillan.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. En A. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra K–12* (pp. 8-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Usiskin, Z. (1995). Why is algebra important to learn? *American educator*, *19*(1), 30-37

Vega-Castro, D. C. (2010). *Sentido estructural manifestado por alumnos de 1º de bachillerato en tareas que involucran igualdades notables.* Trabajo fin de máster, Universidad de Granada, Granada.

Vega-Castro, D. C., Molina, M. y Castro, E. (2011). Estudio exploratorio sobre el sentido estructural en tareas de simplificación de fracciones algebraicas. En M. Marín, G. Fernández y J. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XV* (pp. 575-586). Ciudad Real: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Vega-Castro, D. C., Molina, M. y Castro, E. (2012). *Reproduction of algebraic structures by 16-18 year old students.* Comunicación aceptada para su presentación en el 12th International Congress on Mathematical Education a celebrarse en Seúl del 8 al 14 de Julio de 2012.

Vega-Castro, D. C., Molina, M. y Castro, E. (en prensa). Sentido estructural de estudiantes de Bachillerato en tareas de simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables. *Relime.*

Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algebre. En C. Laborde (Ed.), *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathematiques et de l'informatique* (pp. 189-199). Paris: La Pensée Sauvage.

Vergnaud, G. (1989). *L'obstacle des nombres négatifs et l'introduction á l'algébre. Construction des savoirs.* Colloque International Obstacle Epistémologique et conflict Socio – cognitif, CIRADE, Montreal.

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. En T. Nuñes y P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics – an international perspective* (pp. 5-28). East Sussex, Reino Unido: Psychology Press.

Warren, E. (2001). Algebraic understanding and the importance of operation sense. En M. Heuvel–Penhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 399-406). Utrecht, Los Países Bajos: Freudenthal Institute.

Warren, E. (2004). Generalizing arithmetic: supporting the process in the early years. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 417-424). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Wagner, S. y Kieran, C. (1989). *Research issues in the learning and teaching of algebra.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Wagner, S. y Parker, S. (1999). Advancing algebra. En B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, grades k-12. Readings from NCTM´s school-based journals and other publications* (pp. 328-340). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Wagner, S., Rachlin, S. L. y Jensen, R. J. (1984). *Algebra learning project: Final report.* Atenas: Department of Mathematics, University of Georgia.

Wheeler, D. (l989). Contexts for research on the teaching and learning of algebra. En S. Wagner, y C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 278–287). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates.