ENSEÑANDO UNA MATEMATICA MAS NOVEDOSA Y DIVERTIDA

Parte II: Sucesiones Numéricas y logaritmo

Nora Cosenza - Norma Gurruchaga - María José Vignoli

RESUMEN: La finalidad de este trabajo (continuación de la Parte I) es despertar mayor interés en el aprendizaje de la Matemática a través del estudio de situaciones curiosas y novedosas.

En esta parte II (continuación de la parte I [1]) trataremos los siguientes temas:

-I. SUCESIONES NUMERICAS.

-II. LOGARITMO.

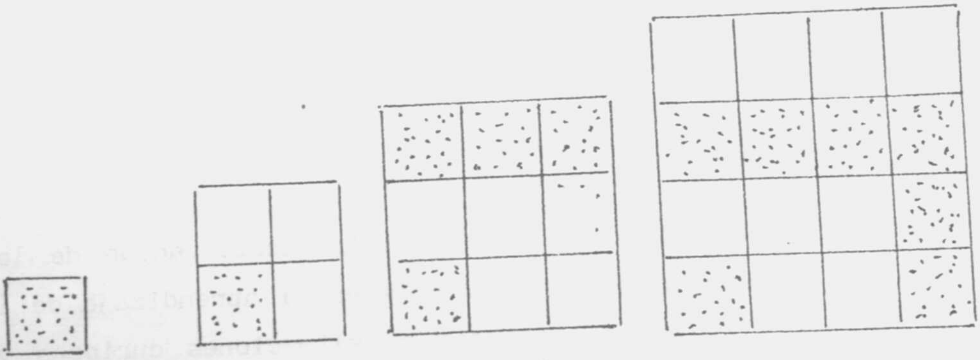
I SUCESIONES NUMERICAS:

En este tema describimos actividades para que alumnos de primer año, descubran cómo efectuar sumas que tradicionalmente son abordadas en el estudio de sucesiones [2,3,5,6,7].

1° La suma de los n primeros números impares.

La actividad propuesta es: a partir de un cuadrado unitario, formar cuadrados mayores, agregando progresivamente otros cuadrados unitarios los que representan números impares. (figura 1).

Así:



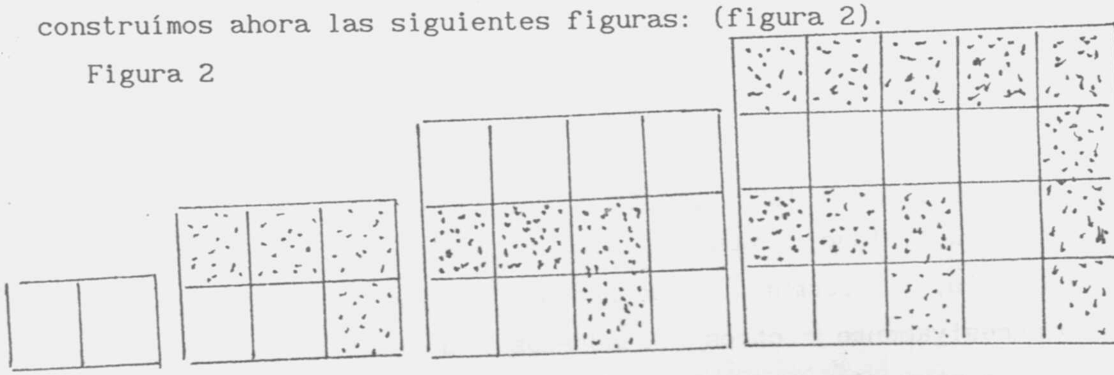
1	1+3	1+3+5	1+3+5+7
1	4	9	16
1	2^2	3^2	4^2

A medida que van formando los cuadrados mayores, irán fijándose en la relación que va surgiendo. Así llegan a descubrir que: "La suma de los n primeros números impares es n^2".

2°. <u>La suma de los primeros números pares</u>.

Recurrimos otra vez a los cuadrados unitarios y construímos ahora las siguientes figuras: (figura 2).

Figura 2



2	2+4	2+4+6	2+4+6+8
1x2	2x3	3x4	4x5
2	6	12	20

Observemos que en este caso se van formando rectángulos, donde cada lado tiene un cuadrado unitario más que el otro y se obtiene:

suma de los dos primeros números pares: 2x3 = 6

suma de los tres primeros números pares: 3x4 = 12

suma de los cuatro primeros números pares: 4x5 = 20,

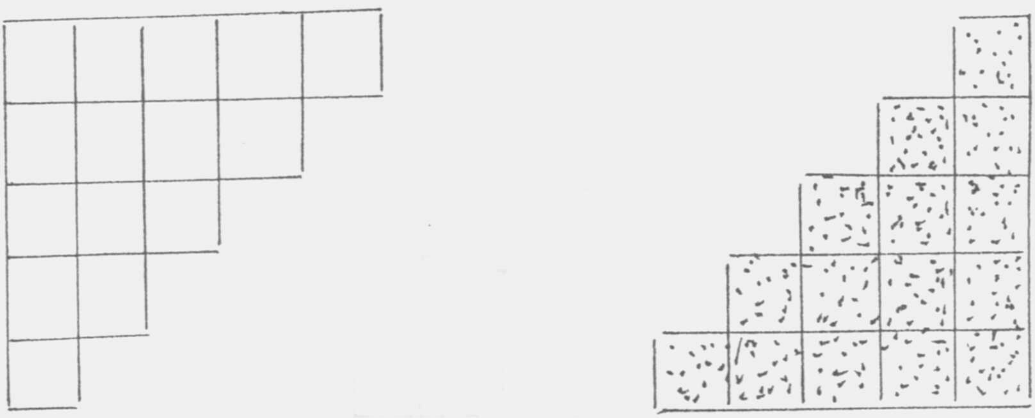
y si se suman, por ejemplo, los treinta primeros números pares: 30 x 31 = 930.

Entonces se descubre geométricamente que "la suma de los primeros números pares es n(n+1)".

3°. <u>La suma de los primeros números naturales</u>.

Las figuras que se van formando ahora son:

Figura 3



1+2+3+4+5   5+4+3+2+1.

Aplicando la propiedad conmutativa se descubre que las dos figuras son las mismas y que encajan de manera que forman un rectángulo de 6 x 5.

Por lo tanto: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{1}{2}(6.5)$; y si fuesen los primeros 450 números que se suman: $1 + 2 + 3 + \ldots + 450 = \frac{1}{2}(451.450)$. Concluímos que: "La suma de los n primeros números naturales es: $\frac{1}{2}(n^2+n) = \frac{n}{2}(n+1)$".

<u>Observación</u>: Resulta claro que este resultado puede obtenerse como una simple consecuencia de lo visto anteriormente y sin usar los cuadritos geométricos. La idea fundamental es observar la propiedad de que la suma de los n primeros números pares es el doble de la suma de los n primeros números naturales y por lo tanto tenemos:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}(2+4+,\ldots,+2n) = \frac{1}{2}n(n+1).$$

4°. <u>Usando una construcción geométrica</u>:

Para verificar la propiedad:

$(1 + 2 + 3 +,\ldots,+ n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 +,\ldots,+ n^3$, la figura 4 nos muestra la proposición para n = 5.

Figura 4

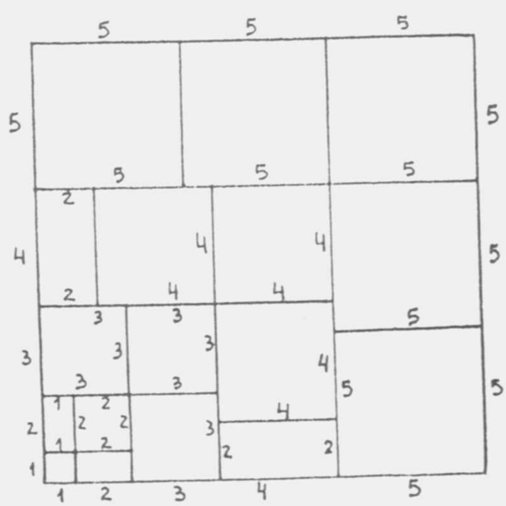


Fig. 4

5°. <u>Usando el binomio de Newton</u>:

a) <u>Para calcular</u> la suma de los primeros n números naturales:

$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = ?$

Consideremos las siguientes potencias de grado 2:

$$
\begin{aligned}
(1+1)^2 &= 1^2 + 2.1.1 + 1^2 \\
(2+1)^2 &= 2^2 + 2.2.1 + 1^2 \\
(3+1)^2 &= 3^2 + 2.3.1 + 1^2 \\
(4+1)^2 &= 4^2 + 2.4.1 + 1^2 \\
&\vdots \\
(n+1)^2 &= n^2 + 2.n.1 + 1^2,
\end{aligned}
$$

sumando miembro a miembro tenemos:

$(n+1)^2 = 1 + 2(1 + 2 + 3 +, \ldots, + n) + n,$ pues $(1+1)^2$ se cancela 2^2 con 3^2 y así sucesivamente.

Entonces:

$$1 + 2 + 3 +, \ldots, + n = \frac{1}{2}\,[(n+1)^2-1-n] =$$

$$= \frac{1}{2}\,(n^2 + 2n + 1-1-n) = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

b) <u>Con este mismo razonamiento</u>: podemos calcular:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 +, \ldots, + n^2 = ?$

Consideremos ahora potencias de grado tres:

$$
\begin{aligned}
(1+1)^3 &= 1^3 + 3.1^2.1 + 3.1.1^2 + 1^3 \\
(2+1)^3 &= 2^3 + 3.2^2.1 + 3.2.1^2 + 1^3
\end{aligned}
$$

$$(3+1)^3 = 3^3 + 3.3^2.1 + 3.3.1^2 + 1^3$$

$$\vdots$$

$$(n+1)^3 = n^3 + 3.n^2.1 + 3.n\,1^2 + 1.$$

Sumando miembro a miembro, tenemos: $(n+1)^3 =$

$= 1 + 3\,(1^2 + 2^2 + 3^2+,\ldots,+ n^2) + 3\,(1 + 2 + 3+,\ldots,+n) + n$

$= 1 + 3(1^2 + 2^2 + 3^2+,\ldots,+n^2) + 3\dfrac{(n^2+n)}{2} + n$, es decir:

$3(1^2 + 2^2 + 3^2+,\ldots,+n^2) = (n+1)^3 - \dfrac{3}{2}\,n^2 - \dfrac{3}{2}\,n - n - 1 =$

$= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - \dfrac{3}{2}\,n^2 - \dfrac{3}{2}\,n - n - 1 =$

$= n^3 + \dfrac{3}{2}\,n^2 + \dfrac{1}{2}\,n.$

Dividiendo por 3, tenemos:

$$1^2+2^2+3^2+,\ldots,+n^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}\text{, es decir:}$$

$$1^2+2^2+3^2+,\ldots,+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

6°. <u>Números de Fibonacci</u>:

a) ¿<u>Cómo adivinar el número suma</u>?

Hagamos seguir a una persona las siguientes sentencias:

- Elija un número cualquiera: N° 1...
- Elija otro: N° 2...
- Sume los dos primeros obteniéndose así el tercer número de la sucesión: N° 3...
- Sume el segundo con el tercero, para obtener el cuarto: N° 4...
- Sume el tercero con el cuarto, para obtener el quinto: N° 5...
- Y así hasta llegar al décimo número: N° 10...

Controlamos que haya escrito todos los números.

Ahora pedimos que sume la sucesión de los diez números, manteniéndolos en secreto.

Mientras tanto nosotros podremos adivinar esta suma con sólo saber el número que ocupó el séptimo lugar de la sucesión y multiplicandolo por 11.

Justificación:

N° 1: x

N° 2: y

N° 3: $x + y$

N° 4: $x + 2y$

N° 5: $2x + 3y$

N° 6: $3x + 5y$

N° 7: $5x + 8y \rightarrow (5x + 8y).11 = 55x + 88y.$

N° 8: $8x + 13y$

N° 9: $13y + 21y$

N° 10: $21x + 34y$

Sumando: $55x + 88y$.

b) ¿Quiénes son los "números de Fibonacci"?.

En el libro del Abaco escrito por el famoso matemático Leonardo de Pisa, conocido más por su apodo Fibonacci, del año 1202, se encuentran casi todos los conocimientos algebraicos de aquel tiempo. Este voluminoso tratado desempeñó un papel notable en el desarrollo de la matemática en Europa occidental, durante varios siglos.

Numerosos problemas: constituyen una parte considerable de la obra. Analicemos uno de ellos:

-"¿Cuántas parejas de conejos nacen en el transcurso de un año, de una pareja inicial?"

Teniendo en cuenta que cada pareja produce otra al cabo de un mes, las que serán productivas al segundo mes de su existencia.

Sea la pareja inicial nacida el 1° de enero:

1° de enero	1 pareja
1° de febrero	1 pareja
1° de marzo	2 parejas
1° de abril	3 parejas
1° de mayo	5 parejas
1° de junio	8 parejas
1° de julio	13 parejas
1° de agosto	21 parejas
1° de septiembre	34 parejas
1° de octubre	55 parejas
1° de noviembre	89 parejas
1° de diciembre	144 parejas
1° de enero	233 parejas.

Pasemos de los conejos a los números, generalizando se puede definir la siguiente sucesión:

$$u_1 = 1$$
$$u_2 = 1$$
$$\vdots$$
$$u_n = \underbrace{u_{(n-1)}}_{\text{parejas del mes anterior}} + \underbrace{u_{(n-2)}}_{\text{parejas nuevas}}, \qquad \text{con } n > 2$$

Esta sucesión, en honor al autor del problema, se llama "Sucesión de Fibonacci" y sus términos se llaman números de Fibonacci.

Estos números poseen una serie de propiedades interesantes e importantes:

Propiedad 1: La suma de los n primeros números: $u_1 + u_2 + u_3 +, \ldots, + u_n = ?$

Si: $u_1 = u_3 - u_2$

$u_2 = u_4 - u_3$

$u_3 = u_5 - u_4$

$\vdots$

$u_{(n-1)} = u_{(n+1)} - u_n$

$u_n = u_{(n+2)} - u_{(n+1)}$ y sumando miembro a miembro tenemos: $u_1 + u_2 + u_3 +, \ldots, + u_n = u_{(n+2)} - u_2$, y recordando que $u_2 = 1$, entonces obtenemos;

$u_1 + u_2 +, \ldots, + u_n = u(n+2) - 1.$

Propiedad 2: La suma de los números de índices impares: $u_1 + u_3 + u_5 + , \ldots, + u_{(2n-1)} = ?$

Si: $u_1 = u_2$

$u_3 = u_4 - u_2$

$u_5 = u_6 - u_4$

$\vdots$

$u(2n-1) = u_{2n} - u_{(2n-2)}$ y sumando miembro a miembro, tenemos: $u_1 + u_3 + u_5 + , \ldots, + u_{(2n-1)} = u_{2n}$, con lo cual: $u_1 + u_3 + u_5 + , \ldots, + u_{(2n-1)} = u_{2n}$.

Propiedad 3: La suma de los números de índice par: $u_2 + u_4 + u_6 + , \ldots, + u_{2n} = ?$

Según la propiedad 1: $u_1 + u_2 + u_3, \ldots, + u_n = u_{(2n+2)} - 1$, y restando de esta igualdad la propiedad 2, tenemos:

$u_2 + u_4 + u_6 + , \ldots, + u_{2n} = u_{(2n+2)} - 1 - u_{2n} = u(2n+1)-1$,

entonces: $u_2+u_4+u_6+, \ldots, + u_{2n} = u_{(2n+1)}-1$.

c) <u>Aplicación de Fibonacci en el triángulo de Pascal</u>: Tanto interés como los números de Fibonacci tienen los llamados <u>coeficientes binomiales</u>.

Los coeficientes binomiales son los coeficientes que tienen las potencias de x en el desarrollo $(1+x)^n$. Según el binomio de Newton tenemos:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 +, \ldots, + C_n^n x^n.$$

Los números C_n^k se determinan unívocamente para todos los valores enteros positivos de n y para todos los valores enteros no negativos de k que no sean mayores que n.

Entonces: $C_n^k = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2.3.\ldots.k}$.

Esta fórmula suele emplearse como definición de los coeficientes binomiales. Lo determina como el número de combinaciones de orden k formada con n elementos.

Veremos que <u>existen vínculos directos entre los coeficientes binomiales y los números de Fibonacci</u>.

Consideremos la siguiente tabla: Triángulo de Pascal:

$$
\begin{array}{lllll}
C_0^0 & & & & \\
C_1^0 & C_1^1 & & & \\
C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & & \\
\vdots & & & & \\
C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 \ldots & & C_n^n ,
\end{array}
$$

es decir:

$$
\begin{array}{lllllll}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
\vdots & & & & & &
\end{array}
$$

Tracemos por los elementos del triángulo de Pascal las líneas que forman 45° con sus filas, llamándolas diagonales ascendentes del triángulo de Pascal. Por ejemplo, serán diagonales ascendentes la recta que pasa por los números 1,4 y 3, o la recta que pasa por los números 1,5,6 y 1.

La suma de los números que pertenecen a una misma diagonal ascendente es un número de Fibonacci.

Los números de la n-ésima diagonal son:
C^0_{n-1}; C^1_{n-2}; C^2_{n-3}; C^3_{n-4};,..., y los de la (n+1)-ésima

diagonal son:

$$C^{o}_{n};\ C^{1}_{n-1};\ C^{2}_{n-2};\ C^{3}_{n-3};\ldots$$

La suma de estos números es:

$$C^{o}_{n} + \underbrace{C^{1}_{n-1} + C^{o}_{n-1}}_{C^{1}_{n}} + \underbrace{C^{2}_{n-2} + C^{1}_{n-2}}_{C^{2}_{n-1}} + \ldots =$$

$= C^{o}_{n+1} + C^{1}_{n} + C^{2}_{n-1} + ,\ldots,$ que no es más que la suma de los elementos que pertenecen a la (n+2)-ésima diagonal ascendente del triángulo.

De aquí, basándonos en la <u>propiedad 1</u> vista anteriormente, obtenemos que:

"La suma de todos los coeficientes binomiales que se encuentran en la n-ésima diagonal ascendente del triángulo de Pascal y por encima de ésta, es igual a la suma de los coeficientes de la (n+2)-ésima diagonal menos 1.

II. LORARITMO.

Veremos una nueva forma de definir logaritmo natural a través de un método geométrico distinto al habitual. [4].

1°. <u>Area de una franja de hiperbola</u>.

Sea H la rama positiva del gráfico de la función $y = \frac{1}{x}$, esto es la función que asocia a cada número real positivo $x > 0$, el número $y = \frac{1}{x}$. H es el subconjunto del plano constituído por los puntos de la forma $(x; \frac{1}{x})$, con $\underline{x \geq 0}$.

Geométricamente, H es la rama de la hipérbola $x.y = 1$, que se ubica en el primer cuadrante. (figura 5).

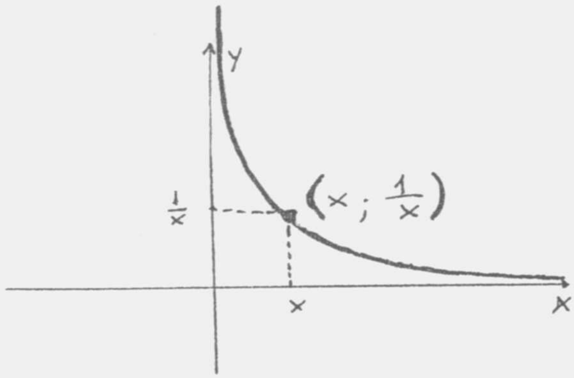


Figura 5

Una franja de hipérbola es determinada cuando fijamos dos números reales positivos a y b con a < b y tomamos la región del plano limitada por las dos rectas verticales x = a, x = b , por el eje de abscisa y por la hipérbola H. Indicaremos esa región con el símbolo H_a^b. (figura 6)

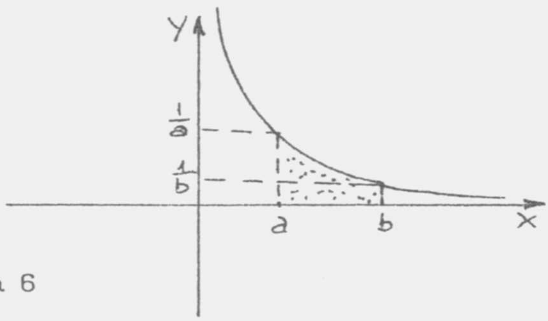


Figura 6

Mostraremos ahora como proceder a fin de calcular el área de una franja de la hipérbola.

Descomponemos el intervalo [a,b] en un número finito de intervalos consecutivos. Con base en cada uno de los intervalos [c, d] de descomposición (con c < d), se consideran rectángulos de altura igual a $\frac{1}{d}$. El vértice superior de dicho rectángulo toca la hipérbola H y lo llamaremos rectángulo inscripto en la franja H_c^d. La unión de esos rectángulos inscriptos constituyen un polígono rectangular inscripto en la franja [a,b]. (Figura 7).

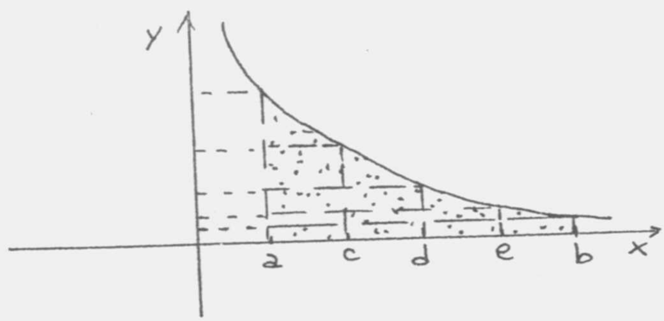


Figura 7

Cada polígono rectangular inscripto en la franja H_a^b da un valor aproximado por defecto del área de H_a^b. Tanto o más aproximado será ese valor cuanto más fina sea la subdivisión del intervalo [a,b]. Esto es cuanto más próximos uno de otro estén los puntos de la subdivisión, menor será la diferencia entre el valor exacto del área de H_a^b y el área del polígono rectangular inscripto.

Podemos también decir que el área de H_a^b es el extremo superior del conjunto de las áreas de los polígonos rectangulares inscriptos en H_a^b.

2°. <u>Propiedad fundamental de las áreas de franjas de hipérbola</u>.

<u>Teorema:</u> Para todo número real $k > 0$, las franjas H_a^b y H_{ka}^{kb} tienen la misma área.

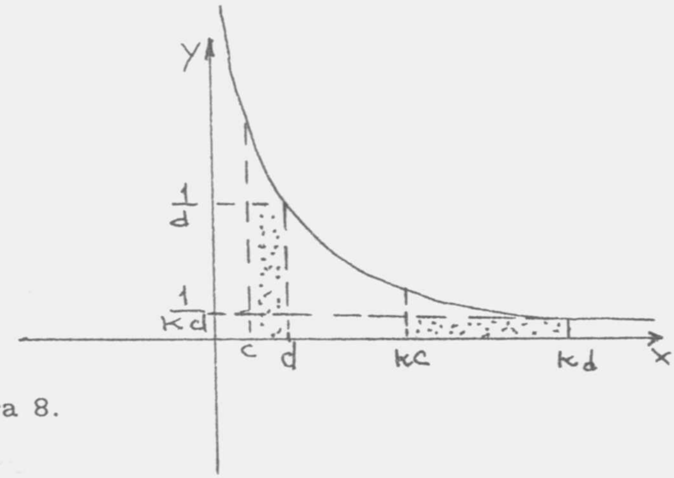


Figura 8.

Tanto el rectángulo de base [c;d] como el de base [kc;kd] tienen la misma área $(1-\frac{c}{d})$.

Consideramos ahora un polígono rectangular P inscripto en H_a^b. Si multiplicamos por k cada una de las abscisas de los puntos de subdivisión del [a;b], obtendremos una subdivisión en el intervalo [ka; kb] y por lo tanto otro polígono P_k inscripto en la franja H_{ka}^{kb}.

Entonces para cada polígono rectangular inscripto en H_a^b existe otro inscripto en H_{ka}^{kb} que tiene su misma área.

Esto significa que las áreas de estas dos franjas son números que poseen exactamente las mismas aproximaciones inferiores y por lo tanto son iguales.

Además es fácil verificar que si $a < b < c$: Area (H_a^b) + Area $(H_b^c) = (H_a^c)$. (figura 9).

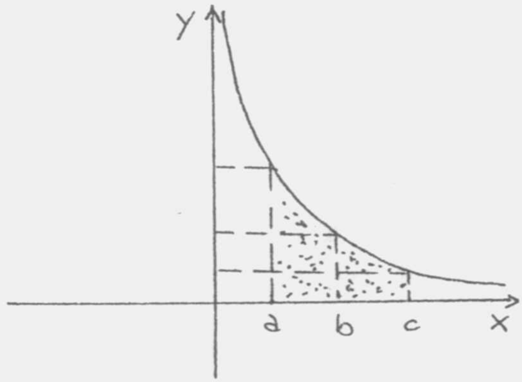


Figura 9.

3°. Definicion de Logaritmos Naturales: Sea x un número real positivo. Definiremos el logaritmo natural de x como el area de la franja H_1^x. Así: $\ln x = \text{Area } (H_1^x)$ con $x > 0$, con la convención de tomar $\text{Area } (H_1^x) < 0$ cuando $0 < x < 1$.

Queda así definida una función real:

$$\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}.$$

En particular, cuando $x = 1$, H_1^1, se reduce a un segmento, por lo tanto tenemos que el área es igual a cero y en consecuencia $\ln 1 = 0$.

Podemos entonces escribir:

$\ln 1 = 0,$

$\ln x > 0 \quad$ si $x > 1,$

$\ln x < 0$ si $0 < x < 1.$

Ejemplos: Dados los números reales mayores que cero a y b, escribir el área de la franja de hipérbola H_a^b en términos naturales, (figura 7):

$$\text{Area } (H_a^b) = \ln b - \ln a.$$

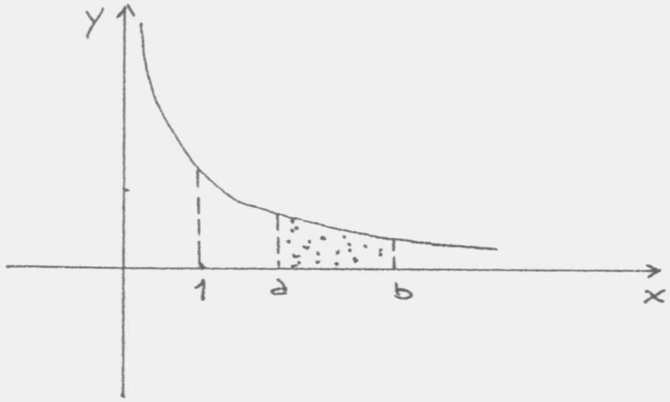


Figura 10

La propiedad más importante de los logaritmos naturales es:

"Logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos de los factores: ln(x.y) = lnx + ln y".

Considerando las franjas de hipérbola, debemos probar en virtud de la definición de logaritmo: Area (H_1^{xy}) = Area (H_1^{x}) + Area (H_1^{y}).

Por lo visto anteriormente:

Area, (H_1^{xy}) = Area (H_1^{x}) + Area (H_x^{xy}), y, como Area (H_x^{xy}) = Area (H_1^{y}), nos queda lo que queríamos verificar:

$\ln(x.y) = \ln x + \ln y.$

<u>Consecuencias</u>:

i) <u>$\ln(x^r) = r.\ln x$</u>, si $r > 0$ y cuando r es exponente negativo se tiene:

$$
\begin{aligned}
0 = \ln 1 &= \ln(x^r.x^{-r}) = \\
&= \ln x^r + \ln x^{-r} = \\
&= r \ln x + \ln x^{-r} =
\end{aligned}
$$
, de donde:

$\underline{\ln x^{-r} = - r \ln x}$

ii) $\ln (x|y) = \ln (x. \frac{1}{y}) = \ln (x.y^{-1}) =$

$= \ln x + \ln y^{-1} = \underline{\ln x - \ln y}.$

Estas fórmulas marcan el gran interés computacional del logaritmo ya que permite reducir cada operación aritmética a una operación más simple.

4°. <u>El número "e"</u>.

Sabemos que la función logaritmo es biunívoca, es decir que todo número real es logaritmo de un único número real positivo. Entonces:

"Existe un único número real positivo cuyo logaritmo natural es igual a 1. Tal número es representado con la letra e. Es decir:

$$\ln x = 1 \Longleftrightarrow x = e.$$

Pensando en términos geométricos, vemos que: Area $(H_1^e) = 1$.

Podemos probar que: Area $(H_1^2) < 1$, Area $(H_1^3) > 1$; esto quiere decir: $\ln 2 < 1 < \ln 3$, con lo cual concluímos que: $2 < e < 3$.

Se puede demostrar que el número e es irracional, su desarrollo decimal no termina, no es periódico.

Un valor aproximado de e es: $e = 2,71828182\ldots$.

<u>Ejemplo</u>:

Una franja de hipérbola H_1^x tiene área igual a 5. ¿Cuál es el valor de x?

Entonces si Area $(H_1^x) = 5 \Rightarrow \ln x = 5 \Rightarrow x = e^5$.

5°. <u>Ejercicio</u> <u>de</u> <u>aplicación</u>: Mostrar que la suma $S_p = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ,\ldots, + \frac{1}{p}$ es mayor que $\ln(p+1)$.

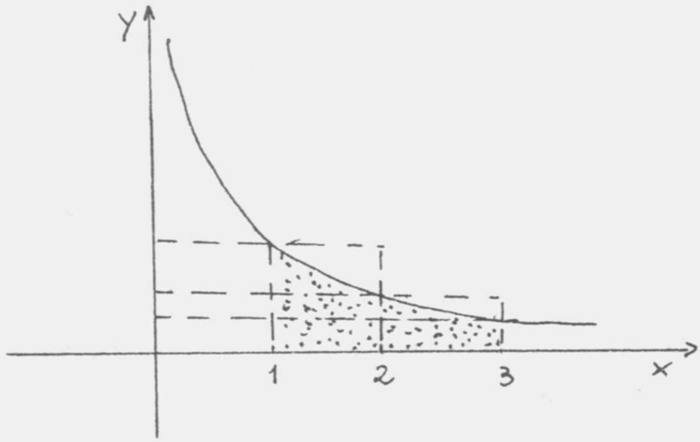


Figura 11

En los puntos de abscisa 1,2,3,..., p, p+1 descomponemos el intervalo [1; p + 1] en p intervalos de amplitud 1.

Sobre cada intervalo [i, i+1] se considera un rectángulo cuya altura es $\frac{1}{i}$. La reunión de esos rectángulos es un polígono rectangular de área S_p, la cual contiene a la franja H_1^{p+1}. Luego $S_p > \ln(p + 1)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] N. COSENZA, N. GURRUCHAGA, M.J. VIGNOLI, "Enseñando una Matemática más novedosa y divertida. Parte I: Geometría", Revista Educación Matemática, Por aparecer.

[2] J. FARIAS DE ABREU, "Como calcular $1^p + 2^p + ,\dots, + n^p$"; Revista Professor Matemática, 7 (1985), pág. 44-45.

[3] I. GHERSI, "Matemática dilettevole e curiosa"; Editore U. Hoelpli, MIlano (1986).

[4] E. LAGES LIMA, "Logaritmos", Soc. Brasileira Matemática, Río Janeiro (1986).

[5] D.J. ORTON, "An Ilustration of $(\sum n)^2$", the Mathematical Gazette, 72 N° 459 (1988), pág. 32, 33.

[6] L. RAMPAZZO, "Progressoes aritméticas na 6a. series", Revista Professor Matemática, 13(1988), pág. 51-54.

[7] N.N. VOROBIOV, "Números de Fibonacci", Editorial M.I.R., Moscú (1974).

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
LICEO AERONAUTICO MILITAR
AVENIDA FUERZA AEREA 1901
FUNES - SANTA FE.