

## USO DE LAS IMPRESORAS 3D PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA DE LOS SÓLIDOS SIGUIENDO EL MODELO DE VAN HIELE

Carlos Díez Molina - Julián Roa González  
carlosdm@gmail.com – julian.roa@udima.es  
UDIMA (España)

Núcleo temático: V. Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.  
Modalidad: CB Nivel educativo: 3. Nivel educativo medio o secundario (12 a 15 años)  
Palabras clave: Geometría, Sólidos, Van Hiele, Impresión 3D

### Resumen

*La Geometría de los sólidos plantea dificultades evidentes de cara a su representación para nuestros alumnos. Históricamente, hemos contado mayoritariamente con soportes bidimensionales para llevar a cabo estas representaciones de figuras con volumen, y también nos hemos apoyado en el uso de un conjunto de materiales manipulativos que nos permitieran mostrar a nuestros alumnos determinadas propiedades fundamentales de los cuerpos geométricos.*

*Afortunadamente, la evolución actual de la tecnología nos permite una mayor versatilidad a la hora de presentar a nuestros alumnos el mundo de la geometría tridimensional, utilizando para ello software de modelado e impresoras 3D.*

*Sin embargo, el hecho de que exista una tecnología no garantiza que su presencia en el aula sirva por sí sola para provocar un aprendizaje significativo en nuestros estudiantes. Por ese motivo, a la hora de diseñar una propuesta, es importante basarse en modelos didácticos consolidados como el modelo de Van Hiele y desarrollar actividades que incorporen el uso de la tecnología desde una perspectiva teórica que permita explotar todo su potencial.*

*En esta comunicación se detallan una serie de actividades siguiendo las fases de aprendizaje del modelo Van Hiele que permiten una primera introducción de la tecnología de impresión 3D en el aula.*

### 1. Dificultades en la representación de la Geometría de los sólidos.

La Geometría de los sólidos, por su poder para fomentar la intuición matemática, su capacidad para adentrarse en la belleza de muchas demostraciones lógicas y por su indudable valor para la visualización de conceptos y situaciones reales es un área clave dentro de la formación matemática obligatoria.

Su importancia ha sido defendida en numerosos trabajos como los de Bressan, Bogisic y Crego (2000) y de Alsina Catalá, Fortuny Aymení y Pérez Gómez (1997). Sin embargo y a pesar de su importancia la Geometría de los sólidos presenta algunas dificultades específicas que las metodologías tradicionales no han sido capaces de superar.

En Badia y Cano (2013) encontramos algunas claves para comprender estas dificultades. Expondremos a continuación las más importantes:

1. Es necesario trabajar la visualización para que los estudiantes puedan desarrollar argumentos adecuados en los procesos de resolución de problemas.
2. Para describir, reconocer, representar figuras e identificar sus propiedades son necesarias representaciones visuales.
3. La visualización es necesaria para identificar atributos y poder llegar a inferir atributos que no pueden verse.
4. Los alumnos tienen dificultades para identificar, analizar y representar por no realizar adecuadamente el procesamiento visual de la información y la habilidad para interpretar la información figural. Los ejemplos limitados y prototípicos presentados en libros de texto y en la pizarra son un obstáculo para el aprendizaje.
5. Las definiciones geométricas se aprenden de forma memorística sin que se haya realizado una construcción cognitiva. Sin una construcción inductiva de las definiciones los estudiantes presentan problemas ante tareas que exigen desencapsular los significados.
6. Los programas de geometría dinámica permiten representar una gran variedad de figuras que faculta a los alumnos a formular conjeturas. Sin embargo aparece la dificultad cognitiva de asumir que un conjunto de ejemplos válidos no constituye una prueba.

Como puede verse la falta de visualización constituyen un obstáculo grande a la hora de desarrollar el pensamiento geométrico. En el caso de la Geometría de los sólidos las

posibilidades de visualización son aun menores ante la dificultad de representar en soportes bidimensionales situaciones tridimensionales.

Por este motivo creemos que las posibilidades de crear figuras sólidas con ayuda de un software específico y la posibilidad de imprimir el resultado de forma directa gracias a la impresión 3D es una oportunidad para desarrollar una visualización no prototípica que ayude a la construcción de las definiciones y que permita el trabajo de conjetura sobre las distintas partes de los objetos geométricos tridimensionales.

## **2. Impresoras 3D y software de modelado.**

Actualmente existe una gran variedad de software dedicado al diseño de objetos tridimensionales. De entre todas las opciones, para el desarrollo de esta actividad hemos elegido TinkerCAD por distintos motivos:

- Se trata de una herramienta muy intuitiva. Resulta relativamente sencillo crear figuras en base a la composición de poliedros regulares, bien sea por adición o por sustracción.
- Permite cubrir distintos niveles de razonamiento dentro del modelo de Van Hiele, pudiendo ser utilizado por alumnos entre el primer y el tercer nivel. Si bien no permite el uso de técnicas de diseño más avanzadas, consideramos que estas se encuentran fuera del objetivo de la enseñanza de la Geometría elemental.
- Para utilizarlo sólo es necesario un navegador web, y por tanto funciona con cualquier tipo de sistema operativo, ya sea este Windows, Linux, Mac o Chromium.

Como investigadores en didáctica nuestro objetivo principal es siempre el de enseñar geometría, y no el enseñar el uso de una herramienta compleja. En este sentido el software elegido responde a este enfoque.

## **3. El modelo de Van Hiele. Niveles de razonamiento y Fases de Aprendizaje.**

Entre 1957 y 1984 se desarrolla el modelo Van Hiele. La aportación fundamental del modelo es la definición de 5 niveles de razonamiento Geométrico y de 5 fases para la enseñanza de

la Geometría. Estos niveles y fases permiten la guía, el diseño y la creación de experiencias apropiadas según el nivel previo de los alumnos.

### **Los niveles de razonamientos**

En (López de Silanes, 2012) podemos ver un desarrollo completo de los niveles que el matrimonio Van Hiele propuso. Los niveles de razonamiento aportados por el modelo permiten vislumbrar las principales razones del fracaso en Geometría como desajustes entre las demandas curriculares y el nivel real del alumnado. Este desajuste imposibilitaría el aprendizaje.

En López de Silanes (2012:75) podemos ver que de forma mayoritaria los alumnos de secundaria se encuentran al inicio de la etapa en el nivel 2 de razonamiento y avanzan hasta el nivel 3 a lo largo de la etapa. Por tanto en este trabajo partimos de las siguientes premisas:

- ✓ Consideramos como punto de partida que los estudiantes tienen un nivel de razonamiento básico sobre los sólidos geométricos, que los entienden como una composición de distintos elementos bidimensionales, y que comprenden sus propiedades básicas tales como el volumen.
- ✓ Pretendemos alcanzar un nivel de razonamiento en que los alumnos lleguen a comprender que también los sólidos pueden relacionarse entre sí formando figuras complejas, y que las propiedades de dichas figuras pueden deducirse a partir de las propiedades de las figuras iniciales.

### **Las fases de aprendizaje**

Las fases de aprendizaje se relacionan directamente con la actividad cotidiana de enseñanza. En este sentido, las fases de aprendizaje constituyen una propuesta para su uso directo por los profesores que les permite organizar y secuenciar los contenidos de forma que se produzca un avance en el nivel de razonamiento. En Gutierrez, A. y Jaime, A.(1990) se

explican de forma detallada las fases de aprendizaje del modelo Van Hiele, los aspectos más relevantes se comentan a continuación:

- Fase 1. Información: Durante la fase de información el profesor plantea el campo de estudio y todos los aspectos relativos al mismo que considere necesarios (materiales, problemas tipo a resolver,...) El manejo inicial por parte de los alumnos de los materiales y conocimientos básicos debe permitir al docente establecer los conocimientos previos de los alumnos.

- Fase 2. Orientación dirigida: Con ayuda de los materiales suministrados los alumnos deben ir descubriendo, comprendiendo y aprendiendo los contenidos principales del tema objeto de estudio. El objetivo aquí es disponer de una cuidadosa selección de actividades que forme la base adecuada del nivel que se pretende alcanzar. El material es por tanto dirigido a los contenidos principales y escalonado de forma progresiva.

- Fase 3. Explicitación: Mediante el trabajo en grupo se intercambian experiencias, se explica la resolución de las actividades y se buscan regularidades. En esta fase es muy relevante el intercambio de respuestas y la justificación de las mismas de forma clara y ordenada. La discusión es la que debe permitir ir generando la nueva red de relaciones. Esta fase es transversal a todo el proceso y debe permitir la adquisición del vocabulario matemático propio del nivel que se pretende alcanzar.

- Fase 4. Orientación libre: Se presenta investigaciones diferentes a las iniciales que permitan aplicar los conocimientos recién adquiridos. El perfeccionamiento de los nuevos conocimientos debe hacerse mediante la presentación de problemas que admitan diferentes enfoques y soluciones por parte del profesor. Una manera habitual de realizar esta fase es plantear actividades donde los elementos principales deban ser unidos por el estudiante gracias a los nuevos conocimientos, vocabulario y modos de solución que se están trabajando. Los problemas abiertos planteados deben permitir el fortalecimiento de las relaciones ya creadas y el establecimiento de nuevas relaciones más profundas y complejas.

- Fase 5. Integración: Para culminar el proceso los alumnos deben adquirir una visión general desarrollando nuevas relaciones entre los nuevos contenidos y métodos y los que ya se conocían. Se trata de comprender la globalidad mediante el trabajo de comprensiones globales que no suministren conceptos, propiedades o métodos nuevos a los estudiantes. Es por tanto una acumulación, comparación y combinación de cosas que ya conocen.

#### **4. Actividades propuestas.**

Siguiendo el modelo descrito organizaremos la actividad en 5 fases orientadas a permitir el desarrollo del pensamiento geométrico de los alumnos dentro del nivel 2.

**Fase 1. Información:** Esta fase tiene carácter informativo para el docente, y sirve como introducción o refresco de contenidos para los alumnos. Podemos trabajar pues con cuestionarios que nos permitan evaluar el nivel de nuestros alumnos dentro de este modelo, entre los cuales el más común es el de Usiskin. Para nuestro caso utilizaremos como alternativa el cuestionario propuesto por Dorit, P (2014), teniendo en cuenta que el cuestionario de Usiskin presenta únicamente preguntas relacionadas con la geometría plana, mientras que el cuestionario de Dorit (2014) añade preguntas relacionadas con la geometría espacial y de sólidos.

**Fase 2 . Orientación Dirigida:** Durante esta fase realizaremos dos actividades:

- Descubrimiento de TinkerCAD y experimentación con material manipulativo: Esta actividad tendrá como objetivos permitir que nuestros alumnos se familiaricen con el uso de la herramienta y presentarles distintos modelos de objetos tridimensionales básicos mediante software y mediante impresiones impresos.
- Planteamiento teórico/práctico de los distintos elementos geométricos, incluyendo su descripción, propiedades, y cálculo de superficie y volúmenes.

**Fase 3. Explicitación:** Siguiendo la aproximación de Guillén (1997), no planteamos una actividad específica para esta fase, dado que se trata en su lugar de un diálogo continuo entre profesor y alumnos, y de los alumnos entre sí.

**Fase 4 . Orientación Libre:** Solicitaremos a nuestros alumnos que vayan poco a poco combinando las distintas figuras simples en una figura compleja. Utilizando TinkerCad, les pediremos que partan de las figuras creadas anteriormente, y las combinen para formar una figura nueva que se les proporcionará como ejemplo. Una vez hecho esto deberán intentar calcular el volumen resultante de la figura final.

Se permitirá a los alumnos trabajar de forma libre durante toda la sesión, limitándose el profesor a resolver dudas de forma abierta, permitiendo la experimentación. Estamos trabajando con una situación didáctica diseñada con el fin expreso de facilitar a nuestros alumnos el alcanzar un mayor nivel de razonamiento dentro del modelo de Van Hiele. Por tanto, la figura final ha sido escogida con dos finalidades concretas:

4. Evitar casos en los que resulte complejo calcular el volumen sin utilizar el cálculo integral, la figura ha sido escogida de forma que el volumen combinado simplemente requiera usar divisiones simples de las figuras originales.

5. Hacer coincidir lugares geométricos que permitan a los alumnos asociar diferentes conceptos:

- Centro del cilindro y el prisma hexagonal en el centro de las caras del prisma
- Centro de la esfera en el centro de la cara superior del cilindro
- Radios de la esfera y el cilindro idénticos
- Diámetro del cilindro en el que se inscribe el prisma hexagonal igual a la longitud de la cara del prisma rectangular

El profesor debe ser consciente de las características anteriores por lo que en la medida de lo posible debe tratar de orientar a los alumnos para que experimenten con las formas más sencillas y para que las combinen de forma simple dejando margen para que los alumnos resuelvan los conflictos de razonamiento.

**Fase 5. Integración:** Nos interesa terminar con una fase en la que los alumnos compartan sus experiencias acerca de la actividad de orientación libre, y de los distintos conflictos de razonamiento a los que se han enfrentado. Para conseguir este objetivo, tomaremos algunos ejemplos de las figuras realizadas por los alumnos y solicitaremos a los alumnos que expliquen cómo han construido la figura final, y cómo han calculado su volumen. Se irán apuntando conceptos clave en un esquema final de contenidos.

Un paso opcional interesante, es el de relacionar los cálculos realizados con la forma de calcular volúmenes complejos mediante inmersión. Para ello, podemos utilizar un recipiente con agua e introduciremos las figuras por separado para ver posteriormente como el volumen de la pieza final coincide con el calculado. Esto nos permitirá afianzar el concepto de la magnitud de volumen, y relacionarlo al ámbito físico.

Asimismo, y con el objetivo de comparar resultados y evaluar la progresión por los niveles de razonamiento de Van Hiele, repetiremos el cuestionario de Dorit, P. (2014) que ya habíamos planteado en la Fase 1.

## **5. Conclusiones y trabajos futuros.**

La sociedad de la información, brinda excelentes oportunidades para el trabajo de la Geometría de los sólidos basadas en la impresión 3D. Sin embargo, es importante apoyarse en modelos consolidados para la enseñanza de este área de las matemáticas que garanticen que el trabajo realizado en las aulas sea coherente con los niveles de razonamiento de los alumnos a las que van destinadas.

Las fases de aprendizaje propuestas en el modelo de Van Hiele son una referencia obligada para el diseño de actividades por lo que es necesario estudiar la posibilidad de impartir todo el currículo geométrico mediante una secuencia de actividades bien definidas que sigan el modelo presentado y permitan la superación de los niveles de razonamiento alcanzados por los estudiantes de secundaria.

La realización de distintas experiencias basadas en las TIC, como la presentada, que abarquen todo el contenido previsto por la legislación y la comprobación mediante cuestionarios

validados como el de Usiskin y Dorit de los resultados obtenidos es una línea de investigación que debería ir cogiendo fuerza en los próximos años.

## 6. Bibliografía

Alsina Catalá, C., Fortuny Aymení, J. y Pérez Gómez, R. (1997). *¿Por qué Geometría? Propuestas didácticas para la ESO*. Madrid: Síntesis.

Badia, A. y Cano, M. (2013). *Dificultades de aprendizaje de contenidos curriculares*. Barcelona: Ed. UOC.

Bressan, A., Bogisic, B. y Crego, K. (2000). *Razones para enseñar Geometría en la educación básica*. Buenos Aires: Novedades educativas.

Dorit, P. (2014). Global van Hiele (GVH) Questionnaire as a Tool for Mapping Knowledge and Understanding of Plane and Solid Geometry. *Korean Society of Mathematical Education, Vol.18*

Guillén, G (1997). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de Procesos de Aprendizaje. Universidad de Valencia.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El Modelo de Van Hiele, en Llinares, S. y Sánchez, M. V., eds. (1990): *Teoría y práctica en educación matemática*. (Alfar: Sevilla), pp. 295-384.

López de Silanes, F. (2012). *Didáctica de la geometría: Modelo de Van Hiele enseñanza de la Geometría en España*. Barcelona: Ed. Da Vinci.

López de Silanes, F. (2013). Didáctica de la geometría: análisis de la enseñanza de la geometría a partir de un estudio de campo según el modelo de Van Hiele. UCM. Madrid.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry*. Columbus.