CB-995

LA TENSIÓN ENTRE EL PENSAMIENTO INFORMAL Y FORMAL EN LA GEOMETRÍA MEDIANTE UN MODELO DE GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

Rubén Elizondo Ramírez
elizondocecyt9@gmail.com
CINVESTAV-IPN, México

Modalidad: CB
Nivel educativo: Bachillerato
Núcleo temático: VII. Investigación en Educación Matemática
Palabras clave: pensamiento geométrico, concepciones geométricas, validación geométrica, modelos de Poincaré

Resumen

En este trabajo, mostramos los avances de una investigación doctoral, en marcha, relacionada con la tensión existente entre la intuición del espacio físico y una geometría no euclidiana explorada mediante los modelos de geometría hiperbólica de Poincaré. Para documentar los aspectos que consideramos más importantes de dicha tensión, tomamos elementos conceptuales relacionados con: el modo de existencia de los entes matemáticos, las herramientas y su mediación, representaciones simbólicas y mecanismos de validación. Los resultados preliminares de la investigación, entre los que destacan la generalización de conceptos geométricos y la adecuada construcción de figuras geométricas hiperbólicas, surgen del desarrollo de actividades en los modelos de Poincaré implementadas con estudiantes de bachillerato. Estas actividades se enfocan en concepciones y mecanismos de validación en geometría, en un ambiente de papel y lápiz así como en uno de geometría dinámica. Aunque la investigación todavía no está concluida, podemos asegurar que el trabajo con los estudiantes revela lo que nos parece una joya cognitiva: lo que es coherente desde el punto de vista lógico, no necesariamente es aceptable para la intuición.

Introducción

Los avances de la investigación que reportamos en este escrito abordan la problemática relacionada con el pensamiento geométrico inmerso en dos modelos de geometría: el euclidiano y el hiperbólico. Dicha problemática se basa en el análisis de las intuiciones geométricas y mecanismos de validación usados por alumnos de bachillerato en estos modelos geométricos. Esta investigación es una secuela del trabajo de Elizondo (2014) cuyo objetivo principal consistió en documentar las rupturas epistemológicas encontradas en la geometría (Hegedus & Moreno-Armella, 2011). El enfoque principal de ese trabajo se asentó en torno a la concepción de la geometría euclidiana como un *espejo* del espacio físico, y en

ISBN 978-84-945722-3-4

la *ruptura de ese espejo* derivada del surgimiento de las geometrías no euclidianas. Los resultados de la investigación fueron el fruto de diversas tareas desarrolladas en el Disco de Poincaré con estudiantes de bachillerato.

Consideramos pertinente, por lo tanto, continuar esta línea de investigación en la que se integra otro modelo de la geometría hiperbólica: el Semiplano de Poincaré. Para ello, tomamos en cuenta: el diseño dinámico del Semiplano de Poincaré en GeoGebra, y el refinamiento de los elementos conceptuales y de los instrumentos de investigación. De este modo, el presente estudio se enfoca en el análisis de las concepciones geométricas y de los mecanismos de validación.

Elementos conceptuales

¿Qué es lo que permite construir una especie de versión virtual del mundo de las experiencias? La *capacidad simbólica*, sin duda. Es decir, aquella capacidad de traducir las experiencias a símbolos llenos de significado. Ningún símbolo tiene un significado intrínseco: este depende tanto del intérprete quien añade sus experiencias como de su propia cultura (Moreno-Armella, 2012). La posibilidad de capturar simbólicamente una experiencia le otorga un cierto nivel de estabilidad de manera que puede ser refinada, pulida, profundizada. El mundo simbólico no puede cortar plenamente sus nexos con el mundo de las experiencias *intuitivas*, pues son parte medular de las formas humanas de conocer. En este sentido, la experiencia humana es *híbrida*: por un lado es biológica y, por el otro, es cultural, formando una mezcla inseparable. Las experiencias de una persona en el mundo material son, entonces, experiencias en un mundo saturado por la acción humana de manera que sus intuiciones más profundas estarán soldadas a su medio cultural.

La objetividad matemática resulta de la actividad humana, una actividad mediada exclusivamente por símbolos. Así, esta actividad no puede ser exclusiva de los objetos porque estos no existen antes de la producción de una representación simbólica: *los entes matemáticos existen sólo a través de símbolos*. Aún más, estos son creados mediante sus representaciones simbólicas. La capacidad de las estructuras simbólicas es tal que genera un universo nuevo que extiende y se integra al universo cotidiano, social y cultural, en donde transcurren nuestras vidas. Los símbolos matemáticos co-evolucionan con sus referentes matemáticos y, mediante sus realizaciones simbólicas, hacen posible el modo de existencia de los entes matemáticos.

ISBN 978-84-945722-3-4

Ahora bien, enseñar la construcción de herramientas permite que el aprendiz construya una copia de la misma herramienta. Así, la herramienta no es un ejemplar particular, sino la idea y el algoritmo para construirla (Moreno-Armella & Hegedus, 2009). Las herramientas, tanto materiales como simbólicas, han beneficiado al ser humano para modificar sus condiciones con el entorno y su adaptación a este. Como consecuencia, el ser humano, además de modificar su entorno y convertirlo en un reflejo de su actividad, se ha modificado a sí mismo y, con ello, la manera de percibirlo.

Hay un atributo fundamental de la cognición humana vinculada con las herramientas, a saber, que la cognición humana funciona, siempre, mediada por una herramienta. La interacción de los seres humanos con su medio está siempre regulada por herramientas y estas son la cristalización de una necesidad. Moreno-Armella & Sriraman (2005) distinguen una herramienta material de una simbólica. Estos autores indican que, por un lado, la herramienta material afecta la naturaleza de la actividad humana (mediada) y que esta puede modificar el propósito de dicha actividad. Por otro lado, la herramienta simbólica afecta el conocimiento, la cognición del sujeto. Además, Moreno-Armella et al. (2009) indican que la herramienta no es el objeto físico en sí mismo sino es la *encarnación* o *incorporación* de un propósito y un diseño: una realización material de una idea. Como consecuencia, una herramienta no puede separarse de una actividad. Más todavía, si la actividad cambia, el propósito también y esto implica la redefinición de la herramienta: "la herramienta y la actividad están definidas mutuamente" (Moreno-Armella et al., 2009).

Todas las matemáticas, insistimos, están plasmadas en sistemas simbólicos y la única manera de acceder a un ente matemático es mediante sus representaciones simbólicas. Al tener una nueva representación, se tiene un nuevo objeto matemático y este queda definido a partir de, al menos, dos sistemas de representación. Moreno-Armella et al. (2009) indican que la evolución de un objeto matemático se traduce en la iteración de esta actividad semiótica.

Para tener una mejor comprensión de un objeto o estructura matemáticos se requiere del empleo e interacción de más de un sistema de representación. Cada uno de estos sistemas, junto con las reglas que los acompañan, presupone una caracterización distinta del correspondiente objeto. En otras palabras, muestran propiedades relevantes en ese contexto, pero no agotan al objeto; por lo contrario, lo enriquecen y apoyan su comprensión. Nunca se puede estar seguro de que se han agotado las posibilidades de representación de un objeto

ISBN 978-84-945722-3-4

matemático; un claro ejemplo es el surgimiento de la geometría dinámica (en la década de 1980) y, con ello, una nueva forma de representación de objetos matemáticos. Por lo tanto, es posible afirmar que el objeto matemático siempre está en construcción.

Los sistemas simbólicos han sido responsables a lo largo del tiempo de profundos cambios cognitivos en los seres humanos. En el caso de las matemáticas, más allá del sistema posicional de los números y el álgebra, están la geometría, el cálculo y, hoy en día, las versiones digitales de tales sistemas simbólicos. La didáctica de las matemáticas no puede desconocer que el símbolo se ha tornado digital (Moreno-Armella, 2012). La computadora provee un amplio abanico de representaciones de objetos matemáticos y de relaciones entre estos. Moreno-Armella et al. (2005), indican que las versiones virtuales de los objetos matemáticos producen una sensación de existencia material y, además, ofrecen la posibilidad de ser manipulados: son *representaciones ejecutables*. Este sistema de representación permite tener acceso tanto a la representación de un objeto como a las acciones con el objeto. La presencia del movimiento es una dimensión adicional que suministra este nuevo sistema de representación; a su vez, el movimiento proporciona nuevos recursos que permiten otro tipo de exploraciones. El arrastre y la medición son ejemplos de estos recursos con los cuales, inmersos en el medio, es posible producir conjeturas y responder preguntas. Moreno-Armella (2012) señala que "si el medio ha sido capaz de producir una respuesta a la pregunta original, entonces ¿por qué no intentar probar la conjetura usando los recursos del propio medio?" Esta es una pregunta que rompe una tradición: hasta ahora, las representaciones simbólicas en la geometría, es decir los diagramas, se entendían como auxiliares. Ahora, el medio dinámico es parte de la solución: "esto ocurre en la medida en que el participante vaya internalizando el medio dinámico y este penetre su cognición" (Moreno-Armella, 2012).

Los modelos de Poincaré

Dos modelos de geometría hiperbólica que permiten *visualizar* las propiedades hiperbólicas se deben a Henri Poincaré; estos modelos emergen de construcciones euclidianas y son conocidos como el Disco y el Semiplano de Poincaré. Para el desarrollo de la investigación, creamos la versión dinámica de estos modelos en GeoGebra partiendo de la fabricación de la regla y el compás hiperbólicos, es decir, las rectas y las circunferencias hiperbólicas. Elegimos este medio digital debido a que ahí las representaciones, como lo mencionamos anteriormente, gozan de una propiedad excepcional: son representaciones *ejecutables*. En el

ISBN 978-84-945722-3-4

caso del Disco, una h-recta (la h indica hiperbólico) se interpreta como el arco de circunferencia euclidiana ortogonal al Disco y, en el caso del Semiplano, una h-recta se entiende como la semicircunferencia euclidiana ortogonal a la frontera del Semiplano. Las h-circunferencias en ambos modelos lucen como circunferencias euclidianas, aunque sus centros no coinciden con los euclidianos. En las siguientes figuras ilustramos la regla y el compás hiperbólicos, tanto en el Disco (Figura 9) como en el Semiplano de Poincaré (Figura 10), y aprovechamos para mostrar las ventanas de trabajo de estos modelos. Los menús añadidos (a la derecha de los menús por defecto de GeoGebra) contienen las herramientas hiperbólicas que diseñamos.

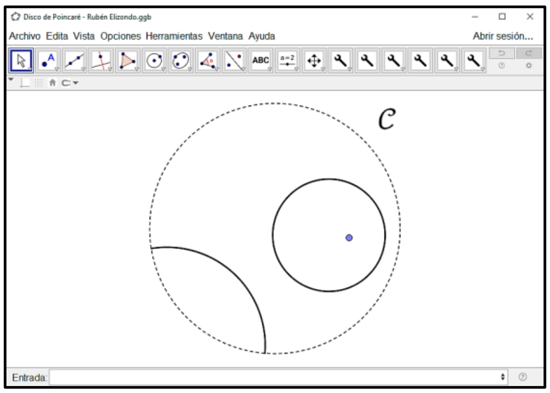

Figura 9. El Disco de Poincaré.

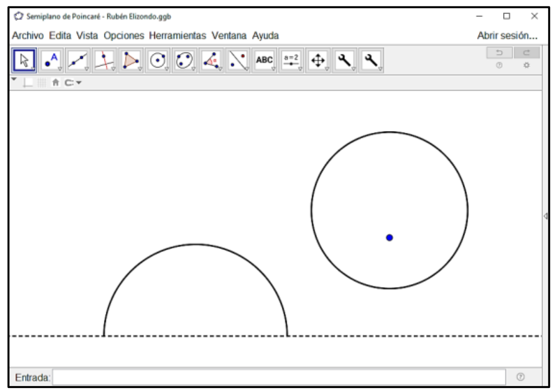

Figura 10. El Semiplano de Poincaré.

Entre las propiedades que se cumplen en un modelo de geometría hiperbólica destacamos que se preservan los primeros cuatro postulados de Euclides y una versión modificada del quinto postulado: dada una h-recta y un punto fuera de ella, pasan al menos dos h-rectas paralelas. Las siguientes figuras permiten que *veamos* esta característica hiperbólica en el Disco y en el Semiplano (Figura 11 y Figura 12).

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

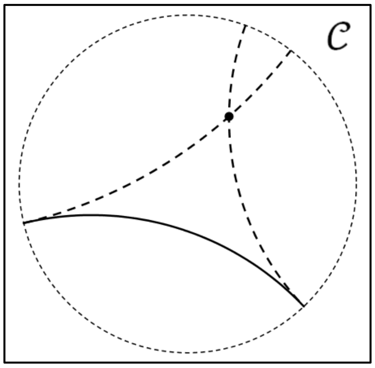

Figura 11. Rectas paralelas en el Disco.

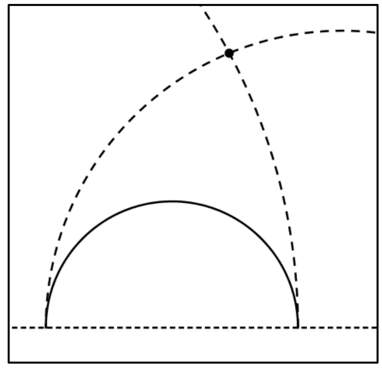

Figura 12. Rectas paralelas en el Semiplano.

Además, nos interesa mostrar un triángulo equilátero y un cuadrado hiperbólicos, en el Semiplano, pues estas figuras geométricas hiperbólicas juegan un rol fundamental en la fase experimental descrita en la siguiente sección (Figura 13).

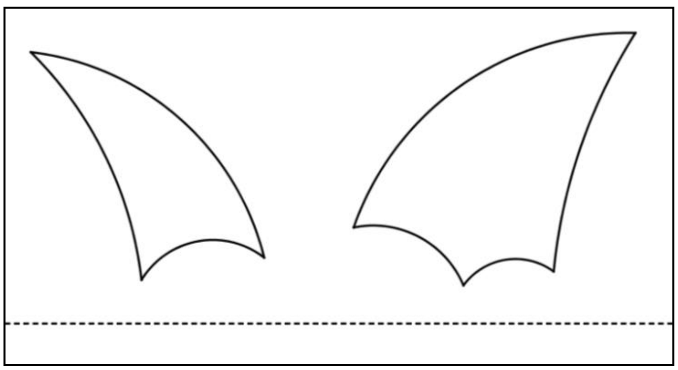

Figura 13. Triángulo y cuadrado hiperbólicos en el Semiplano.

La voz de los estudiantes

A continuación, mostraremos algunos fragmentos de las actividades desarrolladas con el grupo de estudiantes. Su elección, llevada a cabo de forma aleatoria, produjo un conjunto de ocho participantes quienes, durante la etapa experimental, cursaban el primer año de bachillerato y sus edades rondaban los 15 y 16 años. Las actividades fueron implementadas en una escuela de la Ciudad de México (CECyT #9, IPN, México) entre marzo y junio de 2016. Aunque la población estuvo conformada por ocho participantes, expondremos solamente parte del trabajo realizado por una de ellos, llamada Laura, con el fin de mostrar una idea global de la fase experimental.

Comenzamos con los ejemplos que evidencian una notable evolución en la concepción de objetos geométricos. Sin duda, uno de los conceptos clave en el desarrollo de la investigación es el de rectas paralelas; Laura inicialmente refiere que estas rectas son "dos líneas que en

ISBN 978-84-945722-3-4

ningún momento se intersectan: tienen que estar a la misma distancia todo el tiempo" (Figura 14) y, al final de las actividades, prescinde de la idea de equidistancia refiriendo que son "dos rectas que nunca se intersectan" (Figura 15).

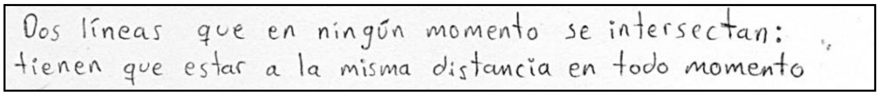
Dos líneas que en ningún momento se intersectan:
tienen que estar a la misma distancia en todo momento

Figura 14. Primera definición del concepto de rectas paralelas de Laura.

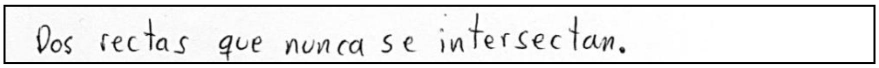
Dos rectas que nunca se intersectan.

Figura 15. Redefinición del concepto de rectas paralelas de Laura.

De manera similar, esta participante generaliza el concepto de triángulo del siguiente modo: primero, refiere que es una "figura con sólo 3 lados rectos" y, en la etapa final de la experimentación, simplemente indica que es un "polígono de 3 lados". En el caso del cuadrado, Laura define inicialmente este concepto apoyándose, como en el caso de la definición de triángulo, de la forma euclidiana de las rectas; además, recurre a la propiedad de que los ángulos deben ser rectos indicando que un cuadrado es una figura de "4 lados iguales rectos [donde] todos los lados forman ángulos de 90°" (Figura 16). En este caso, también resalta una buena dosis de generalidad al redefinirlo como un "polígono de cuatro lados que miden exactamente lo mismo" añadiendo que "sus cuatro ángulos miden lo mismo" (Figura 17), prescindiendo de las características euclidianas.

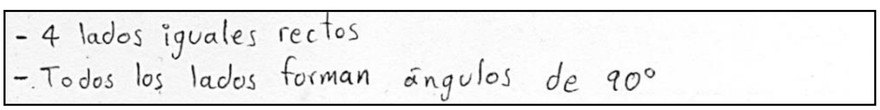
- 4 lados iguales rectos
- Todos los lados forman ángulos de 90°

Figura 16. Primera definición del concepto de cuadrado de Laura.

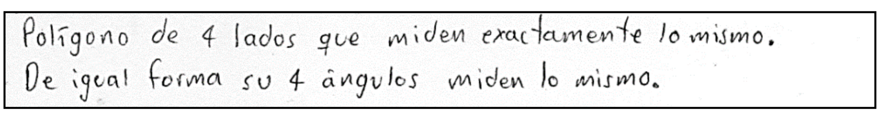
Polígono de 4 lados que miden exactamente lo mismo.
De igual forma su 4 ángulos miden lo mismo.

Figura 17. Redefinición del concepto de cuadrado de Laura.

En estos ejemplos se manifiesta una clara evolución en la redefinición de estos conceptos geométricos: son más generales. Ahora, mostramos algunas de las evidencias relacionadas con las construcciones geométricas consideradas; nos enfocamos en las construcciones hiperbólicas en el Semiplano de Poincaré. Laura proporciona los siguientes pasos para construir un triángulo equilátero hiperbólico (Figura 18):

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

- Tracé un segmento hiperbólico AB.
- Hice dos circunferencias tomando como centro ambos puntos A y B.
- Puse un punto en la intersección de las circunferencias.
- Por último uní con segmentos hiperbólicos la intersección con los puntos A y B.

Figura 18. Proceso de construcción del triángulo equilátero hiperbólico.

Laura identifica la equivalencia de este proceso de construcción con el euclidiano "porque se sigue el mismo proceso de construcción y se obtienen los mismos resultados". Esta participante recurre al arrastre y a la medición de los lados y ángulos del triángulo para validar su construcción. De manera similar, Laura consigue construir un cuadrado hiperbólico y otorga validez a su construcción con las herramientas mediadoras del semiplano: "Midiendo los ángulos para ver que todos fueran iguales y también midiendo todos los lados y así verificar que sean iguales" (Figura 19). El resultado visual de estas construcciones es similar al mostrado en la Figura 13.

Midiendo los ángulos para ver que todos fueran iguales y tambien midiendo todos los lados y así verificar que sean iguales.

Figura 19. Proceso de validación de la construcción del cuadrado hiperbólico.

Comentarios finales

Con el objetivo de hacer algunos comentarios sobre la etapa experimental y los respectivos resultados preliminares de la investigación, queremos destacar que la recurrencia de los estudiantes a las herramientas de medición y a la técnica del arrastre para validar sus resultados dan crédito de que este medio enriquecido (GeoGebra y las herramientas hiperbólicas añadidas) alimenta el cauce de una corriente que desemboca en la epistemología de las matemáticas. Esta corriente justamente es la naturaleza de la validación de resultados en geometría, área que seguirá explorándose durante los años venideros. Por nuestra parte, creemos que estos mecanismos de validación son legítimos pues ocurren dentro del medio donde yace la representación y, aunque la investigación está en marcha, podemos asegurar que el trabajo con los estudiantes, del que hemos esbozado tan sólo unos momentos, revela

ISBN 978-84-945722-3-4

lo que nos parece una joya cognitiva: *lo que es coherente desde el punto de vista lógico, no necesariamente es aceptable para la intuición*.

Además, las experiencias con los estudiantes dan cuenta del efecto transformador de concebir el movimiento como una dimensión del objeto geométrico. El movimiento que adquieren las representaciones revela gradualmente lo que reposa debajo de la apariencia de la representación: la estructura. En el curso histórico la estructura estaba atrapada en la convicción de la *veracidad* de la geometría, es decir, en la supuesta coincidencia del territorio con su mapa. *Despegar* la representación del territorio hizo viable la constitución de un modelo como *instrumento de mediación*.

Nuestra intención durante la parte experimental ha sido, y continúa siendo, explorar cómo puede darse curso al desarrollo de la intuición sobre un tema que, en primera instancia, parecía tan abstruso y, que ahora, teniendo como *instrumentos de mediación* los modelos de Poincaré, veremos aflorar una cierta *naturalidad* para esta geometría. Es un ejercicio que en cierto momento nos lleva de lo formal a lo intuitivo, camino a contracorriente de lo que parecía, y todavía parece, lo más natural: ir de lo intuitivo a lo formal. Esta ruta inversa parte del modelo dinámico que estimula un cierto realismo en los objetos hiperbólicos y, por lo tanto, disminuye la distancia cognitiva con ellos.

Referencias bibliográficas

Elizondo, R. (2014). Rupturas epistemológicas en la geometría a través de una alternativa digital de la geometría hiperbólica. Tesis de maestría, CINVESTAV-IPN, México.

Hegedus, S., y Moreno-Armella, L. (2011). The emergence of mathematical structures. Educational Studies in Mathematics, 77, 369-388.

Moreno-Armella, L., y Hegedus, S. (2009). Co-action with digital technologies. ZDM Mathematics Education, 41, 505–519.

Moreno-Armella, L. (2012). La intuición y la estructura. Orígenes de la Geometría Hiperbólica. Mixba'al Revista Metropolitana de Matemáticas, 1(3), 9-24.

Moreno-Armella, L., y Sriraman, B. (2005). Structural stability and dynamic geometry: Some ideas on situated proofs. International Reviews on Mathematical Education, 37(3), 130-139.

ISBN 978-84-945722-3-4