CB-987

RACIOCÍNIO MATEMÁTICO E JUSTIFICAÇÃO: CONTRIBUTOS DE UM ESTUDO COM ALUNOS DO 2.º ANO DE ESCOLARIDADE

Lina Fonseca – Vânia Esteves
linafonseca@ese.ipvc.pt – filipa.pereira10@gmail.com

Instituto Politécnico de Viana do Castelo, Portugal

Núcleo temático: I. Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.
Modalidad: CB
Nivel educativo: 2. Primario (6-11 anos)
Palabras clave: ambiente de sala de aula, justificação, raciocínio matemático, resolução de problemas.

Resumen

A relação da matemática com o raciocínio é essencial e realçada por vários especialistas. Na lógica da educação para todos, como consagrada pela Unesco, em Portugal reflete-se nas competências necessárias aos jovens do século XXI no final da escolaridade. Uma das competências-chave é raciocínio e resolução de problemas.

Para que desde cedo as crianças desenvolvam a capacidade de raciocinar necessitam que a escola propicie diariamente uma dieta matemática que seja terreno fértil ao seu desenvolvimento. No entanto, nem todas as crianças têm esta possibilidade porque o trabalho diário com a matemática não inclui, com coerência e sistematicidade, a oportunidade de raciocinar. Aspetos como experimentação, articulação e debate de ideias, formulação e teste de conjeturas, procura de explicações e justificações, a par da necessidade de responder a questões como "tens a certeza?", "como explicas?", "convenceste os colegas?", "como posso pensar como tu?" devem integrar o menu da aula de matemática. A ação do professor é assim essencial pelo facto de lhe estar atribuída, maioritariamente, a função de decidir que tarefas apresentar, como devem ser exploradas e como organizar o ambiente de sala de aula. Nesta comunicação apresentar-se-á um estudo com alunos do 2.º ano de escolaridade focando aspetos de raciocínio matemático.

Introdução

O desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos tem sido defendido por vários autores (e.g. Darmstadter, 2013; Goldenberg, Cuoco & Mark, 1998; Russel, 1999; Sternberg, 1999) pela sua importância como hábito da mente para a compreensão matemática e para o dia a dia dos cidadãos, contribuindo para a aptidão humana. Desde cedo as crianças manifestam a sua capacidade para raciocinar, se lhes for dada a oportunidade e liberdade para

ISBN 978-84-945722-3-4

o fazerem, se argumentarem defendendo as suas ideias perante os seus pares e professores (Steen, 1999; Sumpter & Hedefalk, 2015).

Neste texto entende-se que *raciocinar* é fazer uso da razão para chegar a determinadas conclusões, o que se ajusta à posição do NCTM (2000), para quem raciocinar é obter conclusões com base em evidências ou assunções prévias, e *justificar* é sustentar as opções realizadas com base em argumentos resistentes (Fonseca, 2004). Se não resistirem a provas de esforço os argumentos devem ser reavaliados, reformulados ou abandonados, de modo a resistirem. Pretendendo conhecer como é que os alunos explicitam o seu raciocínio matemático e justificam a sua ideia e/ou resultado delineou-se um estudo e formularam-se as questões: (1) Como se caracteriza o raciocínio matemático de alunos do 2º ano de escolaridade quando resolvem problema de processo?; (2) Como é que os alunos justificam os seus resultados/ as suas resoluções?; (3) Que dificuldades manifestam na explicitação do raciocínio?

Importância do raciocínio matemático

O raciocínio matemático, pela íntima relação com o desenvolvimento, a justificação e o uso de generalizações deve ser central nas aulas, pois uma aula em que não se generaliza não é uma aula de matemática (Mason & Johnston-Wilder, 2004). Se desde os primeiros anos os alunos resolverem tarefas desafiadoras e tiverem possibilidades de experimentar, conjeturar, avaliar as conjeturas, comunicar, argumentar em favor das suas opções e discutir poderão desenvolver o hábito de raciocinar (Goldenberg, Cuoco & Mark, 1998) e compreender melhor a matemática que aprendem.

O raciocínio contribui para conectar diferentes conhecimentos e a rede de conexões com compreensão constitui a base do que Russel (1999) designa por “memória matemática” (p. 1) ou sentido matemático.

Sempre que os alunos enfrentam novo desafio têm necessidade de raciocinar. Para o concretizarem há vários aspetos a considerar, tais como os momentos de decisão - por onde começar? que estratégia usar? a que artefactos recorrer?; a mobilização de conhecimentos prévios; a procura de mais informação e/ou de várias soluções; a obtenção de respostas e a avaliação da adequabilidade das conclusões/soluções obtidas (Sternberg, 1999).

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

De 2007 a 2013 o Programa de Matemática para o Ensino Básico em Portugal (ME, 2007), a par de quatro áreas de conteúdo indicava três capacidades a desenvolver, como pano de fundo para o ensino da matemática: resolução de problemas, comunicação e raciocínio matemáticos. Estas capacidades estão interrelacionadas e devem desenvolver-se continuamente numa espiral, ao longo de todos os anos de escolaridade, com todos os alunos e associadas a todos os conteúdos.

O NCTM (2000) apontou processos essenciais a desenvolver na sala de aula de matemática durante doze anos: a resolução de problemas, o raciocínio e demonstração e a comunicação. Indicou vários tipos de raciocínio a ser trabalhados, como por exemplo, analogia, indutivo e dedutivo. A procura de regularidades aliada ao raciocínio indutivo permite a formulação de conjeturas, a sua análise e reformulação e a procura de justificação. Este caminho orienta os alunos para o raciocínio dedutivo ou, nos anos iniciais, para um raciocínio dedutivo emergente (Baroody, 1993).

O NCTM (2014) continua a defender a necessidade do ensino envolver os alunos em tarefas promotoras de raciocínio e resolução de problemas que conduzam à aprendizagem com compreensão dos conceitos e procedimentos, devendo o aluno estar ativamente envolvido em fazer sentido das tarefas, usando estratégias e representações variadas, justificando as resoluções e partilhando compreensões.

Os alunos precisam entender desde cedo que os exemplos não ser suficientes para se perceber por que razão acontece determinada relação matemática. Se tiverem sido envolvidos na descoberta de relações, experimentando, conjeturando, avaliando as conjeturas, procurando contraexemplos, reformulando as conjeturas e generalizando, ficarão mais motivados a procurar os porquês. A justificação, como explicação das razões pelas quais se estabelecem certas relações matemáticas, deve ser trabalhada sempre.

Justificação

A justificação é essencial na matemática (Fonseca, 2004; Harel & Sowder, 1998, 2007; Schultz-Ferrel, Hammond & Robles, 2007) e por isso os alunos têm de se envolver na atividade de justificar para realizarem aprendizagens com compreensão. A justificação pode ser utilizada com dois objetivos: convencer e persuadir (Harel & Sowder, 1998, 2007). Em sala de aula podem ser colocadas questões para motivar a busca de uma justificação: “Tens

ISBN 978-84-945722-3-4

a certeza?", "É sempre verdade?", "Como explicas?", "Convenceste os colegas?", "Como posso pensar como tu?". Devlin (2012) salienta que "construir justificações matemáticas é um dos atos mais criativos da mente humana" (p. 69).

Para organizar as suas justificações os alunos podem sustentar-se em aspetos externos, exemplos e argumentos generalizáveis. Utilizam várias expressões para justificar os seus raciocínios, como "eu sei isto"; "o professor disse o ano passado"; "pode ver-se pelo desenho"; "o nosso grupo encontrou um padrão"; "penso que tenho uma prova" (Fonseca, 2004).

Harel e Sowder (1998, 2007) definem esquemas de justificação - *proof schemes* - como sendo os argumentos que uma pessoa usa para se convencer e para persuadir outros. Foram identificadas pelos autores três categorias gerais de esquemas de justificação: *esquema de justificação por convicção externa; esquema de justificação empírico e esquema de justificação analítico ou teórico*. *No esquema de justificação por convicção externa* os alunos constroem argumentos recorrendo a fontes externas, ainda que possam estar erradas. Informações fornecidas por colegas, principalmente quando *bons alunos,* pelo manual, pelo professor são usadas para sustentar as opções, por vezes sem espírito crítico. A forma e a manipulação simbólica, mesmo que sem sentido, podem levar a aceitar argumentos incorretos como sendo válidos. *No esquema de justificação empírico* os exemplos sustentam as opções e a generalização de uma conjetura. Por fim, *no esquema de justificação analítico ou teórico* as justificações já se baseiam em aspetos gerais da questão/problema e envolvem raciocínio e operações mentais; são mais rigorosas, gerais, completas e resistentes (Fonseca, 2004).

Um mesmo aluno pode usar esquemas de justificação diferentes quando envolvido em tarefas de diferente natureza, mas na mesma tarefa também se podem manifestar diferentes esquemas de justificação (Fonseca, 2004; Harel & Sowder, 2007; Plaxco, 2011). No entanto, Housman e Porter (2003) referem que os alunos que investigaram, com resultados acima da média, não usaram esquemas de justificação analítica ou por convicção externa, sem antes terem sido usados esquema de justificação empíricos.

Metodologia

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Atendendo ao problema em análise optou-se pela metodologia qualitativa e desenhou-se um estudo de caso. O estudo foi implementado numa escola do norte de Portugal, numa turma do 2º ano de escolaridade (7/8 anos) e foram estudados três casos. Neste artigo apresenta-se o caso da Carlota. A recolha de dados usou tarefas de resolução de problemas, observações, conversas intencionais, gravações áudio-vídeo, documentos e notas de campo. Durante a resolução das tarefas foram feitas observações sobre os procedimentos, estratégias utilizadas e dificuldades manifestadas. Após a resolução, havia recolha dos registos dos alunos caso e as conversas com o objetivo de esclarecer aspetos do raciocínio, que o registo escrito não elucidava. Só depois a tarefa era discutida em grande grupo.

Apresentação e análise de dados

A Carlota, com 7 anos, tinha facilidade em comunicar, verbalizava bem o seu pensamento e era autónoma na execução das tarefas. Apresentam-se três das tarefas resolvidas.

Tarefa 2

A Carlota leu o problema (Anexo 1- T2) e compreendeu o pedido. Manipulou o material disponível (gorros e cachecóis). Utilizou uma lista organizada para resolver o problema (Figura 2). Durante a conversa explicou como obter o número de conjuntos, sem recorrer ao desenho, revelando pensamento crítico pois considerou as condições do problema e cruzou-as corretamente para obter a solução. Para além da lista organizada explicou como pode resolver o problema com uma adição de parcelas iguais, que facilmente transforma em multiplicação, revelando compreender o conceito aditivo de multiplicação, considerando-se no esquema de justificação analítico emergente (Harel & Sowder, 2007; Plaxco, 2011). A sua narrativa parece "formatada" pelo "se… então…", uma forma de raciocínio dedutivo (Baroody, 1993).

> [Se] São quatro fitas e só temos três gorros, então fica quatro mais quatro mais quatro, porque cada fita vai estar em cada gorro e como são três gorros é três vezes o quatro que são as fitas.

Tarefa 3

ISBN 978-84-945722-3-4

A Carlota leu o problema (Anexo 1- T3) e compreendeu o pedido. Recorreu ao desenho para representar os dados e começou a exploração pelas pastas de chocolate. Concluiu que as 8 pastas permitiam organizar 16 sacos. As suas representações relam raciocínio claro e adequado (Figura 3). Continuando a desenhar e a contar concluiu que poderiam ser organizados 18 sacos de guloseimas com as três embalagens de Pais Natal (Figura 4) e 20 sacos com os dois sacos de rebuçados, porque cada saco tinha 2 rebuçados.

Comparando o número de sacos que pode preparar concluiu que só podia organizar 16 sacos, referindo o que sobra de cada tipo (Figura 5). Na segunda parte e pelo desenho, indicou o necessário para preparar os 8 sacos em falta, visto já ter organizado 16 sacos. Foi organizada e explicou com clareza o seu raciocínio (Figura 6).

A Carlota teve sempre presente as condições para organizar os dados e responder às questões. Explorou, compreendeu os resultados que foi obtendo, explicou as opções e manifestou o esquema de justificação analítico emergente (Plaxco, 2011). Atendeu às condições e utilizou raciocínio e operações mentais para sustentar as afirmações. Estabeleceu a relação entre o número total de guloseimas de um tipo e o número de guloseimas desse tipo por saco. Não apresentou dificuldades. Manifestou raciocínio dedutivo emergente para proceder à resolução da tarefa (Baroody, 1993), pois estabeleceu pormenorizadamente o número de guloseimas por saco..

De novo, a sua narrativa parece "formatada" pelo "se… então…", uma forma de raciocínio dedutivo

> [se] … são oito pastas de chocolate como diz aqui e … dividi em três, e [então] três mais três, três mais três, três mais três, três mais três, três mais três, três mais três, três mais três, três mais três, [então] é igual a dezasseis [saquinhos de guloseimas que pode preparar].

Tarefa 5

A Carlota leu e compreendeu o problema (Anexo 1- T5). Utilizou o material disponível e organizadamente resolveu-o. Contou as cavidades disponíveis e colocou o ovo, sequencialmente.

> Eu primeiro contei os buraquinhos da caixa. E tinha seis, e como eu só tinha um ovo pus o ovo em cada um dos buraquinhos: no primeiro, no segundo, no terceiro, no quarto, no quinto e no sexto [registo em coluna].

ISBN 978-84-945722-3-4

Na primeira linha estão as casas ímpares e na segunda as casas pares (Figura 7). Avaliou as condições e teve-as sempre presentes. Justificou as opções, pelo que revela um esquema de justificação analítico emergente (Plaxco, 2011), uma vez que atende às condições da tarefa quando justifica. Na segunda questão tinha de arrumar dois ovos na caixa. Usou o material manipulável (Figura 8) e registava cada nova possibilidade. Não encontrou forma de proceder organizadamente e, por isso, não estava certa de ter encontrado todas as possibilidades (Figura 9).

> Eu pensei no primeiro e no segundo buraquinho, no um e no dois; depois pensei no dois e no três; depois pensei no um e no quatro que é no primeiro e no outro em baixo; depois pus assim em diagonal e depois ao contrário e depois pus os dois no meio um em cima e outro em baixo.

Começou com a disposição horizontal que não esgotou sequencialmente, tendo passado para a disposição vertical e depois em diagonal. O seu registo reflete do uso de tentativas, todas e corretas, mas não organizadas. A organização era essencial para garantir a listagem de todas as opções, o que aqui não ocorreu. Respondeu "Eu acho que já experimentei todas… Acho que não falta nenhuma", mas não tinha a certeza.

Na terceira parte, arrumar três ovos, continuou a não proceder de modo organizado, o que a impediu de concluir, enredada nas diferentes possibilidades (Figura 10). A mudança de disposição, sem esgotar todas as possibilidades, terá contribuído para este desfecho.

Compreendeu a tarefa, mas a tentativa e erro não ajudou à listagem de todas as possibilidades. Como não conseguiu ir além dos exemplos e de achar que tinha encontrado todas as possibilidades, manifestou um esquema de justificação empírico, nas duas questões finais. A Carlota teve dificuldade na organização dos registos, refletindo talvez a dificuldade em estruturar o seu pensamento para experimentar organizadamente. Durante a resolução não foi dada qualquer indicação sobre o modo de apresentação dos registos.

Conclusões

A Carlota compreendeu as tarefas propostas e resolveu organizada e completamente as T2 e T3 e a primeira parte da T5. Recorreu à estratégia da lista organizada, do desenho e da tentativa e erro. Revelou raciocínio dedutivo emergente e esquemas de justificação analítico emergente e empírico. As dificuldades prenderam-se com a não exploração organizada da

ISBN 978-84-945722-3-4

T5, que impediu a indicação de todas as possibilidades de arrumação dos ovos. A organização que revelou em algumas tarefas propiciou a emergência do raciocínio dedutivo, bem como do esquema de justificação analítico. A Carlota confirma o defendido por Stylianou, Chae e Blanton (2006), de que o recurso a estratégias de resolução organizadas, lista ou procedimento, contribuem para a emergência do esquema de justificação analítico.

Há questões em aberto: Por que razão não conseguiu organizar as experiências na 2.ª e 3.ª parte da T5? Precisaria de sugestões? De mais tempo? A última parte da tarefa seria complexa, atendendo ao número de variantes a considerar? Se se tivesse organizado na 2.ª parte teria conseguido fazê-lo e justificado na 3.ª? Da relação entre procedimento organizado e esquema de justificação, resulta evidente a necessidade de que em sala de aula o ambiente de aprendizagem suscite a organização por parte dos alunos, no sentido de lhes proporcionar o acesso a raciocínios e meios de justificação mais consistentes e que contribuam para a compreensão da matemática.

Referencias

Baroody, A. J. (1993). *Problem solving, reasoning and communicating, K-8: helping children think mathematically.* New York: Macmillian.

Darmstadter, H. (2013). Why do human reason? A pragmatist supplement to an argumentative theory. *Thinking & Reasoning*, 19-4, 472-487.

Devlin, K. (2012). *Introduction to Mathematical Thinking.* Palo Alto: Keith Devlin Eds. http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/curso-Devlin.pdf, Consultado em 10/09/2016

Fonseca, L. (2004). A formação inicial de professores: a demonstração em geometria. Lisboa: APM.

Goldenberg, E. P., Cuoco, A. & Mark, J. (1998). A role for geometry in general education. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp.3-42). London: Lawrence Erlbaun Associates Publishers.

Harel, G. & Sowder, L. (2007). Toward Comprehensive Perspectives on the Learning and Teaching of Proof. In I. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Reston: NCTM.

Housman, D. & Porter, M. (2003). Proof schemes and learning strategies of above-average mathematics students. Educational Studies in Mathematics, 53(2), 139-158.

Mason, J. & Johnston-Wilder, S. (2004). Fundamental Constructs in Mathematics Education. London: Routledge Falmer.

Ministério da Educação (2007). Programa de Matemática do Ensino Básico. Lisboa: ME

NCTM (2014). Principles to action. Ensuring Mathematical Success for All. Reston.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: NCTM.

ISBN 978-84-945722-3-4

Plaxco, D.B. (2011). *Relationship between student's proof schemes and definitions.* Master of Science in Mathematics. Virginia: Polytechnic Institute and State University.
Russel, S. (1999). Mathematical reasoning in the elementary grades. In L. Stiff & F. Curcio (Eds.), *Developing Mathematical Reasoning in grades K-12*, pp. 37-44. Reston: NCTM.
Schultz-Ferrel, K., Hammond, B. & Robles, J. (2007). *Introduction to reasoning and proof (Grades Prek-2).* Portsmouth: Heinemann.
Steen, L. (1999). Twenty Questions about Mathematical Reasoning. In Leo Stiff (Ed.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12*, pp.175-187. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
Sternberg, R. (1999). The nature of mathematical reasoning. In L. English (Ed.), *Mathematical and analogical reasoning of young learners*, pp. 1-22. London: Routledge.
Stylianou, D., Chae, N., Blanton, M. (2006) Students proof schemes: a closer look at what characterizes students proof conceptions. In Alatorre, S., Cortina, J.L., Sáiz, M., and Méndez, A. (Eds). *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.
Sumpter, L. & Hedefalk, M. (2015). Preschool children´s collective mathematical reasoning during free outdoor play. *The Journal of mathematical behavior*, 39, 1-10.

ANEXO – TAREFAS E FIGURAS

Tarefa 2 (T2)

O duende Pimpão trabalhava na oficina do Pai Natal, mas era muito distraído e acabava sempre por perder os cachecóis e os gorros que a Mãe-Natal lhe fazia. A certa altura apercebeu-se que já só tinha um gorro verde-escuro e um cachecol vermelho. Como o Pimpão era muito trabalhador o Pai Natal e a Mãe Natal decidiram dar-lhe um presente antecipado. Ofereceram-lhe dois gorros (azul e laranja) e três cachecóis (roxo, branco e verde claro) para que na noite da distribuição dos presentes o Pimpão os pudesse acompanhar.
Agora que tem três gorros (verde escuro, azul e laranja) e quatro cachecóis (vermelho, roxo, branco e verde claro) o Pimpão nem sabe qual haverá de escolher para a noite da distribuição dos presentes. Quantos conjuntos de gorro e cachecol pode fazer o duende Pimpão?

Tarefa 3 (T3)

Para a festa de Natal as professoras organizaram um lanche para a turma do 2º ano, que tem 24 alunos. Cada aluno irá receber um saco de guloseimas com 3 quadradinhos de chocolate; 2 Rebuçados; 1 Pai Natal. Para a preparação dos sacos com guloseimas é necessário comprar pastas de chocolate, embalagens de Pais Natal e sacos de rebuçados, como os da figura:

ISBN 978-84-945722-3-4

6 Quadradinhos de chocolate 6 Pais Natal 20 Rebuçados

Compraram 8 pastas de chocolate, 3 embalagens de Pais Natal e 2 sacos de rebuçados. Quantos sacos de guloseimas podem ser preparados? Sobra alguma coisa? O quê?
O que é preciso comprar para preparar sacos para todos os alunos da turma?

Tarefa 5 (T5)

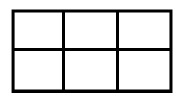
O Ulisses tinha uma galinha que ainda não punha ovos. Certo dia, o Ulisses encontrou um ovo na capoeira e levou-o para casa. Ao chegar à cozinha reparou que a caixa dos ovos estava vazia. De quantas maneiras diferentes é que o Ulisses podia arrumar o ovo na caixa?
No dia seguinte, o Ulisses apanhou mais um ovo na capoeira.
De quantas maneiras diferentes pode ele arrumar os 2 ovos?
E se fossem 3 ovos, de quantas maneiras diferentes os poderia  colocar na caixa?

Figura 1– Material disponível para a T2 Figura 2 – Resolução da T2

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

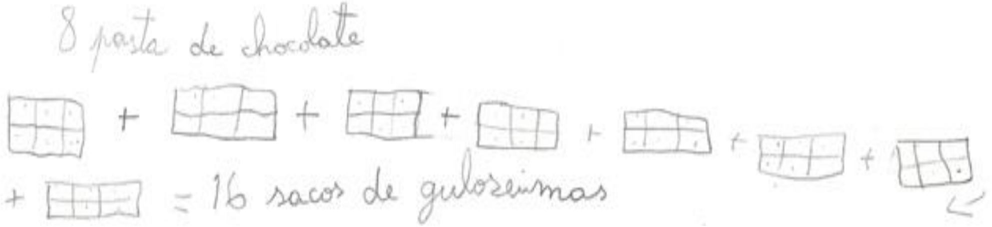


Figura 3- Número de sacos de guloseimas preparados com 16 pastas de chocolate

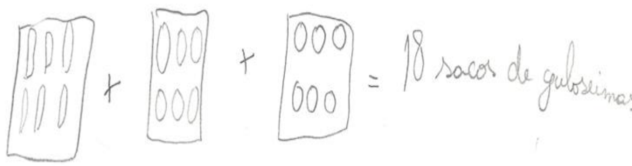


Figura 4 - Número de sacos preparados com 3 embalagens de Pais Natal

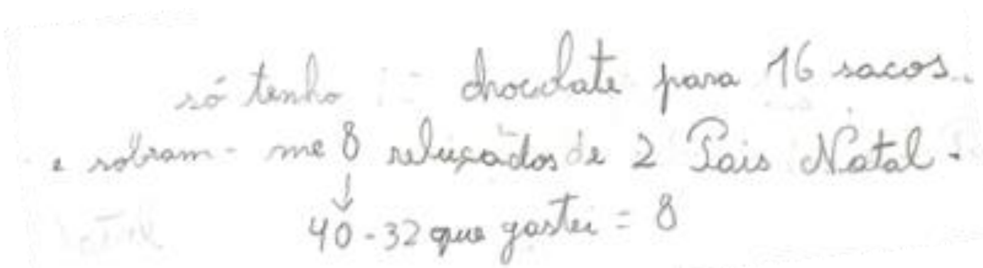


Figura 5 – *Resposta dada pela Carlota à Tarefa 3*

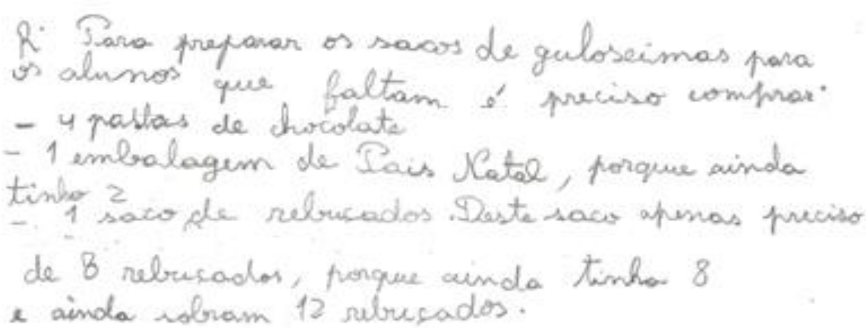


Figura 6 - Resposta dada pela Carlota à segunda parte da Tarefa 3

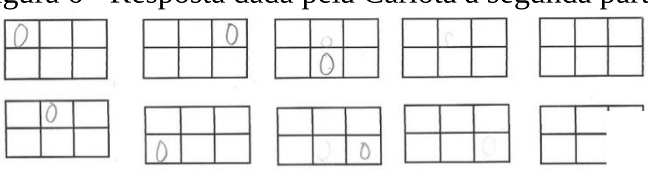
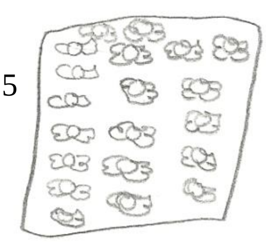


Figura 7- Resolução da Carlota - parte I da Tarefa 5



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Figura 8 - Manipulação do material para a colocação de 2 ovos

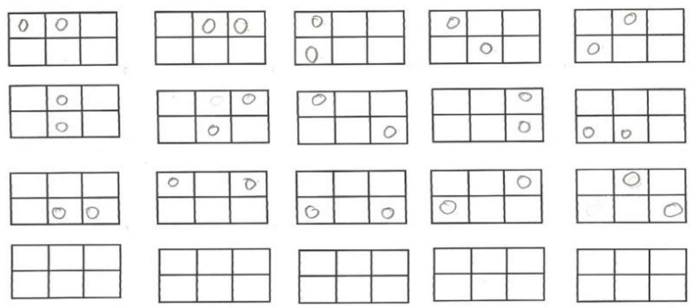


Figura 9 - Resolução apresentada pela Carlota - parte II Tarefa 5

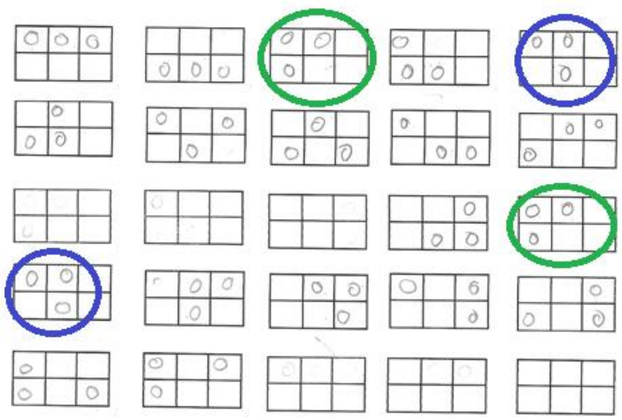


Figura 10 - Proposta da Carlota para a arrumação dos 3 ovos

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4