UTILIZACION DE DIFERENCIAS FINITAS PARA EVALUAR RAICES DE POLINOMIOS

Eduardo Epstein

Introduccion

En este trabajo se presenta un método destinado a evaluar las raíces de polinomios con coeficientes reales en los casos en que tales raíces sean números reales distintos.

El método que se expondrá -además de utilidad práctica- puede resultar por sí mismo de interés en la enseñanza de la Matemática.

Consideraciones preliminares.

Sea $P(z)$ un polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes reales:

$$(1) \qquad P(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k z^{n-k}, \quad b_o \neq 0$$

De ahora en adelante supondremos que las raíces $z_1, z_2, \ldots, z_n$ de $P(z)$ son números reales distintos.

Como el procedimiento para evaluar las raíces de $P(z)$ requiere además, que este polinomio no admita como raíces a un número y también a su opuesto, -cosa que no es fácil conocer de antemano-, eludiremos esta posible dificultad mediante una sencilla transformación de $P(z)$ en otro polinomio $R(x)$ al que podremos aplicar el método sin inconveniente alguno. Por último, una vez determinadas las raíces de R(x), obtendremos de inmediato las de P(z). Desarrollo.

Los pasos a seguir son los siguientes:

i). Transformación de P(z) en R(x).

Recordaremos algunos conocimientos de álgebra:

- Con los coeficientes b_k, $k = 0,1,\dots,n$ de P(z) se puede obtener un número real L tal que cada raíz de este polinomio verifique:

(2) $z_k < L, \quad (k = 1,2,\dots,n)$

- Si L es uno de los números que verifica la condición (2) y se considera la traslación (3) $z = x + L$

entonces P(z) se transforma en otro polinomio R(x) que resulta ser también de grado n. Pongamos:

(4) $$R(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}, \quad a_o \neq 0$$

- Entre las raíces $z_1, z_2, \dots, z_n$ de P(z) y las raíces $x_1, x_2, \dots, x_n$ de R(x) existe la siguiente relación:

(5) $z_k = x_k + L, \quad k = 1,2,\dots, n$

Los elementos de álgebra que acabamos de recordar, permiten probar fácilmente que: si L es un número que verifica la condición (2) y se aplica a P(z) la traslación (3), entonces las raíces $x_1, x_2, \dots, x_n$ de R(x) son números distintos y además son negativos.

La última afirmación nos permite considerar las raíces $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de R(x) ordenadas del siguiente modo:

(6) $x_1 < x_2 \quad \ldots \quad x_{n-1} < x_n < 0$

A fin de llevar a la práctica de una manera sencilla este primer paso, hacemos las anotaciones siguientes:

a) Puesto que $P(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k z^{n-k}$ y $-P(z) = \sum_{k=0}^{n} (-b_k) z^{n-k}$ admiten las mismas raíces, supondremos en lo sucesivo que el coeficiente del monomio de grado n es positivo. De no ser así, bastará multiplicar P(z) por -1.

b) Podemos obtener un número L que verifique la condición (2), empleando la regla de Laguerre - Thibault:

"Si al dividir P(z) por z - L resultan positivos los coeficientes del cociente y también el resto, entonces se cumple la condición (2)."

Concretamente, realizaremos la división sintética de P(z) por z - d asignando a d valores enteros: 1,2,3,..., hasta conseguir el primer entero que haga positivos a los coeficientes del cociente y también el resto. Este primer entero tomaremos como L.

c) Obtendremos el polinomio R(x) mediante el esquema de Horner:

"Los coeficientes a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 -en este orden- del polinomio R(x), son los restos que resultan al dividir por z - L el polinomio P(z) y los sucesivos cocientes".

ii) <u>Las raíces de r(x)</u>.

Utilizaremos los coeficientes a_k, $k = 0,1,\ldots, n$ del polinomio R(x) ya obtenido, para construir una sucesión $\{u_j\}$ definida como sigue:

$$(7)\quad \begin{cases} u_j = 0, \ \ j = 1,2,\ldots, n-1 & (7.1) \\ u_n = 1 & (7.2) \end{cases}$$

$$(8)\quad u_{n+j} = -\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{n} a_k\, u_{n-k+j}, \quad j = 1,2,3,\ldots$$

Naturalmente, no consideraremos las condiciones (7.1) si $n = 1$.

Es claro que a partir de las condiciones (7) podemos determinar sucesivamente los términos u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+3},...,utilizando la relación (8).

Obviamente, la relación (8) es equivalente a

$$(8')\quad \sum_{k=1}^{n} a_k\, u_{n-k+j} = 0$$

que es una ecuación en diferencias finitas, lineal, de orden n, homogénea, con coeficientes constantes.

La teoría de ecuaciones en diferencias finitas enseña que siempre que las raíces x_1, x_2, ..., x_n de R(x) sean distintas -como es nuestro caso-, el j-ésimo término de la sucesión definida por (7) y (8') se expresa como sigue:

$$(9) \quad u_j \sum_{k=1}^{n} c_k\, x_k^{j-1}, \qquad j = 1,\ 2,\ 3, \ldots..$$

en donde c_1, c_2, ..., c_n designan constantes.

Como la deberá verificarse en particular para j = 1,2,..., n, podemos imponer las condiciones (7) en (9); o sea

$$(10) \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k\, x_k^{j-1} = 0, & j = 1,2,\ldots, n-1 \qquad (10.1) \\[2ex] \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k\, x_k^{j-1} = 0, & \qquad (10.2) \end{cases}$$

Obtenemos un sistema de n ecuaciones lineales no homogéneo en las incógnitas c_1, c_2, ..., c_n.

Probaremos la

Proposición 1.

El sistema de ecuaciones (10) admite solución única $c_1, c_2, \ldots, c_n$ y además se verifica

(11) $$c_1 \neq 0$$

En efecto:

1.1. Sea $n = 1$.

En este caso no podemos considerar las ecuaciones (10.1) porque éstas provienen de las condiciones (7.1). Por lo tanto, el sistema de ecuaciones (10) se reduce a la (10.2) que se expresa

$$c_1 \, x_1^0 = 1$$

Y como de (6) sigue que $x_1 \neq 0$, queda claro que el sistema de ecuaciones (10) admite solución única:

(12) $$c_1 = 1$$

Obviamente, se cumple (11).

1.2. Sea $n > 1$.

El determinante del sistema de ecuaciones (10) es

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ . & . & \cdots & . & . \\ . & . & \cdots & . & . \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Se trata de un determinante de Vandermonde. Sabemos del álgebra que por ser x_1, $x_2, \ldots,$ x_n números distintos, se cumple que $D \neq 0$. De aquí resulta que el sistema de ecuaciones (10) admite solución única.

Consideremos ahora

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ . & . & \cdots & . & . \\ . & . & \cdots & . & . \\ 0 & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ 1 & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Al desarrollar este determinante por los elementos de la primera columna, obtenemos

$$D_1 = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

Salvo el factor $(-1)^{n+1}$, obtenemos nuevamente un determinante de Vandermonde. En particular $D_1 \neq 0$ y como

$$c_1 = \frac{D_1}{D}$$

resulta evidente que se verifica (11) también en este caso.

Supongamos haber construido la sucesión $\{u_j\}$ definida por (7) y (8) y consideremos la sucesión $\left\{\frac{u_{j+1}}{u_j}\right\}$. Probaremos ahora la

<u>Proposición 2</u>.

La sucesión $\left\{\frac{u_{j+1}}{u_j}\right\}$ es convergente y además

$$(13) \quad \lim_{j\to\infty} \frac{u_{j+1}}{u_j} = x_1$$

En efecto:

2.1. Sea $n = 1$.

En vista de (12) podemos expresar la (9) de esta manera:

$$u_j = x_1^{j-1}. \qquad\qquad j = 1,2,\ldots$$

Como de (6) concluímos que $x_1 = 0$, tenemos

$$\frac{u_{j+1}}{u_j} = \frac{x_1^j}{x_1^{j-1}}, \qquad\qquad j = 1,2,\ldots$$

Es decir

$$\frac{u_{j+1}}{u_j} = x_1, \qquad\qquad j = 1,2,\ldots$$

Deducimos de aquí que la sucesión $\left\{ \frac{u_{j+1}}{u_j} \right\}$ es convergente y además que se cumple (13).

2.2. Sea $n > 1$.

En vista de (9) tenemos

$$(14) \quad \frac{u_{j+1}}{u_j} = \frac{\sum_{k=1}^{n} c_k\, x_k^j}{\sum_{k=1}^{n} c_k\, x_k^j}, \qquad\qquad j = 1,2,\ldots$$

Como de (6) sigue que $x_1 \neq 0$, podemos expresar la (14) de este modo:

$$(15) \quad \frac{u_{j+1}}{u_j} = \frac{c_1\, x_1 \quad \sum_{k=1}^{n} c_k\, x_k^j \left(\frac{x_k}{x_1} \right)^{j-1}}{\sum_{k=1}^{n} c_k\, x_k^j\, c_k \left(\frac{x_k}{x_1} \right)^{j-1}}, \qquad\qquad j = 1,2,\ldots$$

De (6) también deducimos que

$$0 < \frac{x_k}{x_1} < 1, \qquad k = 2,3,\ldots, n$$

De aquí que

$$(16) \quad \lim_{j\to\infty} \left[\frac{x_k}{x_1} \right]^{j-1} = 0, \; k = 2,3,\ldots, n$$

En vista de (15) y considerando (16) y (11), concluímos que la sucesión $\left\{ \frac{u_{j+1}}{u_j} \right\}$ es convergente y además que se cumple (13).

La (13) nos dice que si en la sucesión definida por (7) y (8) consideramos términos portadores de índices J bastante grandes, tendremos:

$$x_1 \cong \frac{u_{j+1}}{u_j}$$

Una vez determinada la raiz x_1, el mismo método permitirá evaluar las raíces restantes de R(x) en el orden: x_2, x_3, ..., x_n. A tal efecto, bastará realizar la división sintética de R(x) por $x - x_1$; y como sabemos, el polinomio cociente que resulta de esta división, admite como raíces a las restantes.

iii) <u>Las</u> <u>raíces</u> <u>de</u> <u>P(z)</u>.

Obtenidas las raíces x_1, x_2, ..., x_n de R(x) y en vista de (5), resulta inmediato determinar las raíces z_1, z_2, ..., z_n de P(z).

Problemas.

1.- Se da un polinomio con coeficientes reales del cual se sabe que sus raíces son números reales distintos. ¿Por qué podrían presentarse dificultades al utilizar el procedimiento descripto, en el caso de no aplicar antes al polinomio la traslación (3) expuesta en el paso i).?

2.- ¿Puede concebir un tratamiento distinto al descripto en el paso i) a fin de soslayar la dificultad que se presentaría si un polinomio con coeficientes reales cuyas raíces son reales y distintas, admitiera como raíces a un número y también a su opuesto?

Palabras finales.

El método expuesto es algo extenso pero tiene algunas ventajas:

- Es muy fácil realizar un programa para evaluar raíces de polinomios siguiendo los pasos descriptos en este trabajo.

- La convergencia del método es muy rápida como se ha podido apreciar al ejecutar un programa en lenguaje BASIC probado en el equipo WANG 2200 MVP de la Universidad Nacional de Santiago del Estero.

• El lector interesado en conocer más detalles sobre lo expuesto en este artículo, puede dirigirse a: Eduardo Epstein. Univ. Nac. de Sgo. del Estero. Fac. de Cs.Ex. y Tecn. Av. Belgrano (s) 1912. 4200 - Sgo. del Estero.

Bibliografía.

- Análisis Matemático - Vol. I - J.Rey Pastor, P. Pi Calleja y C. Trejo. Editorial Kapelusz S.A. - Buenos Aires.

- Ecuaciones en Diferencias Finitas - S. Goldberg. Editorial Marcombo S.A. - Barcelona.

```
10 REM DIFERENCIAS FINITAS PARA EVALUAR RAICES DE POLINOMIOS CON COEFICIENTES
20 REM REALES, SUPUESTO QUE TALES RAICES SEAN REALES Y DISTINTAS.
30 DIM B(100), A1(100), A(100), Z(99), C(100), U(100)
40 PRINT HEX(03):PRINT "INGRESE EL GRADO DEL POLINOMIO."
50 PRINT "DEBE SER ENTERO POSITIVO MENOR QUE 100"
60 IMPUT N
70 N1=N
80 IF N<= 0 THEN 40
90 FOR K=1 TO 99
100 IF K=N THEN 140
110 NEXT K
120 GOTO 40
130 IF N>99 THEN 40
140 PRINT "INGRESE LOS COEFICIENTES SEGUN POTENCIAS DECRECIENTES."
150 FOR K=1 TO N+1
160 INPUT B1(K)
170 NEXT K
180 IF B1(1)>0 THEN 260
```

```
190 IF B1(1)<0 THEN 220
200 PRINT "EL COEFICIENTE DE MAYOR GRADO NO PUEDE SER NULO."
210 GOTO 40
220 FOR K=1 TO N+1
230 B(K)=-B1(K)
240 NEXT K
250 GOTO 310
260 FOR K=1 TO N+1
270 B(K)=B1(K)
280 NEXT K
290 REM DETERMINACION DE UN MAYORANTE DE LAS RAICES POR LA REGLA DE LAGUERRE
300 REM - THIBAULT.
310 FOR L=1 TO 1000000
320 P=B(1)
330 FOR K=2 TO N+1
340 P=P*L+B(K)
350 IF P<=0 THEN 380
360 NEXT K
370 GOTO 400
380 NEXT L
390 REM TRASLACION AL NUEVO ORIGEN (L,0) MEDIANTE EL ESQUEMA DE HORNER.
400 FOR K=1 TO N+1
410 A(K)=B(K)
420 NEXT K
430 M=N
440 FOR K=2 TO M+1
450 A(K)=A(K)+L*A(K-1)
460 NEXT K
470 M=M-1
480 IF M>=1 THEN 440
490 REM EVALUACION DE LAS RAICES DEL POLINOMIO.
500 FOR K=1 TO N-1
510 U(K)=0
520 NEXT K
530 U(N)=1
540 C1=1.E+99
550 FOR i=1 TO 100000
560 S=0
570 FOR K=1 TO N
580 S=S+A(K+1)*U(N-K+1)
590 NEXT K
600 U(N+1)=-S/A(1)
```

```
610 IF U(N)=0 THEN 650
620 C2=U(N+1)/U(N)
630 IF ABS(C2-C1)<1.E-6 THEN 700
640 C1=C2
650 FOR K=1 TO N
660 U(K)=U(K+1)
670 NEXT K
680 NEXT I
690 GOTO 910
700 Z(N)=C2+L
710 FOR K=2 TO N+1
720 A(K)=a(K)+C2*A(K-1)
730 NEXT K
740 N=N-1
750 IF N>=1 THEN 500
760 PRINT HEX(0A0A)
770 PRINT TAB(5);"EL POLINOMIO DEGRADO ";N1
780 PRINT
790 PRINT TAB(5);"CUYOS COEFICIENTES ORDENADOS EN FORMA
DECRECIENTE SON:"
800 PRINT
810 FOR K=1 TO N1+1
820 PRINT TAB(10);B1(K)
830 NEXT K
840 PRINT HEX(0A0A)
850 PRINT TAB(5);"TIENE LAS SIGUIENTES RAICES:"
860 PRINT
870 FOR K=1 TO N1
880 PRINT TAB(10);ROUND(Z(K),5)
890 NEXT K
900 GOTO 40
910 PRINT "EL METODO NO CONVERGE."
920 GOTO 40
930 END
```