

FORMACIÓN ACTIVA DEL PROFESORADO: USO DE LA TRANSPOSICIÓN META-DIDÁCTICA EN UN CURSO GEOGEBRA

Aitzol Lasa – Miguel R. Wilhelmi – Jaione Abaurrea
aitzol.lasa@unavarra.es – miguelr.wilhelmi@unavarra.es – jaione.abaurrea@unavarra.es
Universidad Pública de Navarra, España

Núcleo temático: IV Formación del profesorado en matemáticas

Modalidad: CB Comunicación breve

Nivel educativo: Formación y actualización docente

Palabras clave: Transposición meta-didáctica, praxeología, GeoGebra

Resumen

Ante la constancia de que, en la década de 2010, los cursos de formación continua del profesorado de matemáticas en una región en España no han tenido un impacto claro en la práctica docente real de los centros educativos en el ámbito científico-tecnológico, el Centro de Apoyo al Profesorado (CAP) de esta región solicita a investigadores de la Universidad un curso de formación con metodología activa. Se propone, por ello, el uso de La Transposición Meta-Didáctica (TMD) como modelo teórico para el diseño de un curso de GeoGebra que supere la instrucción técnica de la herramienta y se centre en su uso efectivo en el aula, dado que la sola maestría informática del usuario no garantiza la correcta gestión de un proceso de enseñanza y aprendizaje, y genera, además, diversos fenómenos y obstáculos didácticos. La formación se realiza durante el curso 2016/2017 sobre una muestra de docentes del Cuerpo de profesores de educación secundaria de la región. Los resultados de la experimentación apoyan el modelo teórico empleado: los docentes modifican, en distinto nivel, sus praxeologías en cuanto a las técnicas y tecnologías empleadas. Además, el investigador obtiene evidencias empíricas que cuestionan algunos aspectos de su teoría de referencia.

Introducción

El Grupo de investigación en didáctica de las matemáticas de la Universidad Pública de Navarra (UPNA) mantiene una relación institucional fluida con una diversidad de entidades autonómicas (EHGI¹⁵, Tornamira¹⁶, CAP¹⁷, UEU¹⁸), con el ánimo de enriquecer la *noosfera* del sistema educativo, colaborando en la organización de eventos y cursos sobre educación matemática: Olimpiada matemática escolar, Jornadas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Navarra, y cursos de formación del profesorado en Educación Primaria (EP) y en Educación Secundaria (ESO y Bachillerato).

¹⁵ EHGI. Instituto Local de GeoGebra en Navarra.

¹⁶ Tornamira. Asociación Navarra de profesores de matemáticas.

¹⁷ CAP. Organismo gubernamental encargado de la formación del profesorado.

¹⁸ UEU. Entidad sin ánimo de lucro para la formación continua post-universitaria.

Durante la década de 2010, los cursos de formación del profesorado se han centrado en la instrucción técnica de herramientas tecnológicas, principalmente GeoGebra (GGB). A pesar de ello, el CAP constata que el uso de la herramienta sigue siendo anecdótico, y que en general el docente no dispone de tiempo y recursos para introducir estas mejoras en su práctica diaria. Solo aquellos docentes directamente involucrados en proyectos de innovación a cargo de la red ibérica de institutos GGB lo han introducido de manera efectiva y regular como soporte para la gestión de la actividad matemática.

Esta realidad motiva un cambio en los contenidos y en la metodología de los cursos de formación, con el objetivo de incrementar su impacto sobre la práctica escolar. Se observa que los contenidos deben incluir resultados de investigaciones en didáctica de las matemáticas sobre *instrumentación* (Trouche, 2005) de herramientas tecnológicas, para que el docente tenga una referencia de “buenas prácticas”. Asimismo, la metodología debe evitar que la instrucción técnica sea un objetivo en sí mismo, para evitar fenómenos de *deslizamiento metadidáctico* en la *dimensión mediacional*, que no garantizan un cambio en las cláusulas del *contrato didáctico* (Brousseau, 2007).

En este trabajo se analiza la implementación y el desarrollo de un curso de formación en GGB, en el cual se recurre a la *transposición meta-didáctica* (Arzarello et al., 2014), por considerar que este enfoque responde a la necesidad de una metodología activa que tenga un impacto en la gestión de la clase.

Marco Teórico: transposición meta-didáctica

Arzarello y colaboradores (2014) proponen un modelo de formación del profesorado basado en la noción de *transposición didáctica* (Chevallard, 1992, 1997, 2004) y que se fundamenta en la Teoría antropológica de lo didáctico (TAD). Brevemente, la *transposición meta-didáctica* (TMD) considera la formación de profesorado como una interacción compleja y dinámica entre diferentes comunidades y fuertemente marcada por las restricciones institucionales de los órganos que promueven estas actividades, junto con otras restricciones derivadas del entorno.

Si en un curso de formación el ponente es un investigador en educación matemática, éste debe interactuar con los docentes de matemáticas, dentro de un programa diseñado por el Ministerio, un Gobierno autonómico o una Administración escolar; programa que busca unos objetivos concretos, como puede ser la promoción del conocimiento curricular o el uso de

nuevas tecnologías para la educación. El desarrollo de este programa tendrá además que contemplar las restricciones de la tradición escolar, de la Programación de centro o el uso del libro de texto por el docente.

Estas comunidades no son estancas, y un mismo sujeto puede participar en más de una comunidad: por ejemplo, el investigador es a su vez docente, y puede formar parte de las instituciones que legislan y regulan sobre el sistema educativo; las asociaciones de profesores están formadas por docentes que pueden tener responsabilidades de gestión en la administración del gobierno, etc. La TMD atribuye a estos actores una condición de especial importancia, por su cualidad de *bróker* o persona que goza de una posición privilegiada a la hora de gestionar y dirigir el proceso de formación, por su legítima capacidad y posibilidad de acción.

Cada comunidad emplea sus propias *praxeologías didácticas*¹⁹ tanto en su práctica operativa y discursiva de los procesos de resolución de tareas matemáticas como en la gestión de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Cuando las diferentes comunidades interactúan, sus *praxeologías* asociadas interactúan entre sí. En la TMD el *bróker* guía el proceso dinámico por el cual cada agente adapta o modifica su *praxeología didáctica* de forma que pueda emerger otra más eficaz. Así el docente adecúa sus conocimientos didácticos sobre la gestión del aula a partir de la información que le aporta el investigador, que a su vez recibe un contraste empírico sobre la pertinencia y la robustez de la teoría didáctica que es su objeto de estudio. El proceso por el que el *bróker* gestiona el trasvase de conocimiento didáctico de una comunidad a otra toma el nombre de *trayectoria meta-didáctica*.

“Considere una comunidad de docentes que empieza un programa educativo en el que, por razones institucionales (pe., un cambio en el currículo), una comunidad de investigadores introduce una herramienta informática específica (pe., software de geometría dinámico). Inicialmente, la herramienta es un componente externo para el docente [...]. Sin embargo, al finalizar el programa educativo, se ha convertido en un componente interno en sus *praxeologías*, aunque a diferentes niveles. Ese proceso de internalización, que ocurre vía

¹⁹ La *praxeología didáctica* (PD) es la unidad de análisis de un proceso de estudio; permite valorar la estructura del sistema didáctico: su organización y posibilidades y restricciones de gestión. Por ello, la PD incorpora, como parte del análisis, los niveles de codeterminación institucional y los distintos momentos transpositivos (del saber científico a los conocimientos enseñados).

transposición meta-didáctica, define la *trayectoria meta-didáctica*” (Arzarello et al., 2014, 355-356)

Descripción del curso

El curso tiene por objetivo la formación de docentes de matemáticas en la utilización efectiva de la herramienta GeoGebra en el aula, y se desarrolla en tres fases:

1. *Sesiones presenciales*. El ponente presenta a los participantes los resultados de los estudios en Didáctica de las matemáticas que avalan el uso de la herramienta GeoGebra y sugieren usos contrastados de la misma.
2. *Trabajo autónomo de los participantes*. Los participantes diseñan y ponen en marcha los proyectos en el aula, con la asistencia y la tutoría del ponente vía una plataforma telemática.
3. *Puesta en común*. El ponente se reúne nuevamente con los participantes, de forma presencial, para la puesta en común de los resultados obtenidos en las distintas experiencias de aula.

Los docentes deben seleccionar recursos del repositorio GGBTUBE y adecuarlos a las características de su grupo de estudiantes, adquiriendo una mínima *maestría informática*, consistente en la creación de un usuario GGB y en la organización de recursos en un Libro-GGB. Si un docente necesita conocimientos adicionales en el uso de la herramienta, el ponente le ayuda de manera individualizada. Además, el recurso modificado debe respetar las indicaciones de “buenas prácticas” dadas por el ponente del curso, es decir: (1) las actividades se deben centrar en la *exploración, ilustración o demostración* de propiedades matemáticas (Lasa y Wilhelmi, 2013a); y (2) la actividad en ordenador se debe complementar mediante cuestionarios en papel que los estudiantes deben rellenar a medida que manipulan el modelo dinámico (Lasa, 2015).

El curso se desarrolla durante los meses de octubre y diciembre de 2016, y en él participan 18 docentes de matemáticas de Educación Secundaria, que realizan sus proyectos en lengua vasca (8 docentes, grupo A) o en castellano (10 docentes, grupo B).

Se espera que en la fase 2 (trabajo autónomo) los docentes pongan a prueba la adecuación y eficacia de sus *praxeologías*, en contraposición a la dada por el investigador (tabla 1); en la fase 3 se contrastan explícitamente estas *praxeologías*.

PRAXEOLOGÍA	INVESTIGADOR	DOCENTE
-------------	--------------	---------

PREVIA		
TAREAS	Situación didáctica	Ejercicios de imitación y repetición
TÉCNICAS	Instrumentación del modelo dinámico Momento de exploración	Maestría informática del instrumento Momento de ilustración
TECNOLOGÍA	Software dinámico GeoGebra Contrato con componente adidáctico	Software dinámico GeoGebra Contrato de imitación
TEORÍA	Teoría de la génesis instrumental Teoría de situaciones didácticas en matemáticas Teoría antropológica de lo didáctico	Información curricular Epistemología espontánea del profesor Innovación educativa Autodidáctica, no-sistemático

Tabla 1. *Praxeologías didácticas* previas del investigador y de los docentes.

En la fase 3, cada docente presenta en su proyecto final: (1) el enlace al recurso generado, que incluye el cuestionario de los estudiantes en formato PDF; (2) ejemplos de documentos escaneados con las producciones de los estudiantes; y (3) un informe en el que deben explicitar: las características del grupo de estudiantes, el origen y la puesta en marcha de la propuesta, una valoración del desarrollo del proceso de estudio de los estudiantes, y, finalmente, una autoevaluación.

Resultados

La totalidad de los participantes termina la primera fase del curso, pero casi la mitad abandona en la segunda fase *on-line* de diseño de actividades. La tasa de éxito es mayor en el grupo A (tabla 2).

Grupo	Inscritos	Finalizan el curso
A	8	7 (88%)
B	10	4 (40%)
Total	18	11 (61%)

Tabla 2. Tasa de éxito global.

Los docentes que desisten achacan su decisión a las restricciones institucionales y del entorno a las que se enfrenta su comunidad, las cuales impedirían en la práctica cualquier intento de introducción del software en la práctica escolar: “me interesa mucho el tema, pero no lo veo posible en mi centro”, “mis estudiantes no están preparados”, “no dispongo de recursos tecnológicos”, etc.

Los que sí han finalizado el curso, hacen hincapié en el esfuerzo personal que les ha supuesto finalizar el proyecto: “al principio estaba completamente perdido, no sabía por dónde empezar”, “cada dificultad con el software parecía insalvable”, “pasé por una primera etapa ingenua en la que la tarea me parecía sencilla, otra segunda en la que me di cuenta de que realmente no tenía ni idea de lo estaba haciendo, y una tercera en la que, con la ayuda de

compañeros y ponente, me di cuenta del verdadero propósito de la tarea [...] ahora miro atrás y me doy cuenta de todo el camino realizado”.

Las restricciones del currículo y la programación anual del centro determinan las temáticas seleccionadas: fracciones, fracciones decimales, proporcionalidad, sucesiones, inecuaciones, funciones y transformaciones de funciones. Los enlaces a los proyectos de los docentes están disponibles en el Anexo I, y en el Anexo II se muestran algunas producciones de sus estudiantes.

Los participantes seleccionan recursos de GGB con opciones aleatorias, que les permiten mostrar más ejemplos que con “lápiz y papel”, y recursos con opciones de validación automática, que permiten la auto-evaluación del ejercicio. Además, estos recursos permiten a los estudiantes la ejercitación autónoma en casa de ejemplos y ejercicios iguales o similares, así como la preparación del examen escrito.

Los docentes coinciden en que el formato es atractivo para los estudiantes y que, a diferencia de los soportes tradicionales, proporciona dinamismo a la actividad, a pesar del riesgo que supone que los estudiantes dispersen su atención a otras aplicaciones del ordenador. Por otro lado, el deficiente mantenimiento del material informático en los centros educativos genera un “gasto temporal” inadmisibles para los docentes, que afecta al tiempo dedicado en el aula ordinaria y se convierte en un obstáculo para completar el temario del curso. Priorizan por ello el uso de un “ordenador con proyector” en el aula ordinaria, de manera que los estudiantes se turnan para manipular el modelo dinámico en presencia del grupo, y los demás estudiantes formulan mensajes a éste estudiante.

Los docentes reconocen la dificultad y el gasto temporal que les supone la selección de recursos y el montaje del libro-GGB, pero una vez terminado éste, la dinámica del aula les permite observar a los estudiantes y ayudar a aquellos que tienen dificultades. El diseño de la guía o cuestionario es una tarea habitual para el docente y, por lo tanto, no reviste dificultad especial para ellos.

Discusión de los resultados

Sfard (2004) describe tres periodos de desarrollo de los programas de formación del profesorado: (1) la era del currículum, (2) la era del estudiante, y (3) la era del docente. La alta tasa de abandono en este curso y las razones aportadas por aquellos docentes que no lo terminan, pone de manifiesto que los docentes están habituados a que la administración les

programe cursos de formación de tipo curricular y pedagógico (1 y 2), enfocados a que el docente adquiriera conocimientos adicionales a través de charlas y ponencias magistrales; pero la administración no programa cursos de tipo (3), y el docente se resiste a la interacción con la comunidad investigadora.

El currículo explicita el imperativo de utilizar graficadoras y software dinámico en la práctica matemática, pero en sus autoevaluaciones, la comunidad de docentes evidencia que el uso de la tecnología es, en la práctica, voluntario. Existe pues un acuerdo tácito en la comunidad educativa, que incluye a la administración responsable de la inspección educativa, por el cual se admite que las restricciones temporales no permiten “terminar el temario”, siendo el software un elemento accesorio susceptible de ser eliminado en favor de ejercicios de imitación y repetición realizados con papel y lápiz.

Se observa que los participantes que terminan el curso modifican los aspectos de su *praxeología* relativos a *técnicas* y *tecnología* (tabla 3): integran con éxito en la actividad matemática el software y los cuestionarios en papel, en términos de *tratamiento* y *conversión* (Duval, 1995); la introducción de opciones aleatorias y la validación automática de ejercicios amplía la galería de ejemplos mostrados a los estudiantes, reduciendo la distancia entre “la interpretación de un ejemplo en tanto ‘objeto aislado’ y en tanto ‘representante de una clase’ [de objetos]” (Lasa y Wilhelmi, 2013b, 31).

El cambio de metodología no implica un cambio en la tipología de los problemas que el docente presenta a los estudiantes, que siguen siendo, en su mayoría, ejercicios de aplicación de una técnica. Aun y todo, en sus autoevaluaciones, los docentes reconocen implícitamente que la toma de responsabilidad del estudiante libera al docente para hacer un seguimiento efectivo del desarrollo de sus capacidades, identificar dificultades, evaluar, etc. No se puede decir, pues, que exista una modificación total del *contrato de imitación*, aunque sí una alteración sustancial que permite a los docentes, durante el momento de exploración con un modelo dinámico, trasladar parte de la responsabilidad a los estudiantes, introduciendo un componente *adidáctico*.

PRAXEOLOGÍA EMERGENTE	INVESTIGADOR	DOCENTE
TAREA	Situación didáctica	Ejercicios de imitación y repetición
TÉCNICAS	Instrumentación del modelo dinámico Momento de exploración	<i>Instrumentación: opciones aleatorias y de autoevaluación</i> <i>Momentos de exploración de la técnica</i>

TECNOLOGÍA	Software dinámico GeoGebra Contrato con componente adidáctico	<i>Contrato de imitación que incorpora un componente adidáctico</i>
TEORÍA	<i>Evidencia empírica de la necesidad de un marco teórico que regule el uso de la Demostración Automática de Teoremas (DAT)</i>	Información curricular Epistemología espontánea del profesor Innovación educativa Autodidáctica, no-sistemático

Tabla 3. *Praxeologías didácticas* emergentes del investigador y de los docentes.

Paradójicamente, el único docente del grupo A que no termina el curso demostró en las primeras sesiones un amplio dominio técnico en el uso del instrumento GeoGebra. Lasa, Wilhelmi y Abaurrea (2017) describen en un modelo teórico la conexión existente entre las falacias argumentales y los *obstáculos* de origen didáctico. En este caso, el bloqueo que sufre el docente se puede interpretar como un *obstáculo metadidáctico*: la forma de aprender a “cómo enseñar”, condiciona la forma de enseñar. El origen de este obstáculo estaría en una *praxis* técnica bien asentada, que genera un bloqueo instruccional, que no permite al docente cambiar su *praxeología*.

Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas

A diferencia de otras metodologías “pasivas” empleadas hasta el momento, la TMD ha resultado ser una metodología eficaz que garantiza un cambio de *praxeología* docente y que permite comparar los conocimientos de investigadores y docentes en el marco de un curso de formación del profesorado. El buen funcionamiento del curso avala, además, la necesidad de la figura del *bróker*.

Los docentes se muestran proclives a modificar *técnicas* y *tecnologías* educativas. La introducción de modelos dinámicos obliga a modificar, en diferente medida, el *contrato didáctico de imitación*, de manera que se incluye una cláusula con un componente *adidáctico*. Los docentes se resisten a cambiar la tipología de los ejercicios, que siguen siendo, en su mayoría, de imitación y repetición.

La prevalencia de los docentes a seleccionar recursos informáticos con instrumentos de validación automática aporta evidencias empíricas al investigador sobre la importancia de este campo novedoso para la Educación matemática, que debe ser objeto de futuras investigaciones en didáctica de las matemáticas. El software dinámico incluye paquetes de Demostración Automática de Teoremas (DAT), que modifican la manera en la que docentes y estudiantes se relacionan con el saber matemático, y requieren la revisión de su *trasposición didáctica*.

Referencias bibliográficas

- Arzarello, F., Robutti, O., Sabena, C., Cusi, A., Garuti, R., Malara, N., & Martignone, F. (2014). Meta-Didactical Transposition: A Theoretical Model for Teacher Education Programmes. En A. Clark-Wilson et al. (Eds.), *The Mathematics Teacher in the Digital Era, Mathematics Education in the Digital Era 2*, 352 – 378.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas*. Buenos Aires: Zorzal.
- Chevallard, Y. (2004). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. *Troisième Université d'été Animath*, Saint-Flour (Cantal), 22–27 août. IUFM d'Aix-Marseille y UMR ADEF.
- Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(1), 73–112.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.
- Lasa, A. (2015). *Jarduera matematikoa eredu dinamikoen laguntzaz*. Bilbo: UEU.
- Lasa, A., Wilhelmi, M. R. y Abaurrea, J. (2017). El problema de la argumentación: una aproximación desde el EOS. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. [Disponible en, <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html>]
- Lasa, A., Wilhelmi, M.R. (2013a). Use of GeoGebra in explorative, illustrative and demonstrative moments. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de Sao Paulo*, 2(1), 52–64. [Disponible en: <http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/15160/12279>].
- Lasa, A., Wilhelmi, M.R. (2013b). GeoGebra en la formación de profesorado de ESO y Bachillerato. *Cónica*, 3, 30–32. [Disponible en: <http://acgeogebra.cat/butlleti/conica3/conica3.pdf>]
- Sfard, A. (2005). What could be more practical than good research? On mutual relations between research and practice of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 58(3), 393-413.
- Trouche, L. (2005). Instrumental genesis, individual and social aspects. En D. Guin, K. Ruthven, & L. Trouche (Ed.) *The didactical challenge of symbolic calculators*, 36, 197-230. Berlin: Springer.

Anexo I. Catálogo de proyectos de los docentes

En la tabla A se incluyen los enlaces a los proyectos realizados por los docentes.

Temática del libro	Enlace
Sucesiones	https://www.geogebra.org/m/a7yNj9Dm
Proporcionalidad simple y compuesta	https://www.geogebra.org/m/n95mWA5Q#material/j6GwJeVd
Funciones (equipo de docentes)	https://www.geogebra.org/m/CxR3DWtc#material/pyVseg9G
Fracciones (Zatikiak)	https://www.geogebra.org/m/anZWXZSS#material/HTnW7HYw
Inecuaciones	https://www.geogebra.org/m/yAU8cZc2#material/PpzZRUBw

(Inekuazioak)

Fracciones decimales
(equipo de docentes)
(Zatiki hamartarrak)

<https://www.geogebra.org/m/JHdma4cg#material/KNakGwUT>

Transformaciones funcionales
(Funtzioen transformazioak)

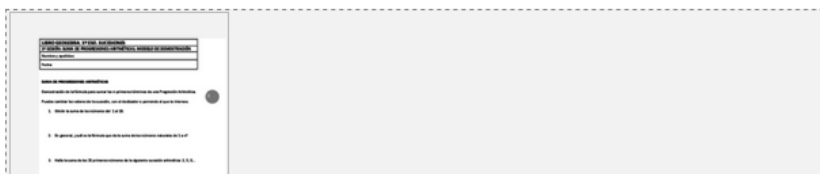
<https://www.geogebra.org/m/hxtKs63w>

Tabla A. Núcleos de interés de los docentes.

La arquitectura de los libros es similar y reconocible en todos los casos. En la figura A se observa la estructura típica de una actividad, que incluye: (1) cuestionario en PDF, que es entregado en papel a los estudiantes y (2) modelo dinámico asociado.

SUMA DE PROGRESIONES

SUMA DE PROGRESIONES ARITMÉTICAS - MODELO DE DEMOSTRACIÓN



SUMA DE PROGRESIONES ARITMÉTICAS

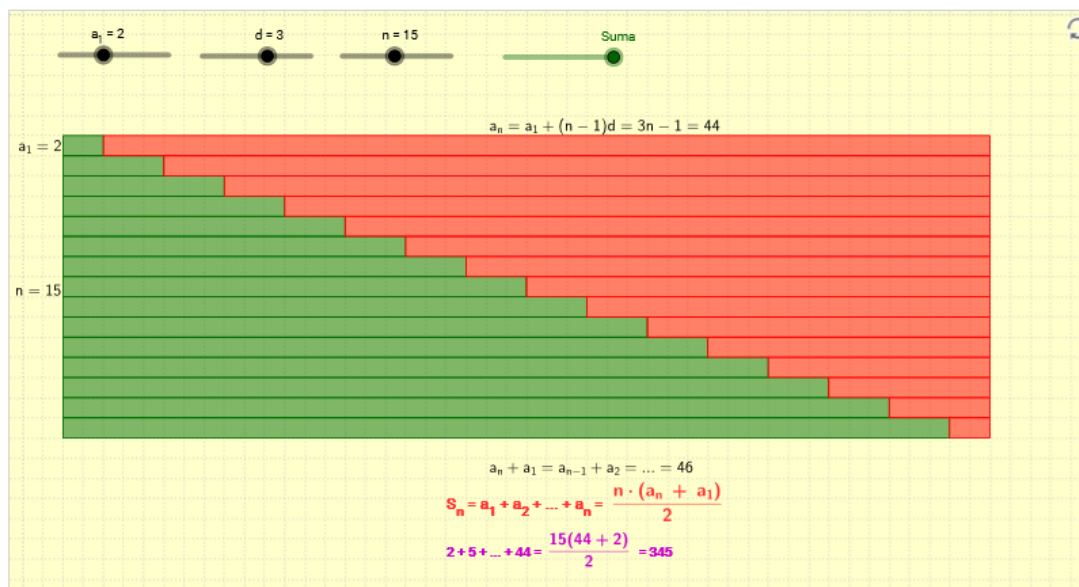


Figura A. Captura de imagen del libro *Sucesiones* (<https://www.geogebra.org/m/a7yNj9Dm>).

Anexo II. Producciones en papel de estudiantes de secundaria relacionados con el uso de los libros GGB regidos en el Anexo I

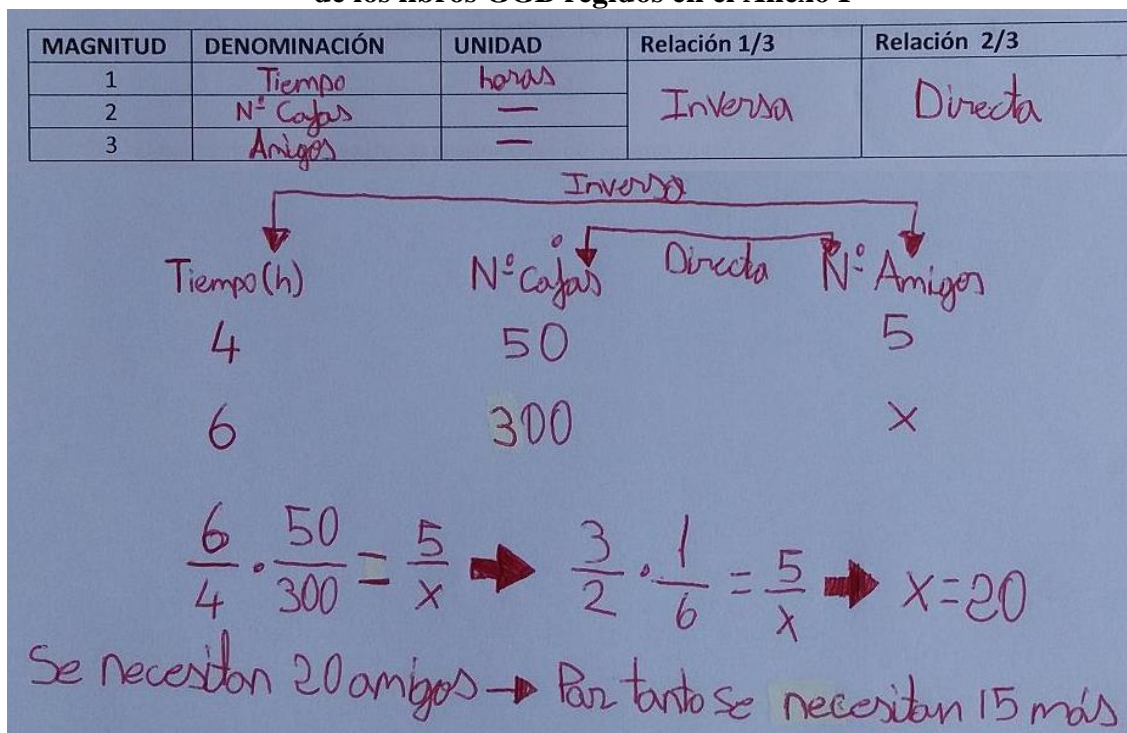


Figura A. Ejemplo de cuestionario del libro “Proporcionalidad simple y compuesta”.

GRÁFICAS DE FUNCIONES POLINÓMICAS.

Completa la siguiente tabla observando la gráfica de las siguientes funciones polinómicas.

Función polinómica	Grado del polinomio	Función lineal	Curva
$f(x)=2x^2+3$	2		X parabola
$f(x)=2x+3$	1	X	
$f(x)=2x^3+3$	3		X
$f(x)=-x+1$	1	X	
$f(x)=x^2+x+1$	2		X parabola
$f(x)=x^3+x+1$	3		X
$f(x)=4x+3$	1	X	

A partir de la tabla contesta a la siguiente pregunta:

¿Qué tipo de funciones se corresponden con las funciones cuya gráfica es una recta?

Cuando tenemos un polinomio de primer grado son funciones lineales, y cuando los polinomios son mayores de primer grado son curvas.

Figura B. Ejemplo de cuestionario del libro “Funciones”.

1. TAULAK BETE:

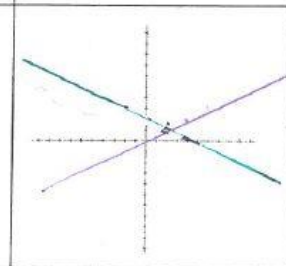
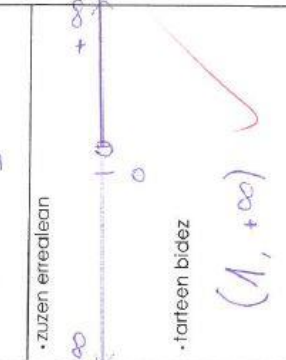
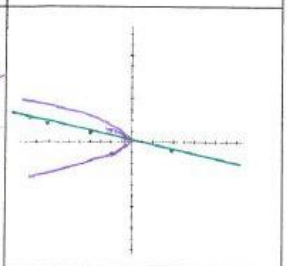
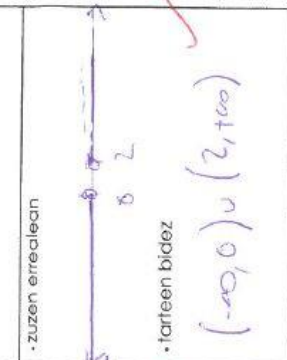
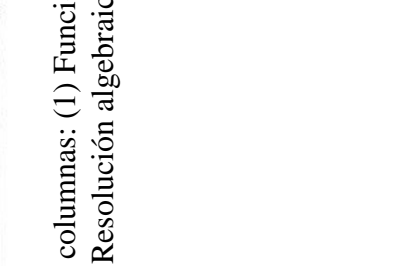

1. LAN ORRIA

Sartu beharreko zatikia	IRUDIA	Zein da izendatzailea?	Zein da zenbakitzailea?	BALIOKIDE BAT (irudia ere)	BESTE BALIOKIDE BAT (irudia ere)	BESTE BALIOKIDE BAT (irudia ere)	Zer pasa da hasierako zatikitik SINPLIFIKAZIO bidez zatiki baliokidea lortzeko?
2/6		6	2	$\frac{1}{3}$ 			$2:2 = \frac{1}{3}$ $6:2 = \frac{1}{3}$
2/10		10	2	$\frac{1}{5}$ 			$2:2 = \frac{1}{5}$ $10:2 = \frac{1}{5}$
4/12		12 4	4	$\frac{2}{6}$ 	$\frac{1}{3}$ 		$4:4 = \frac{1}{3}$ $12:4 = \frac{1}{3}$
4/16		16	4	$\frac{2}{8}$ 	$\frac{1}{4}$ 		$4:4 = \frac{1}{4}$ $16:4 = \frac{1}{4}$
6/12		12	6	$\frac{3}{6}$ 	$\frac{2}{4}$ 	$\frac{1}{2}$ 	$6:2 = \frac{1}{2}$ $12:2 = \frac{1}{2}$

Leyenda de columnas: (1) Fracción; (2) Representación; (3) Denominador; (4) Numerador; (5) Representación equivalente simplificada 1; (6) Representación equivalente simplificada 2; (7) Representación equivalente simplificada 3; (8) Conclusión

Figura C. Ejemplo de cuestionario del libro “Fracciones”.

✓
I.

funzioak	adierazpen grafikoa	inekuazioa	inekuazioa ohiko hizkuntzan	ebazpen grafikoa	eskuzko ebazpena	emaitza
$f(x) = 2x - 3$ $g(x) = 3x + 2$		$2x - 3 \geq 3x + 2$	<p>Non e izango da $2x - 3$ funtzioa handiagoa edo berdina $3x + 2$ baino?</p>	<p>• emaitza ohiko hizkuntzan: $-5 \times$ denera edo trinkigean denera. • emaitza aljebraikoki: $x \leq -5$</p>	$2x - 3 \geq 3x + 2$ $0 \geq x + 5$ $-5 \geq x$ ✓	<p>• zuzen errealean</p>  <p>• tarteen bidez $(-\infty, -5]$</p>
$f(x) = -2x$ $g(x) = 2x - 4$		$-2x < 2x - 4$	<p>Non e izango da $-2x$ baino handiagoa $2x - 4$ baino txikiagoa?</p>	<p>• emaitza ohiko hizkuntzan: x / denera baino handiagoa denera. • emaitza aljebraikoki: $x > 1$</p>	$-2x < 2x - 4$ $-4x < -4$ $x > 1$ ✓ $x > 1$	<p>• zuzen errealean</p>  <p>• tarteen bidez $(1, +\infty)$ ✓</p>
$f(x) = 2x^2$ $g(x) = 4x$		$2x^2 > 4x$	<p>Non e izango da $2x^2$ funtzioa $4x$ baino handiagoa (monotonikoa)?</p>	<p>• emaitza ohiko hizkuntzan: x 0 baino txikiagoa edo 2 baino handiagoa denera. • emaitza aljebraikoki: $0 > x > 2$</p>	$2x^2 > 4x$ $2x^2 - 4x > 0$ $2x(x - 2) > 0$ $x < 0$ edo $x > 2$ ✓ $x < 0$ edo $x > 2$	<p>• zuzen errealean</p>  <p>• tarteen bidez $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ ✓</p>

Lehenengo de columnas: (1) Funcción; (2) Representación gráfica; (3) Inecuación; (4) Inecuación en lenguaje natural; (5) Resolución gráfica; (6) Resolución algebraica; (7) Solución.

Figura D. Ejemplo de cuestionario del libro “Inecuaciones”.