CB-926

UN PROBLEMA DE BACHILLERATO RESUELTO EN PRIMARIA

Rosa Nortes Martínez-Artero - Andrés Nortes Checa
mrosa.nortes@um.es – anortes@um.es
Universidad de Murcia. España

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.
Modalidad: Comunicación Breve (CB)
Nivel educativo: (5) Formación y actualización docente.
Palabras clave: Formación Inicial de Maestros, Resolución de Problemas, Geometría, Errores y Dificultades.

Resumen
La resolución de problemas es fundamental en la enseñanza obligatoria, siendo considerada como piedra angular en la educación matemática. En el presente estudio se ha tomado un problema de nivel de bachillerato, que puede ser resuelto de forma sencilla aplicando matemáticas escolares a nivel de primaria. Se propone en el Grado de Maestro de Primaria en una asignatura de 4.º curso en dos evaluaciones en los cursos 15/16 y 16/17, siendo contestado por 27 alumnos. Se presentan seis procedimientos de resolución y se analizan y clasifican las respuestas. El problema que consiste en calcular el área de un paralelogramo es resuelto bien numéricamente por uno solo de los alumnos, uno de cada dos alumnos interpreta el enunciado como lo que se pide es calcular el área de un triángulo o de un cuadrado y tres de cada cuatro alumnos se quedan en la primera fase del Modelo de resolución de problemas de Polya. Hay cuatro alumnos que responden de forma arbitraria, un alumno que confunde las coordenadas de los puntos con medidas aplicando el teorema de Pitágoras a las coordenadas y un alumno que en la resolución llega a cometer seis errores. Se presenta Anexo con algunas respuestas de los alumnos.

En la enseñanza obligatoria, tanto de primaria como de secundaria, la resolución de problemas es considerada como piedra angular de la educación matemática. Esto se pone de manifiesto en el Real Decreto 126/2014 por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria donde el primer bloque de Matemáticas es “Procesos, métodos y actitudes matemáticas”, con la intención de que sea la columna vertebral del resto de los bloques y se inicia el contenido con la planificación del proceso de resolución de problemas. En el Decreto 89/2014 por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de Educación Primaria, se consideran las matemáticas como la base fundamental para la adquisición de nuevos conocimientos en el proceso científico y tecnológico y en su

ISBN 978-84-945722-3-4

aprendizaje es importante no dejar lagunas ni dar nada por sabido, siendo la manipulación de materiales una constante en la actividad diaria en el aula. La práctica de las matemáticas es, entre otras, la que enseña a razonar y aplicar el razonamiento matemático a la resolución de problemas. Pero también, en la Orden ECD/65/2015 en la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, secundaria obligatoria y el bachillerato se indica que la competencia matemática “implica la capacidad de aplicar el razonamiento matemático y sus herramientas para describir, interpretar y predecir distintos fenómenos en su contexto” (p. 6993). Se trata, pues, de utilizar los conceptos, procedimientos y herramientas para aplicarlos en la resolución de problemas. También es prioritario en la Orden ECI/385/2007, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro de Primaria. En el módulo didáctico y disciplinar en Matemáticas se indica que los alumnos deben “adquirir competencias matemáticas básicas, conocer el currículo escolar de matemáticas, analizar, razonar y comunicar propuestas matemáticas, plantear y resolver problemas vinculados con la vida cotidiana…” (p. 53750).

En la resolución de problemas Santos Trigo (2007) reconoce que pueden existir distintos caminos para promover el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes y Llinares (2013) considera que el conocimiento de matemáticas de los futuros maestros es un elemento clave para la mejora de la enseñanza y que estará determinada por el uso de estos conocimientos en la resolución de tareas profesionales

De ahí que los futuros maestros, estudiantes del Grado de Maestro de Primaria, tengan en la materia Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas un contenido fundamental como es la resolución de problemas y desarrollen el proceso de resolución atendiendo a distintos criterios con la idea de que un problema se puede resolver utilizando distintas estrategias y que, a veces, la solución no es cerrada ni única.

En la Facultad de Educación de la Universidad de Murcia existen, en el Grado de Maestro de Primaria (GMP), siete Menciones en 4.º curso siendo una de ellas “Recursos educativos para el aula y el tiempo libre”, y una de las asignaturas es Taller de Matemáticas (3 créditos), en donde el tema principal es la resolución de problemas, pues los alumnos que la cursan han llevado a cabo 21 créditos de Matemáticas y su didáctica, 12 en 2.º y 9 en 3.º. Y en las

ISBN 978-84-945722-3-4

evaluaciones del Taller se suelen plantear problemas que son actividades profesionales de matemáticas.

Uno de los problemas incluido en dos convocatorias de examen ha sido extraído del XX Concurso de Primavera de Matemáticas de la Comunidad de Madrid, que habiendo sido propuesto para bachillerato se indica en el examen que lo resuelvan a nivel de alumnos de 6.º de Primaria, proporcionándoles papel cuadriculado que ayude a tener sobre la mesa el "geoplano".

En la resolución de un problema inciden factores cognitivos y afectivos y estos últimos pueden condicionar el proceso seguido cuando la persona lee la actividad matemática y trata de entenderla para poder resolverla y una actitud positiva o negativa puede condicionar el encontrar o no una solución. (Gómez-Chacón, 2000)

Un factor del dominio afectivo es la ansiedad que muestran los alumnos ante un examen, que es superior a la ansiedad general hacia las Matemáticas. En Nortes y Nortes (2014) en un estudio realizado en 2012/13 y 2013/14 a 309 y 197 alumnos, del GMP, se constató que ansiedad en general tenían una media de 2,88 y 2,78 y ansiedad hacia los exámenes de 3,47 y 3,54 respectivamente, en una escala Likert de 1 a 5.

En el presente trabajo se presentan algunas soluciones que pueden realizarse con los conocimientos de matemáticas escolares de primaria y cómo lo han resuelto los futuros maestros que estudian el Grado de Maestro de Primaria en el último curso de sus estudios. Se analizan las respuestas dadas y se clasifican por niveles de conocimientos.

Método

Participantes

Alumnos de 4.º curso del GMP, presentados a la segunda convocatoria de la asignatura Taller de Matemáticas en el curso 2015/16, que figuraba como problema n.º 6 de un total de ocho y fue contestado por 12 alumnos.

También fue propuesto en la primera convocatoria de la misma asignatura en el curso 2016/17, figuraba como n.º 6 de un total de diez cuestiones en donde el alumno elegía 8 y fue contestado por 15 estudiantes.

El número total de participantes es de 27 alumnos. Y la elección ha sido intencional.

Instrumento

ISBN 978-84-945722-3-4

Problema planteado en el XX Concurso de Primavera de la Comunidad de Madrid, en el nivel de Bachillerato: “Tres vértices de un paralelogramo son los puntos O(0, 0), A(1, 4) y B(4, 1). ¿Cuál es el área del paralelogramo?”. El enunciado ha sido redactado de la siguiente forma:

Modelo 1. Tres vértices de un paralelogramo son los puntos O(0, 0), A(1, 5) y B(5, 1). ¿Cuál es el área del paralelogramo? ¿Cómo podrías plantear esta actividad en Primaria?
Modelo 2. Idem., siendo los vértices O(0, 0), A(1, 4) y B(4, 1).

En la convocatoria de enero de 2017 solo se ha considerado el modelo 1.

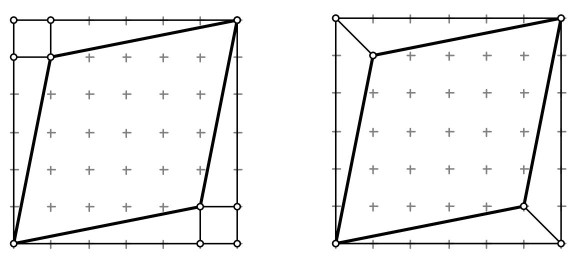
Procedimiento

Este problema fue propuesto a los alumnos del Grado de Maestro de Primaria en la Convocatoria de Junio (28.05.2016) en la asignatura “Taller de Matemáticas” (3 créditos) y en la convocatoria de Enero (11.01.17), planteando en esta ocasión solo el modelo 1. El tiempo dado en cada evaluación para las ocho cuestiones ha sido de 2 horas y media.

Formas de resolución

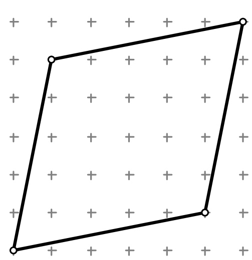
Se presentan algunas formas de resolución utilizando los conocimientos de matemáticas escolares.

Procedimiento 1 y 2. Por diferencia de áreas en el primer cuadrante.



$A = 6^2 - (2 \times 5 + 2) = 24\ u^2$ $\qquad$ $A = 6^2 - 4 \times \frac{6 \times 1}{2} = 24\ u^2$

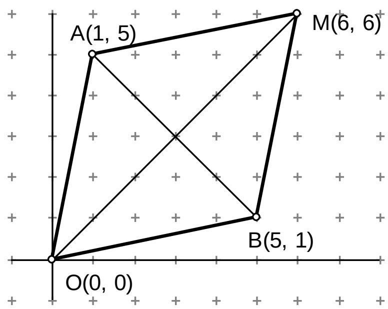
Procedimiento 3. Por la fórmula de Pick.

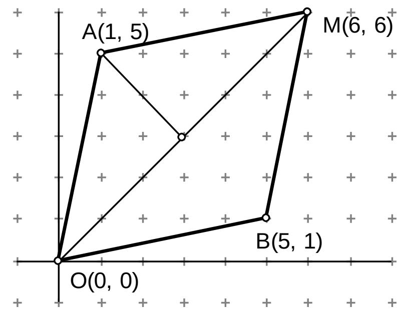


$A = \frac{f}{2} + i - 1 = \frac{4}{2} + 23 - 1 = 24\ u^2$

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

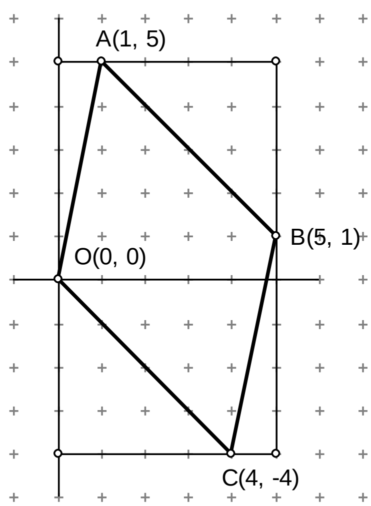
Procedimiento 4 y 5. Dibujando el cuarto punto en el primer cuadrante. Tras comprobar que las diagonales AB = $\sqrt{32}$ u y OM = $\sqrt{72}$ u, son perpendiculares, aplicando la fórmula del área del rombo o del triángulo.





$$A = \frac{\sqrt{72}\times\sqrt{36}}{2} = 24\ u^2 \qquad A = \frac{\sqrt{72}\times\frac{\sqrt{36}}{2}}{2}\times 2 = 24\ u^2$$

Procedimiento 6. Por diferencia de áreas dibujando el cuarto punto en el 4.º cuadrante.



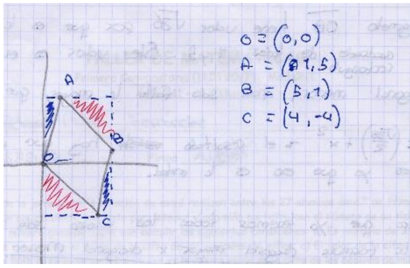
$$A = 9\times 5 - (4^2 + 5) = 24\ u^2$$

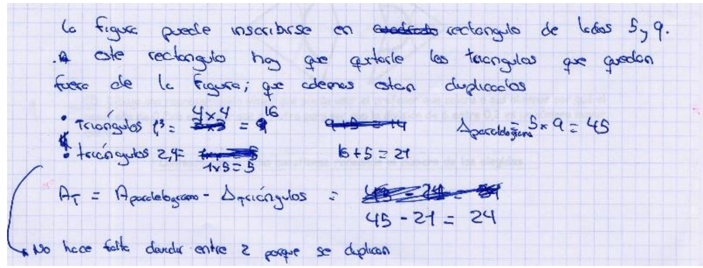
En este caso al no ser el paralelogramo OABC un rombo, pues OA = BC = $\sqrt{26}$ u y AB = OC = $\sqrt{32}$ u, no se puede aplicar la fórmula.

Resultados

De los 12 alumnos de la convocatoria de junio 2016 ninguno lo resolvió bien y en la convocatoria de enero de 2017 solo uno lo resolvió utilizando el procedimiento 6.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4





Se han estructurado las respuestas y se ha analizado su contenido, presentando algunos casos para la reflexión en el Anexo.

Resumen curso 2015/2016

- 4 alumnos lo consideran un triángulo equilátero.
- 2 alumnos dibujan los tres puntos dados pero no el cuarto.
- 1 alumno lo dibuja en el primer cuadrante y calcula el lado $\sqrt{26}$ u, pero considera la altura del paralelogramo 5 unidades.
- 1 alumno lo dibuja en 1.º y 4.º cuadrante señalando mal el cuarto punto.
- 1 alumno hace una exposición equivocada de aplicaciones sin hacer dibujo.
- 3 alumnos hacen dibujo mal y explicación mal.

Resumen curso 2016/2017:

- 1 alumno lo resuelve bien siguiendo el procedimiento 6.
- 3 alumnos lo consideran un triángulo (dos como equilátero).
- 5 alumnos lo calculan como un cuadrado de lado 5 unidades.
- 2 alumnos lo calculan como un cuadrado de lado $\sqrt{26}$ unidades.
- 1 alumno lo calcula aplicando el área del rombo.
- 1 alumno lo calcula como un paralelogramo de base y altura 5 unidades.
- 1 alumno dibuja el paralelogramo, lo descompone en otros más simples pero no sabe calcular sus áreas.
- 1 alumno dibuja el paralelogramo en el 1.º y 4.º cuadrante, señalando mal el 4.º punto.

Agrupando los distintos procedimientos y porcentajes en una tabla tendríamos:

PROCEDIMIENTO	**%**
Uno bien por diferencia de áreas cuarto punto en el 4.º cuadrante	3,7
Traducen el paralelogramo en un triángulo equilátero	25,9

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Lo calculan como un cuadrado de lado 5	18,5
Tres alumnos hacen mal el dibujo y la explicación	11,1
Lo calculan como un cuadrado de lado correcto $\sqrt{26}$	7,4
Dos alumnos dibujan los tres puntos dados pero no el cuarto	7,4
Dos alumnos señalan el cuarto punto mal en el 4.º cuadrante	7,4
Lo calcula aplicando el área de un rombo	3,7
Lo calcula como un paralelogramo de base 5 y altura 5	3,7
Lo calcula como un paralelogramo de base $\sqrt{26}$ y altura 5	3,7
Dibuja el paralelogramo, lo descompone pero no sabe calcularlo	3,7
Un alumno explica equivocadamente como se hace y sin dibujo	3,7

- Hay un error que se repite en las dos muestras que es traducir del enunciado que como dan tres puntos se trata de un triángulo, en la mayor parte como equilátero, sin tener en cuenta que en el enunciado aparece dos veces escrito paralelogramo.
- En la primera muestra hay tres alumnos que hacen un dibujo incorrecto y una explicación inadecuada y ese tipo de error no aparece en la segunda muestra.
- En la segunda muestra hay cinco alumnos que calculan el área como si fuera un cuadrado de lado equivocado y otros dos que calculan el área del cuadrado con lado correcto.
- Más del 50 % de alumnos contestan a este problema considerando un triángulo o un cuadrado en lugar de un paralelogramo.
- El cuarto punto en el cuarto cuadrante lo considera un alumno de la primera muestra y dos en la segunda muestra, siendo uno el que lo responde bien.

Conclusiones

Para resolver un problema Polya (1987) propone un modelo basado en cuatro fases: comprender el problema, concebir un plan diseñando estrategias, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida. A la vista de las respuestas dadas hay catorce alumnos que no comprenden el enunciado, puesto que siete calculan el área de un triángulo y siete calculan el área de un cuadrado, es decir que uno de cada dos alumnos cambia la figura geométrica

ISBN 978-84-945722-3-4

del enunciado. Además, hay cuatro alumnos que no consiguen dibujar el cuarto punto del paralelogramo y tres alumnos que hacen un dibujo que no tiene nada que ver con el enunciado. Si tenemos todo esto en cuenta, llegamos a que tres de cada cuatro alumnos se quedan en la primera fase.

El que uno de cada tres alumnos en 2015/16 tras la lectura del enunciado interpreten que al ser tres puntos se trata de un triángulo y que uno de cada tres en 2016/2017 considera el paralelogramo como un cuadrado de lado 5 unidades, demuestra falta de concentración a la hora de resolver el problema.

Hay un alumno que llega a cometer seis errores: considerar un triángulo, lo considera equilátero, le da al lado medida 5, considera que la altura es 5 y pone que la mitad de 25 es 17,5, y no pone el resultado en unidades cuadradas. Sin comentario.

Un factor a tener en cuenta en descargo de los alumnos es que fue presentado como un problema de la evaluación de la asignatura y que ante un examen los alumnos tienen más ansiedad que en situaciones normales. Tanto es así, que en Nortes y Nortes (2014) se constató que aumentaba en seis décimas la ansiedad ante un examen respecto a la ansiedad general ante las matemáticas, llegando a alcanzar el valor más alto las alumnas con una media de 3,75 en la Escala de Likert de 1 a 5.

Los futuros maestros llegan al Grado de Maestro de Primaria con unos conocimientos matemáticos escasos, que no logran aumentar a lo largo de su escolarización tras cursar 24 créditos de la materia de Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y sobretodo no terminan de adquirir las destrezas de resolución de problemas tan necesarias en la formación de alumnos de Primaria.

Siguiendo a Llinares (2013) en esta investigación se ha presentado un problema que les permitiera a los futuros maestros, hoy alumnos de 4.º del Grado, reaprender lo que les supone les es familiar por haberlo estudiado en cursos anteriores y por otro "desarrollar el conocimiento de matemáticas vinculado a la tarea de analizar las respuestas de los alumnos a los problemas de matemáticas" (p. 10). Esperemos que este estudio ayude a los futuros maestros.

Referencias bibliográficas

ISBN 978-84-945722-3-4

Decreto 89/2014 de 24 de julio, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Primaria. *Boletín Oficial Comunidad de Madrid*. Madrid, 25 de julio de 2014, núm.175, pp. 10-89.

Gómez-Chacón, I. M. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid: Narcea.

Llinares, S. (2013). Conocimiento de matemáticas y Tareas en la formación de maestros. I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe. 6-8 noviembre. Santo Domingo. República Dominicana.

Nortes, R., Nortes, A. (2014). Ansiedad hacia las matemáticas, agrado y utilidad en futuros maestros. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 485-492). Salamanca: SEIEM.

Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*. Madrid, 29 de enero de 2015, núm. 25, pp.6986-7003.

Orden ECI/3857/2007 de 27 de diciembre por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*. Madrid, 29 de diciembre de 2007, núm. 312, pp. 53747-53750.

Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*. Madrid 1 de marzo de 2014, núm. 52. pp. 19349-19420.

Santos Trigo, M. (2008). La resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. J. Blanco (2008), *Investigación en Educación Matemática XII*. Badajoz: SEIEM.

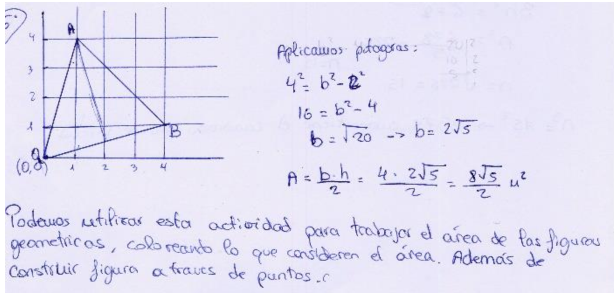
UN PROBLEMA DE BACHILLERATO RESUELTO EN PRIMARIA

Anexo

Siete alumnos “traducen” que un paralelogramo es un triángulo, cinco de ellos lo consideran equilátero.

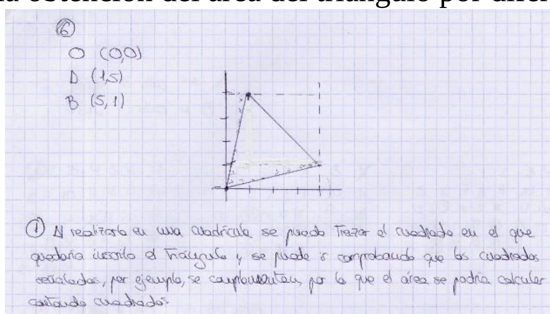
Caso 1. Obtención del área de un triángulo equilátero.

ISBN 978-84-945722-3-4



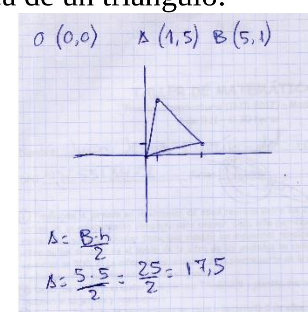
Aquí, un primer error es no comprobar que se trata de un triángulo isósceles. Un segundo error la medida del lado 4. Un tercer error aplica mal el Teorema de Pitágoras. Curso 2015/16.

Caso 2. Explicación de la obtención del área del triángulo por diferencia de superficies.



En este caso el alumno se limita a dibujar el triángulo e indicar como se podría calcular el área por diferencia. Curso 2016/17.

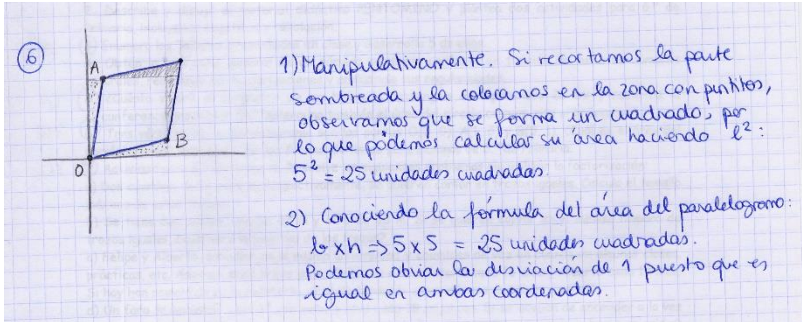
Caso 3. Aplica la fórmula del área de un triángulo.



En este caso el alumno comete un primer error al considerar que es triángulo, el segundo al considerarlo equilátero, un tercero que el lado mide 5 unidades, un cuarto al considerar que la altura mide también 5 unidades, un quinto error al dividir 25 entre dos y poner que es 17, 5 y un sexto error no poner que son unidades cuadradas. Curso 2016/17.

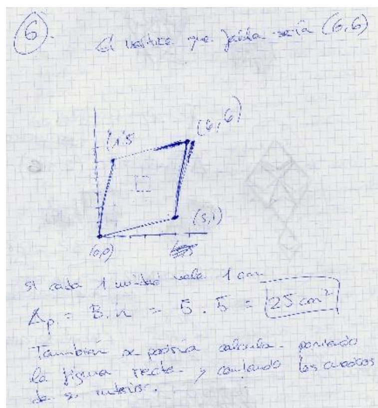
Cinco alumnos consideran el paralelogramo como un cuadrado.

Caso 4. Reconvirtiendo el paralelogramo en un cuadrado.



Considera dos formas de resolverlo, en la primera manipulativamente lo "reduce" a un cuadrado, y en la segunda lo considera un paralelogramo de base 5, equivocado, y altura 5, equivocado. Curso 2016/17.

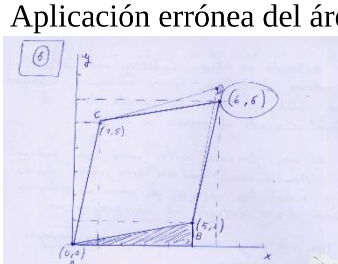
Caso 5. "Poniendo la figura recta".

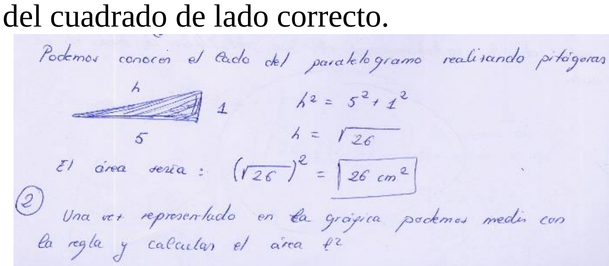


Aquí no se presentan cálculos, pero es significativa la última parte, dando una segunda forma de resolverlo "poniendo la figura recta y calculando los cuadrados del interior". Curso 2016/17.

Dos alumnos calculan el área de un cuadrado de lado $\sqrt{26}$.

Caso 6. Aplicación errónea del área del cuadrado de lado correcto.



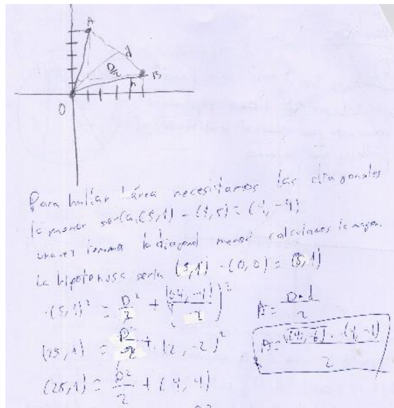


El alumno calcula bien el lado del paralelogramo pero lo considera como un cuadrado. Curso 2016/17.

Un alumno aplica la fórmula del área de un rombo.

Caso 7. Intento de resolución aplicando la fórmula del rombo.

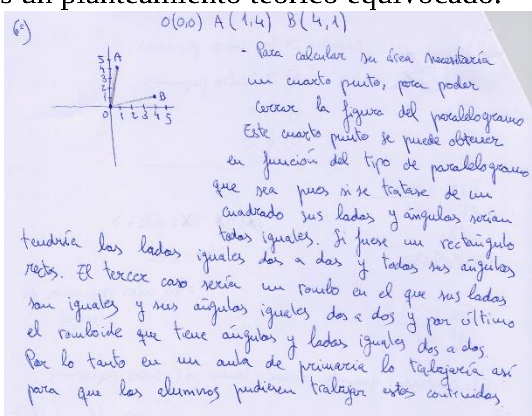
VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



Aparecen varios errores graves, como considerar la diagonal dada por un punto, aplicar el teorema de Pitágoras a coordenadas… Curso 2016/17.

Dos alumnos solo dibujan los tres puntos dados.

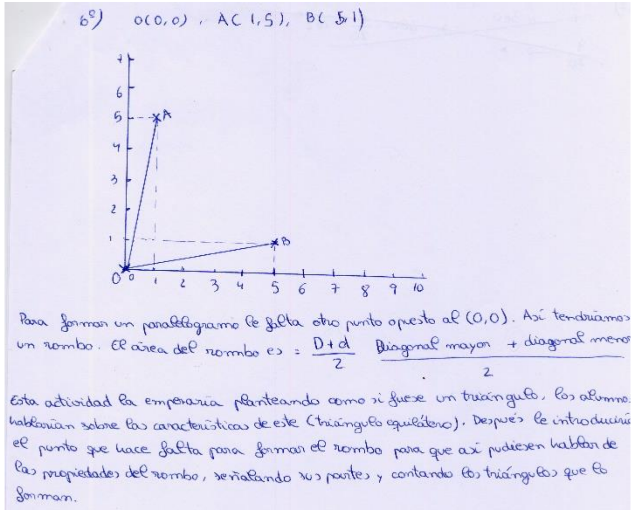
Caso 8. Todo lo escrito es un planteamiento teórico equivocado.



Considera que "el cuarto punto se puede obtener en función del tipo de paralelogramo que sea" cuando en realidad ese punto es fijo. Todo lo que viene a continuación no tiene sentido. Curso 2015/16.

Caso 9. Indica lo que haría y presenta la formula incorrecta del área del rombo.

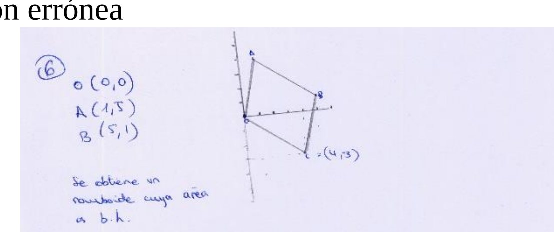
VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



Señala dos puntos e indica la fórmula equivocada del área del rombo, sin comprobar si lo es. Curso 2015/16.

Dos alumnos representan de forma equivocada el paralelogramo en el primer y cuarto cuadrante.

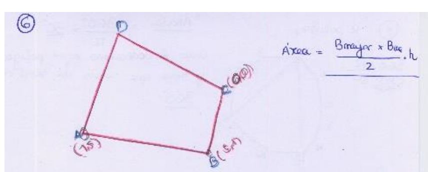
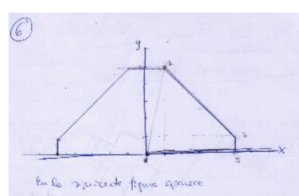
Caso 10. Representación errónea



En este caso el punto A no está bien situado y por lo tanto tampoco el cuarto punto. Deja indicado como se resolvería. Curso 2015/16.

Tres alumnos hacen un dibujo o dan una explicación errónea.

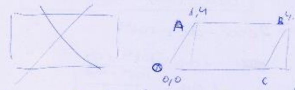
Caso 11 y 12. Dibujo y fórmula no válidas.

En el primer caso el dibujo es arbitrario y la formula pretende ser la del área de un trapecio. En el segundo caso, sin comentarios. Curso 2015/16.

Caso 13. Dibujo y explicación incomprensible.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



El área es el cálculo del triángulo rectángulo
sumado al otro área que es como de un
rectángulo.
En primero lo plantearía a través de
juegos. Por ejemplo: Con cartulinas que ellos
vayan recortando y viendo el trozo que
sobra dónde lo colocamos para que
sea un rectángulo y así calculamos su
área.
Con comida también se puede hacer,
cortando trozos de fruta y de este
modo fomentar la buena alimentación.
Otro modo divertido sería a través del
tangram, ya que hay una figura
que es un paralelogramo.

Un alumno explica lo que haría.

Caso 14. Contestación que puede servir para cualquier enunciado.

(6) Esta actividad se podría plantear en Educación Primaria de manera
que los alumnos tuviesen que dibujar el paralelogramo en
una cuartilla, y aplicar sobre el mismo diversos ejercicios tales
como, aplicar sobre el mismo un eje de simetría, practicar
sobre los mismos la simetría radial y axial, calcular el
área del mismo, calcular el área si añadimos un cuadrado
más por cada lado...

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4